

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

~ КЛАССИКИ НАУКИ ~



А.А.МАРКОВ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

РЕДАКЦИЯ ПРОФЕССОРА Ю.В.ЛИННИКА

КОММЕНТАРИИ
Ю.В.ЛИННИКА, Н.А.САПОРОВА,
О.В.САРМАНОВА и В.Н.ТИМОФЕЕВА

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 3xyz \\ \text{пред. м.с.} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - na}{\sqrt{n}} \right)^l &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} C^{\frac{l}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^l e^{-t^2} dt\end{aligned}$$

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

1954

Под общей редакцией Комиссии Академии Наук СССР
по изданию научно-популярной литературы

и серии „Итоги и проблемы современной науки“

Председатель Комиссии Академии Наук СССР

академик С. И. ВАВИЛОВ

Зам. председателя член-корреспондент

Академии Наук СССР П. Ф. ЮДИН



ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ



**О БИНАРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМАХ
ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Известно, что точный предел minimum'ов для совокупности всех бинарных квадратичных форм данного отрицательного определителя $-D$ равен $\sqrt{\frac{4}{3}D}$, т. е. minimum'у формы

$$\sqrt{\frac{4}{3}D} \{ x^2 + xy + y^2 \}$$

того же отрицательного определителя $-D$, а точный предел minimum'ов для совокупности всех бинарных квадратичных форм данного положительного определителя D равен $\sqrt{\frac{4}{5}D}$, т. е. minimum'у формы

$$\sqrt{\frac{4}{5}D} \{ x^2 - xy - y^2 \}$$

того же положительного определителя D .

Но относительно этих пределов между бинарными квадратичными формами положительного определителя и такими же формами отрицательного определителя обнаруживается большая разница, на которую в первый раз обратили внимание А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев.*

* A. Korkine et G. Zolotareff. Sur les formes quadratiques. Mathem. Annalen, B. VI.

А именно, точный предел minimum'ов для совокупности всех бинарных квадратичных форм данного положительного определителя D , не эквивалентных

$$\sqrt{\frac{4}{5}D} \{ x^2 - xy - y^2 \},$$

равен $\sqrt{\frac{1}{2}D}$, тогда как между бинарными квадратичными формами отрицательного определителя $-D$ можно найти, для всякого данного положительного числа l , не превосходящего $\frac{4}{3}$, такие, minimum'ы которых равны $\sqrt{lD}$.

Количество $\sqrt{\frac{1}{2}D}$ служит minimum'ом для форм положительного определителя D , эквивалентных

$$\sqrt{\frac{1}{2}D} \{ x^2 - 2xy - y^2 \}.$$

Подобным же образом из моих изысканий следует, что точный предел minimum'ов для совокупности всех бинарных квадратичных форм данного положительного определителя D , не эквивалентных ни

$$\sqrt{\frac{4}{5}D} \{ x^2 - xy - y^2 \},$$

ни

$$\sqrt{\frac{1}{2}D} \{ x^2 - 2xy - y^2 \},$$

равен $\sqrt{\frac{100}{221}D}$, а это последнее количество служит minimum'ом для форм положительного определителя D , эквивалентных

$$\sqrt{\frac{4D}{221}} \{ 5x^2 - 11xy - 5y^2 \}.$$

Одним словом, $\frac{4}{5}$ и $\frac{1}{2}$ представляют только первые два члена бесконечно убывающего ряда положительных чисел

$$N_1, N_2, N_3, \dots, N_k, N_{k+1}, \dots, \quad (N)$$

который обладает следующими свойствами:

1) число классов бинарных квадратичных форм, для каждой из которых определитель равен данному положительному числу D и minimum равен $\sqrt{N_k D}$, не может быть ни нулем, ни бесконечно большим;

2) если некоторая бинарная квадратичная форма положительного определителя D не может быть сделана по численной величине меньше $\sqrt{N_k D}$, то minimum ее равен одному из количеств

$$\sqrt{N_1 D}, \sqrt{N_2 D}, \sqrt{N_3 D}, \dots, \sqrt{N_k D}.$$

Предел, к которому стремится N_k при возрастании k до бесконечности, равен $\frac{4}{9}$.

Соответственно этому существует бесчисленное множество классов бинарных квадратичных форм, для каждой из которых определитель равен данному положительному числу D и minimum равен $\frac{2}{3} \sqrt{D}$.

Числа (N) зависят от некоторых периодических непрерывных дробей, тесно связанных с особыми рядами целых положительных чисел, которые встретились Ивану Бернулли при решении совершенно другого вопроса.*

Исследование этих дробей приводит нас к следующим результатам.

Каждое из чисел (N) может быть представлено под видом

$$\frac{1}{\frac{9}{4} - \frac{1}{Q^2}},$$

* Jean Bernoulli. Sur une nouvelle espèce de calcul. Recueil pour les astronomes, t. I.

где Q — некоторое целое число.

Если уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

удовлетворяют целые числа

$$x = m, \quad y = n, \quad z = p,$$

то между числами (N) должны заключаться

$$\frac{1}{\frac{9}{4} - \frac{1}{m^2}}, \quad \frac{1}{\frac{9}{4} - \frac{1}{n^2}}, \quad \frac{1}{\frac{9}{4} - \frac{1}{p^2}}.$$

Наоборот, если одно из чисел (N) равно

$$\frac{1}{\frac{9}{4} - \frac{1}{m^2}},$$

где m целое число, можно найти бесчисленное множество пар целых чисел n и p , при каждой из которых

$$m^2 + n^2 + p^2 = 3mnp.$$

Поэтому введенные нами непрерывные дроби дают возможность найти без особенного труда все решения уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

при условии, что x, y, z числа целые и по абсолютной величине не превосходят заданного наперед предела.

Эти исследования и составляют предмет предлагаемого рассуждения.

ПОЛОЖЕНИЯ

I. Рассуждения и результаты Лагранжа, которые относятся к вопросу о разыскании minimum'ов бинарных форм и помещены в прибавлениях к „Eléments d'Algèbre“ Эйлера, не точны.

II. Теория приведения бинарных квадратичных форм с целыми коэффициентами может быть распространена в главных чертах и на формы с дробными и иррациональными коэффициентами.

III. Для всякой бинарной квадратичной формы положительного определителя можно найти бесчисленное множество совокупностей значений переменных, при которых численная величина этой формы не более $\sqrt{\frac{4}{5}D}$.

IV. Существует только один периодический ряд целых чисел

$$\dots, r_{-3}, r_{-2}, r_{-1}, r_0, r_1, r_2, r_3, \dots,$$

удовлетворяющий следующим трем условиям:

1) период его состоит из m членов, равных x , и n членов, равных $x+1$;

2) если при некотором значке k

$$r_k - r_{k+1} = +1,$$

то первая не равная нулю из разностей

$$r_{k+2} - r_{k-1}, r_{k+3} - r_{k-2}, r_{k+4} - r_{k-3}, \dots$$

более нуля;

3) если при некотором значке k

$$r_k - r_{k+1} = -1,$$

то первая не равная нулю из разностей

$$r_{k+2} - r_{k-1}, r_{k+3} - r_{k-2}, r_{k+4} - r_{k-3}, \dots$$

менее нуля.

Этот ряд не что иное, как ряд И. Бернулли для дроби $x + \frac{m}{m+n}$ (Jean Bernoulli. Sur une nouvelle espèce de calcul. Recueil pour les astronomes, t. I).

ГЛАВА I

§ 1. Пусть

$$\varphi_0 = (a_0, b_0, c_0) = a_0 x_0^2 + 2b_0 x_0 y_0 + c_0 y_0^2 \quad (1)$$

будет данная форма, коэффициенты a_0, b_0, c_0 которой вещественны и определитель $b_0^2 - a_0 c_0 = D$ более нуля. Что же касается переменных x_0 и y_0 , то они должны быть числами целыми и не могут оба одновременно обращаться в нуль.

Соответствующее уравнение

$$a_0 \xi^2 + 2b_0 \xi + c_0 = 0 \quad (2)$$

имеет два неравных вещественных корня.

Один из них ξ_0 развернем в непрерывную дробь, так что

$$\xi_0 = \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_{n-1} + \frac{1}{\xi_n}}}}, \quad (3)$$

где

$$\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \dots, \alpha_{n-1} > 0, \xi_n \geq 1$$

и притом $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ целые числа, и соответственно этой дроби возьмем ряд подстановок: *

* Oeuvres de Lagrange, t. III, Recherches d'arithmétique, § 24.

$$= -\frac{1}{\alpha_{-1} + \frac{1}{\alpha_{-2} + \dots + \frac{1}{\alpha_{-m} + \frac{1}{\eta_{-m}}}}} \quad (8)$$

отрицательный корень того же уравнения.

. Подстановки

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha_0 x_1 + y_1, & y_0 &= x_1, \\ x_1 &= \alpha_1 x_2 + y_2, & y_1 &= x_2, \\ x_2 &= \alpha_2 x_3 + y_3, & y_2 &= x_3, \\ &\dots & & \\ x_{n-1} &= \alpha_{n-1} x_n + y_n, & y_{n-1} &= x_n, \\ x_n &= \alpha_n x_{n+1} + y_{n+1}, & y_n &= x_{n+1}, \\ x_{n+1} &= \alpha_{n+1} x_{n+2} + y_{n+2}, & y_{n+1} &= x_{n+2}, \\ &\dots & & \end{aligned} \quad (9)$$

приводят нас от (a_0, b_0, c_0) к некоторому ряду форм

$$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), \dots, \\ (a_n, b_n, c_n), (a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}), \dots$$

и подстановки

$$\begin{aligned} x_0 &= y_{-1}, & y_0 &= -\alpha_{-1} y_{-1} + x_{-1}, \\ x_{-1} &= y_{-2}, & y_{-1} &= -\alpha_{-2} y_{-2} + x_{-2}, \\ &\dots & & \\ x_{-m+1} &= y_{-m}, & y_{-m+1} &= -\alpha_{-m} y_{-m} + x_{-m}, \\ x_{-m} &= y_{-m-1}, & y_{-m} &= -\alpha_{-m-1} y_{-m-1} + x_{-m-1}, \\ x_{-m-1} &= y_{-m-2}, & y_{-m-1} &= -\alpha_{-m-2} y_{-m-2} + x_{-m-2}, \\ &\dots & & \end{aligned} \quad (10)$$

к другому ряду форм

$$(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}), (a_{-2}, b_{-2}, c_{-2}), \dots, (a_{-m}, b_{-m}, c_{-m}), \\ (a_{-m-1}, b_{-m-1}, c_{-m-1}), \dots$$

При этом положительный корень уравнения

$$a_n \xi^2 + 2b_n \xi + c_n = 0 \quad (11)$$

равен ξ_n и отрицательный корень уравнения

$$a_{-m} \xi^2 + 2b_{-m} \xi + c_{-m} = 0 \quad (12)$$

равен $\frac{-1}{\eta_{-m}}$.

Если же обозначим отрицательный корень уравнения (11) через $\frac{-1}{\eta_n}$ и положительный корень уравнения (12) через ξ_{-m} , получим на основании формул (9)

$$\eta_n = \alpha_{n-1} + \frac{1}{\alpha_{n-2} + \dots + \frac{1}{\alpha_0 + \frac{1}{\eta_0}}} \quad (13)$$

и на основании (10)

$$\xi_{-m} = \alpha_{-m} + \frac{1}{\alpha_{-m+1} + \dots + \frac{1}{\alpha_{-1} + \frac{1}{\xi_0}}} \quad (14)$$

Соединим теперь найденные нами ряды форм в один

$$\dots, (a_{-2}, b_{-2}, c_{-2}), (a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}), (a_0, b_0, c_0), \\ (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \dots$$

Согласно формулам (9) и (10) каждые две смежные формы

$$(a_\mu, b_\mu, c_\mu) = a_\mu x_\mu^2 + 2b_\mu x_\mu y_\mu + c_\mu y_\mu^2,$$

$$(a_{\mu+1}, b_{\mu+1}, c_{\mu+1}) = a_{\mu+1} x_{\mu+1}^2 + 2b_{\mu+1} x_{\mu+1} y_{\mu+1} + c_{\mu+1} y_{\mu+1}^2$$

ряда F могут быть получены одна из другой при помощи подстановок

$$\begin{aligned} x_\mu &= a_\mu x_{\mu+1} + y_{\mu+1}, \\ y_\mu &= x_{\mu+1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Следовательно, (a_μ, b_μ, c_μ) и $(a_{\mu+1}, b_{\mu+1}, c_{\mu+1})$ эквивалентны между собой и

$$a_\mu = c_{\mu+1}. \quad (16)$$

А на основании равенств (7), (8), (13) и (14) мы можем утверждать, что корни уравнения

$$a_\mu \xi^2 + 2b_\mu \xi + c_\mu = 0$$

равны

$$\alpha_\mu + \frac{1}{\alpha_{\mu+1} + \frac{1}{\alpha_{\mu+2} + \dots}} \quad \text{и} \quad \frac{-1}{\alpha_{\mu-1} + \frac{1}{\alpha_{\mu-2} + \frac{1}{\alpha_{\mu-3} + \dots}}},$$

и их разность, т. е. $2 \frac{\sqrt{D}}{(a_\mu)}$,* равна

$$\alpha_\mu + \frac{1}{\alpha_{\mu+1} + \frac{1}{\alpha_{\mu+2} + \dots}} - \frac{1}{\alpha_{\mu-1} + \frac{1}{\alpha_{\mu-2} + \frac{1}{\alpha_{\mu-3} + \dots}}}.$$

Отсюда следует, что (a_μ, b_μ, c_μ) — форма приведенная.

* Количеством, заключенным в скобки, мы изображаем абсолютную величину этого количества.

Итак, все формы ряда F эквиваленты между собой и принадлежат к числу приведенных.

Из формул (15) и найденных нами выражений корней уравнения

$$a_{\mu}\xi^2 + 2b_{\mu}\xi + c_{\mu} = 0,$$

кроме того, следует, что мы получим тот же самый ряд F , если вместо (a_0, b_0, c_0) возьмем произвольную форму $(a_{\mu}, b_{\mu}, c_{\mu})$ ряда F и для нее по тому же способу составим ряд эквивалентных форм.

§ 3. Пусть

$$(a^1, b^1, c^1) = a^1 x^2 + 2b^1 xy + c^1 y^2$$

будет какая-нибудь приведенная форма, эквивалентная (a_0, b_0, c_0) .

Тогда некоторая подстановка

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha x + \beta y, \\ y_0 &= \gamma x + \delta y, \end{aligned} \tag{17}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — целые числа и

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1 \tag{18}$$

преобразует (a_0, b_0, c_0) в (a^1, b^1, c^1) .

В простейшем случае, когда $\beta\gamma = 0$, нетрудно убедиться, что (a^1, b^1, c^1) совпадает с одной из следующих трех форм:

$$\begin{aligned} a_0 x^2 + 2b_0 xy + c_0 y^2, \\ c_1 x^2 - 2b_1 xy + a_1 y^2, \\ c_{-1} x^2 - 2b_{-1} xy + a_{-1} y^2. \end{aligned}$$

Если же $\alpha\delta = 0$, то форма (a^1, b^1, c^1) совпадает с одной из следующих трех:

$$1) \quad \xi_0 = \varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_{h-1} + \frac{1}{\varepsilon_h + \xi_1}}} \quad \text{и} \quad \frac{-1}{\eta_0} = \varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_{h-1} + \frac{1}{\varepsilon_h - \frac{1}{\eta_1}}}} ;$$

$$2) \quad \xi_0 = \varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_{h-1} + \frac{1}{\varepsilon_h - \xi_1}}} \quad \text{и} \quad \frac{-1}{\eta_0} = \varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_{h-1} + \frac{1}{\varepsilon_h + \frac{1}{\eta_1}}}} ;$$

$$3) \quad -\xi_0 = \varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_{h-1} + \frac{1}{\varepsilon_h + \xi_1}}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\eta_0} = \varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_{h-1} + \frac{1}{\varepsilon_h - \frac{1}{\eta_1}}}} ;$$

$$4) \quad -\xi_0 = \varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_{h-1} + \frac{1}{\varepsilon_h - \xi_1}}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\eta_0} = \varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_{h-1} + \frac{1}{\varepsilon_h + \frac{1}{\eta_1}}}} ;$$

$$5) \quad \xi_0 = \varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_{h-1} + \frac{1}{\varepsilon_h + \frac{1}{\eta_1}}}} \quad \text{и} \quad \frac{-1}{\eta_0} = \varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_{h-1} + \frac{1}{\varepsilon_h - \xi_1}}} ;$$

$$\begin{aligned}
6) \quad \xi_0 &= \varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_{h-1} + \frac{1}{\varepsilon_h - \frac{1}{\eta^1}}}} \quad \text{и} \quad \frac{-1}{\eta_0} = \varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_{h-1} + \frac{1}{\varepsilon_h + \frac{1}{\xi^1}}}}; \\
7) \quad -\xi_0 &= \varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_{h-1} + \frac{1}{\varepsilon_h + \frac{1}{\eta^1}}}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\eta_0} = \varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_{h-1} + \frac{1}{\varepsilon_h - \frac{1}{\xi^1}}}}; \\
8) \quad -\xi_0 &= \varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_{h-1} + \frac{1}{\varepsilon_h - \frac{1}{\eta^1}}}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\eta_0} = \varepsilon_0 + \frac{1}{\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_{h-1} + \frac{1}{\varepsilon_h + \frac{1}{\xi^1}}}}. \quad (19)
\end{aligned}$$

Относительно ε_0 и ε_h можно сделать только четыре предположения:

- I. $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_h > 0$; II. $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_h = 0$; III. $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_h = 0$;
IV. $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_h > 0$.

Каждое из этих предположений мы рассмотрим отдельно.

I. $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_h > 0$.

Принимая во внимание неравенства

$$\xi_0 > 1, \eta_0 > 1, \xi^1 > 1, \eta^1 > 1,$$

легко убедиться, что из всех систем уравнений (19) можно допустить только пятую

следовательно

$$\varepsilon_1 = \alpha_{-1}, \dots, \varepsilon_{-1} = \alpha_{-h+1},$$

и форма (a^1, b^1, c^1) может быть выведена из формы $(a_{-h+1}, b_{-h+1}, c_{-h+1})$ ряда F при помощи подстановки

$$x_{-h+1} = \pm y, \quad y_{-h+1} = \mp x.$$

IV. $\varepsilon_0 = 0, \varepsilon_h > 0$.

Будем иметь

$$-\xi_0 = \frac{1}{\varepsilon_1 + \dots + \frac{1}{\varepsilon_{h-1} + \frac{1}{\varepsilon_h - \xi_1}}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\eta_0} = \frac{1}{\varepsilon_1 + \dots + \frac{1}{\varepsilon_{h-1} + \frac{1}{\varepsilon_h + \frac{1}{\eta_1}}}},$$

поэтому

$$\varepsilon_1 = \alpha_{-1}, \quad \varepsilon_2 = \alpha_{-2}, \dots, \quad \varepsilon_{h-1} = \alpha_{-h+1}, \quad \varepsilon_h = \alpha_{-h},$$

и форма (a^1, b^1, c^1) отличается от формы (a_{-h}, b_{-h}, c_{-h}) ряда F только в обозначении переменных.

Итак, не обращая внимания на обозначения переменных, мы можем утверждать, что все приведенные формы, эквивалентные данной (a_0, b_0, c_0) , заключаются в одном из рядов

$$\dots, (a_{-2}, b_{-2}, c_{-2}), (a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}), (a_0, b_0, c_0), \\ (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \dots \quad F$$

и

$$\dots, (c_{-2}, -b_{-2}, a_{-2}), (c_{-1}, -b_{-1}, a_{-1}), (c_0, -b_0, a_0), \\ (c_1, -b_1, a_1), (c_2, -b_2, a_2), \dots \quad F_1^*$$

§ 4. В частном случае, когда

$$(a_0, b_0, c_0) = a_0 \begin{pmatrix} x_0 - y_0 - \frac{y_0}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + \frac{y_0}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \end{pmatrix} =$$

* Gauss. Disquisitiones arithmeticae, § 193.

$$= a_0 \left(x_0 - \frac{\sqrt{5}+1}{2} y_0 \right) \left(x_0 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} y_0 \right) =$$

$$= a_0 (x_0^2 - x_0 y_0 - y_0^2),$$

коэффициенты a_μ , b_μ , c_μ какой угодно формы (a_μ, b_μ, c_μ) из ряда F соответственно равны

$$(-1)^\mu \cdot a_0, \quad (-1)^{\mu+1} \cdot \frac{a_0}{2}, \quad (-1)^{\mu+1} \cdot a_0,$$

и наименьшее численное значение формы (a_0, b_0, c_0) равно

$$(a_0) = \sqrt{\frac{4}{5} D}.$$

Во всех прочих случаях одно, по крайней мере, из чисел

$$\dots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$$

более двух.

На этом основании, принимая во внимание замечание, сделанное в конце § 2, мы будем считать

$$\xi_0 > 2;$$

Кроме того, имеем

$$\varphi_0 = (a_0, b_0, c_0) = a_0 (x_0 - \xi_0 y_0) \left(x_0 + \frac{y_0}{\eta_0} \right). \quad (20)$$

А относительно x_0 и y_0 можно сделать только следующие четыре предположения:

- 1) $x_0 = 0$ и y_0 не нуль;
- 2) x_0 не нуль и $y_0 = 0$;
- 3) x_0 и y_0 оба не равны нулю и $\frac{x_0}{y_0} > 0$;
- 4) x_0 и y_0 оба не равны нулю и $\frac{x_0}{y_0} < 0$.

Каждое из этих четырех предположений мы рассмотрим отдельно.

- 1) $x_0 = 0$.

Форма (a_0, b_0, c_0) получает значение

$$c_0 y_0^2,$$

которое, согласно формуле (16), равно

$$a_{-1} y_0^2.$$

2) $y_0 = 0$.

Форма (a_0, b_0, c_0) обращается в

$$a_0 x_0^2.$$

3) $\frac{x_0}{y_0} > 0$.

Из формулы (20) следует, что неравенство

$$(\varphi_0) \leq (a_0)$$

может иметь место только при

$$(x_0 - \xi_0 y_0) < 1,$$

так как

$$\left(x_0 + \frac{y_0}{\eta_0}\right) > 1.$$

Но при

$$(x_0 - \xi_0 y_0) < 1$$

условие

$$\xi_0 > 2$$

дает

$$\left(x_0 + \frac{y_0}{\eta_0}\right) > 2(y_0).$$

Отсюда, принимая снова во внимание формулу (20), выводим, что

$$(x_0 - \xi_0 y_0) < \frac{1}{2(y_0)}$$

всякий раз, когда

$$(\varphi_0) \leq (a_0).$$

А неравенство

$$(x_0 - \xi_0 y_0) < \frac{1}{2(y_0)},$$

показывает, что $\frac{x_0}{y_0}$ равно одной из дробей, подходящих к ξ_0 .*

Между тем, полагая $\frac{x_0}{y_0}$ равным последовательно

$$\alpha_0, \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1}, \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}}, \dots,$$

получим для формы (a_0, b_0, c_0) следующие значения

$$a_1 i^2, a_2 i^2, a_3 i^2, \dots,$$

где i — общий наибольший делитель x_0 и y_0 .

$$4) \frac{x_0}{y_0} < 0.$$

Из формулы (20) следует, что неравенство

$$(\varphi_0) \leq (a_0)$$

может иметь место только при

$$\left(x_0 + \frac{y_0}{\eta_0}\right) < \frac{1}{2(y_0)},$$

так как

$$(x_0 - \xi_0 y_0) > 2(y_0).$$

А из неравенства

$$\left(x_0 + \frac{y_0}{\eta_0}\right) < \frac{1}{2(y_0)}$$

следует, что $\frac{-x_0}{y_0}$ равно одной из дробей, подходящих к $\frac{1}{\eta_0}$.

Между тем, полагая $\frac{-x_0}{y_0}$ последовательно равным

$$\frac{1}{\alpha_{-1}}, \frac{1}{\alpha_{-1} + \frac{1}{\alpha_{-2}}}, \frac{1}{\alpha_{-1} + \frac{1}{\alpha_{-2} + \frac{1}{\alpha_{-3}}}}, \dots$$

* Legendre. Essai sur la théorie des nombres. Seconde édition, § 1 (9).

и принимая во внимание формулу (16), получим для формы (a_0, b_0, c_0) следующие значения:

$$a_{-2}i^2, a_{-3}i^2, a_{-4}i^2, \dots,$$

где i равно общему наибольшему делителю x_0 и y_0 .

Следовательно, форма

$$(a_0, b_0, c_0) = a_0 x_0^2 + 2b_0 x_0 y_0 + c_0 y_0^2$$

может быть сделана равной какому угодно из чисел

$$\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots$$

и наименьшее численное значение ее равно наименьшему из чисел

$$\dots, (a_{-2}), (a_{-1}), (a_0), (a_1), (a_2), \dots$$

А для вычисления чисел (a_μ) мы получили в § 2 следующую формулу:

$$\frac{2\sqrt{D}}{(a_\mu)} = a_\mu + \frac{1}{a_{\mu+1} + \frac{1}{a_{\mu+2} + \frac{1}{a_{\mu-1} + \frac{1}{a_{\mu-2} + \dots}}}}$$

Итак, всякой форме (a_0, b_0, c_0) , определитель которой равен данному положительному числу D ,

$$а \left\{ \begin{array}{l} \text{наименьшее численное значение равно} \\ \text{численные значения не могут быть меньше} \end{array} \right\} l\sqrt{D},$$

где l также данное число, соответствует некоторый определенный ряд целых положительных чисел

$$\dots, \alpha_{-3}, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots,$$

/

для которого $\left\{ \begin{array}{l} \text{maximum суммы} \\ \text{сумма} \end{array} \right\}$

$$\alpha_\mu + \frac{1}{\alpha_{\mu+1} + \frac{1}{\alpha_{\mu+2} + \dots}} + \frac{1}{\alpha_{\mu-1} + \frac{1}{\alpha_{\mu-2} + \dots}} = \frac{2}{L_\mu} \quad (21)$$

для всех целых значений μ $\left\{ \begin{array}{l} \text{равен} \\ \text{не более} \end{array} \right\} \frac{2}{l}$.

Из рассуждений §§ 2 и 3, кроме того, следует, что всякой форме (a^1, b^1, c^1) , эквивалентной (a_0, b_0, c_0) , соответствует или тот же самый ряд J , или ряд обратный

$$\dots, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, \alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \alpha_{-3}, \dots$$

С другой стороны, зная ряд J и определитель D , мы легко можем составить одну из форм ряда F .

Для этой цели достаточно взять какие-нибудь две непрерывные дроби

$$\alpha_\mu + \frac{1}{\alpha_{\mu+1} + \frac{1}{\alpha_{\mu+2} + \dots}} \quad \text{и} \quad \alpha_{\mu-1} + \frac{1}{\alpha_{\mu-2} + \frac{1}{\alpha_{\mu-3} + \dots}}$$

тогда форма (мы не обращаем внимания на обозначения переменных)

$$L_\mu \sqrt{D} \left\{ x - a_\mu y - \frac{y}{\alpha_{\mu+1} + \frac{1}{\alpha_{\mu+2} + \dots}} \right\} \left\{ x + \frac{y}{\alpha_{\mu-1} + \frac{1}{\alpha_{\mu-2} + \dots}} \right\}$$

будет, очевидно, принадлежать к соответствующему ряду F .

На этом основании в дальнейших рассуждениях мы почти исключительно будем говорить о рядах J и о связанных с ними количествах L_μ .

§ 5. Мы займемся теперь разысканием рядов J , для которых при всех целых значениях μ

$$L_\mu \geq \frac{2}{3}.$$

Прежде всего, заметим, что такие ряды J должны состоять только из двоек и единиц, так как при

$$\alpha_\mu \geq 3$$

формула (21) дает

$$\frac{2}{L_\mu} > 3 \quad \text{и} \quad L_\mu < \frac{2}{3}.$$

Кроме того, они не могут содержать ни отдельных двоек, ни отдельных единиц, так как при

$$\alpha_{\mu-1} = 1, \quad \alpha_\mu = 2, \quad \alpha_{\mu+1} = 1$$

имеем

$$\frac{2}{L_\mu} > 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 \quad \text{и} \quad L_\mu < \frac{2}{3},$$

подобным же образом при

$$\alpha_{\mu-1} < 3, \quad \alpha_\mu = 2, \quad \alpha_{\mu+1} = 1, \quad \alpha_{\mu+2} = 2$$

получаем

$$\frac{2}{L_\mu} > 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} = 3 \quad \text{и} \quad L_\mu < \frac{2}{3}.$$

Пусть теперь

$$\alpha_{\mu-1} = 2, \quad \alpha_\mu = 2, \quad \alpha_{\mu+1} = 1, \quad \alpha_{\mu+2} = 1.$$

Сохраняя обозначения § 2, находим

$$\frac{2}{L_\mu} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\xi_{\mu+3}}}} + \frac{1}{2 + \frac{1}{\eta_{\mu-1}}}$$

и

$$\frac{2}{L_{\mu-1}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\xi_{\mu+3}}}}} + \frac{1}{\eta_{\mu-1}}.$$

Затем, принимая во внимание тождество*

* Lagrange. Traité de la résolution des équations. 1826, Chapitre VI, § 68.

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{g}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{g}}} = 1,$$

легко убеждаемся, что условия

$$L_{\mu} \geq \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad L_{\mu-1} \geq \frac{2}{3}$$

равносильны следующим:

$$\xi_{\mu+3} \geq \eta_{\mu-1} \quad \text{и} \quad \eta_{\mu-1} \geq 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\xi_{\mu+3}}}}}, \quad (22)$$

а эти последние условия дают

$$\xi_{\mu+3} \geq 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\xi_{\mu+3}}}}} \quad \text{и} \quad \eta_{\mu-1} \geq 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\eta_{\mu-1}}}}} \quad (23)$$

В частном случае, когда одно из условий (23) удовлетворяется со знаком $=$, условия (22) могут быть удовлетворены только со знаком $=$ и дают

$$\xi_{\mu+3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\xi_{\mu+3}}}}} = \eta_{\mu-1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\eta_{\mu-1}}}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

следовательно и другое из условий (23) удовлетворяется со знаком $=$.

Во всех прочих случаях на основании неравенств (23) будем иметь

$$\begin{aligned}
\xi_{\mu+3} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}} , \\
&\quad \vdots \\
&\quad \vdots + \frac{1}{1 + \frac{1}{\xi_{\mu+2r+1}}} > 2 \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{2(r-1)} \\
\eta_{\mu-1} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}} , \\
&\quad \vdots \\
&\quad \vdots + \frac{1}{1 + \frac{1}{\eta_{\mu-2r^1-1}}} > 2 \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{2r^1} \\
\xi_{\mu+1} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}} , \\
&\quad \vdots \\
&\quad \vdots + \frac{1}{1 + \frac{1}{\xi_{\mu+2r+1}}} > 2 \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{2r}
\end{aligned} \tag{24}^*$$

где r и r^1 — целые положительные числа (r^1 может быть равно и нулю).

А неравенства (22) могут иметь место только в следующих трех случаях:

$$\begin{aligned}
&1) \ r = r^1 + 1 \quad \text{и} \quad \xi_{\mu+2r+1} \geq \eta_{\mu-2r^1-1}; \\
&2) \ r = r^1; \\
&3) \ r = r^1 - 1 \quad \text{и} \quad \xi_{\mu+2r+1} \leq \eta_{\mu-2r^1-1}.
\end{aligned} \tag{25}$$

* Формулами (24) мы хотим выразить, что в непрерывных дробях $\xi_{\mu+3}$, $\eta_{\mu-1}$, $\xi_{\mu+1}$ соответственно $2(r-1)$, $2r^1$, $2r$ первых частных знаменателей равны 1 и непосредственно следующие более 1.

И действительно, в каждом из этих случаев L_μ и $L_{\mu-1}$ не меньше $\frac{2}{3}$.

Пусть теперь

$$r^1 = 0.$$

В этом случае, принимая во внимание формулы (24) и условия (25), будем иметь

$$\eta_{\mu-1} > 2, \quad r = 1,$$

$$\xi_{\mu+3} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\xi_{\mu+5}}}, \quad \eta_{\mu+3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\eta_{\mu-1}}}}}$$

и, следовательно,

$$\frac{2}{L_{\mu+3}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\xi_{\mu+5}}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\eta_{\mu-1}}}}}}$$

Последнее равенство в связи с тождеством

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{g}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{g}}} = 1$$

показывает, что условие

$$L_{\mu+3} \geq \frac{2}{3}$$

при сделанных нами предположениях равносильно следующему:

$$\xi_{\mu+5} \leq 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\eta_{\mu-1}}} \quad (26)$$

Сопоставляя затем неравенства (22) с (26) и принимая во внимание соотношение

$$\xi_{\mu+3} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\xi_{\mu+5}}},$$

получаем

$$\xi_{\mu+3} \leq 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\xi_{\mu+3}}}}} \quad \text{и} \quad \eta_{\mu-1} \leq 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\eta_{\mu-1}}}}}.$$

Поэтому

$$\xi_{\mu+3} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\xi_{\mu+3}}}}} = 1 + \sqrt{2} = \eta_{\mu-1},$$

или

$$\xi_{\mu+3} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\xi_{\mu+2\rho+3}}}}}}}} < 2$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{2\rho}$

и

$$\eta_{\mu-1} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\eta_{\mu-2\rho^1-1}}}}}}}} < 2$$

где ρ и ρ^1 — целые числа.

и для второго

$$\frac{2}{L_\mu} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} = 2\sqrt{2}.$$

Ряды J_∞ и J^∞ также дают

$$L_\mu \geq \frac{2}{3}$$

при всех значениях μ .

Кроме того, легко видеть, что для этих последних рядов наименьшее значение L_μ равно $\frac{2}{3}$, так как

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = 3$$

и

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} = 3.$$

Одна из форм (a, b, c) , соответствующих ряду J^∞ , будет

$$\frac{2}{3}\sqrt{D} \left(x - 2y - \frac{y}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \right) \left(x + \frac{y}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} \right),$$

т. е

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \sqrt{D} \left(x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} y \right) \left(x + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} y \right) = \\ = \frac{2}{3} \sqrt{D} (x^2 - \sqrt{5}xy - y^2). \end{aligned}$$

Таким образом мы получили одну из форм (a, b, c) , определитель которых равен данному положительному числу D , а наименьшее численное значение равно $\frac{2}{3} \sqrt{D}$.

Подобным же образом при помощи ряда J^∞ получим другую форму:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \sqrt{D} \left\{ x - (1 + \sqrt{2})y \right\} \left\{ x + \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} y \right\} = \\ = \frac{2}{8} \sqrt{D} (x^2 - (2\sqrt{2} - 1)xy - \sqrt{2}y^2), \end{aligned}$$

которая не эквивалентна прежней и имеет тот же определитель D и то же наименьшее значение $\frac{2}{3} \sqrt{D}$.

Что же касается ряда J^1 , то из предыдущих рассуждений следует, что он может удовлетворять условиям вопроса только в том случае, когда ряд

$$\dots, r_{-3}, r_{-2}, r_{-1}, r_0, r_1, r_2, r_3, \dots \quad R$$

обладает следующими тремя свойствами:

1) разности

$$\dots, r_{-3} - r_{-2}, r_{-2} - r_{-1}, r_{-1} - r_0, r_0 - r_1, r_1 - r_2, r_2 - r_3, \dots,$$

могут иметь только три значения $+1, 0, -1$;

2) если для некоторого значка k

$$r_k - r_{k+1} = +1,$$

то первая неравная нулю из разностей

$$r_{k+2} - r_{k-1}, r_{k+3} - r_{k-2}, r_{k+4} - r_{k-3}, \dots$$

более нуля;

3) если для некоторого значка k

$$r_k - r_{k+1} = -1,$$

то первая неравная нулю из разностей

$$r_{k+2} - r_{k-1}, r_{k+3} - r_{k-2}, r_{k+4} - r_{k-3}, \dots$$

менее нуля.*

Положим теперь, что ряд R , действительно, обладает этими свойствами.

В таком случае по доказанному будем иметь

$$L_\mu \geq \frac{2}{3} \text{ и } L_{\mu-1} \geq \frac{2}{3}$$

всякий раз, когда

$$\alpha_{\mu-1} = 2, \alpha_\mu = 2, \alpha_{\mu+1} = 1, \alpha_{\mu+2} = 1.$$

Подобным же образом нетрудно доказать, что

$$L_\mu \geq \frac{2}{3} \text{ и } L_{\mu+1} \geq \frac{2}{3},$$

если

$$\alpha_{\mu-2} = 1, \alpha_{\mu-1} = 1, \alpha_\mu = 2, \alpha_{\mu+1} = 2.$$

Следовательно, неравенство

$$L_\mu \geq \frac{2}{3}$$

имеет место во всех случаях, когда

$$\alpha_{\mu-1} = 2, \alpha_\mu = 2, \alpha_{\mu+1} = 1$$

или

$$\alpha_{\mu-1} = 1, \alpha_\mu = 2, \alpha_{\mu+1} = 2.$$

* Не должно исключать случаев, когда $r_k - r_{k+1} = \pm 1$ и $r_{k+1+\lambda} = r_{k-\lambda}$ при всех положительных значениях λ .

Во всех же прочих случаях

$$\alpha_{\mu} = 1$$

или

$$\alpha_{\mu-1} = 2, \quad \alpha_{\mu} = 2, \quad \alpha_{\mu+1} = 2$$

и формула (21) непосредственно дает

$$\frac{2}{L_{\mu}} < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3,$$

откуда затем

$$L_{\mu} > \frac{2}{3}.$$

Итак, высказанные нами условия для ряда R не только необходимы, но и достаточны.

Вследствие этих условий абсолютная величина разности двух производных чисел ряда R не может быть более единицы.

Для доказательства допустим противное, и пусть именно в ряду R встречаются одновременно числа

$$r \text{ и } r^1 \leq r - 2.$$

Тогда в том же ряду должна быть, согласно первому свойству, одна из комбинаций

$$r, \underbrace{r-1}_s, r-2 \quad A$$

и

$$r-2, \underbrace{r-1}_s, r, \quad A'$$

где s — некоторое положительное число.

Непосредственно налево от комбинации A , согласно второму свойству, может находиться только комбинация

$$r-2, \underbrace{r-1}_{s-q}, \quad B$$

где q заключается между нулем и s ; а непосредственно направо от A^1 , согласно третьему свойству, должна стоять комбинация

$$\underbrace{r-1}_{s-q}, \quad r-2. \quad B^1$$

Следовательно, при сделанном нами допущении в ряду R должна встретиться одна из комбинаций

$$r-2, \quad \underbrace{r-1}_{s-q}, \quad r, \quad \underbrace{r-1}_s, \quad r-2 \quad C$$

и

$$r-2, \quad \underbrace{r-1}_s, \quad r, \quad \underbrace{r-1}_{s-q}, \quad r-2. \quad C^1$$

из которых C противуречит третьему свойству ряда R , а C^1 — второму.

Итак, указанными нами свойствами могут обладать только следующие ряды R :

$$\begin{aligned} & \dots, r^0, r^0, r^0, r^0, r^0, r^0, r^0, r^0, r^0, r^0, r^0, \dots, & R^1 \\ & \dots, r^0-1, r^0-1, r^0-1, r^0, r^0-1, r^0-1, & R^\infty \\ & \quad r^0-1, \dots, & \\ & \dots, r^0, r^0, r^0, r^0, r^0, r^0-1, r^0, r^0, r^0, r^0, r^0, \dots, & R^\infty \\ & \dots, \underbrace{r^0-1}_{s_{-2}}, r^0, \underbrace{r^0-1}_{s_{-1}}, r^0, \underbrace{r^0-1}_{s_0}, & \\ & \quad r^0, \underbrace{r^0-1}_{s_1}, r^0, \underbrace{r^0-1}_{s_2}, \dots, & R^1 \end{aligned}$$

где

$$r^0 = \text{maximum } r_k$$

и из чисел

$$\dots, s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, s_3, \dots$$

одно, по крайней мере, не нуль.

Ряды R_1 , R_∞ и R^∞ обладают действительно указанными тремя свойствами.

Следовательно, весь вопрос сводится теперь на исследование свойств ряда чисел

$$\dots, s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, s_3, \dots \quad S$$

И легко видеть, что разности

$$\dots, s_{-3} - s_{-2}, s_{-2} - s_{-1}, s_{-1} - s_0, s_0 - s_1, s_1 - s_2, s_2 - s_3, \dots$$

могут иметь только три значения: $+1, 0, -1$.

Кроме того, на основании второго свойства ряда R мы можем утверждать, что если при некотором значке k

$$s_k - s_{k+1} = -1,$$

то первая неравная нулю из разностей

$$s_{k+2} - s_{k-1}, s_{k+3} - s_{k-2}, s_{k+4} - s_{k-3}, \dots$$

менее нуля.

А на основании третьего свойства ряда R первая неравная нулю из разностей

$$s_{k+2} - s_{k-1}, s_{k+3} - s_{k-2}, s_{k+4} - s_{k-3}, \dots$$

более нуля всякий раз, когда

$$s_k - s_{k+1} = +1.$$

Одним словом, ряд S должен удовлетворять тем же условиям, какие нами были указаны и для ряда R .

Итак, он должен быть одним из следующих рядов:

$$\begin{aligned} &\dots, s^0, s^0, s^0, s^0, s^0, s^0, s^0, s^0, s^0, s^0, s^0, s^0, \dots, & S^1 \\ &\dots, s^0 - 1, s^0 - 1, s^0 - 1, s^0, s^0 - 1, s^0 - 1, & S^\infty \\ &\quad s^0 - 1, \dots, \\ &\dots, s^0, s^0, s^0, s^0, s^0, s^0, s^0 - 1, s^0, s^0, s^0, s^0, s^0, \dots, & S^\alpha \\ &\quad \dots, \underbrace{s^0 - 1}_{t_{-2}}, s^0, \underbrace{s^0 - 1}_{t_{-1}}, s^0, \underbrace{s^0 - 1}_{t_0}, s^0, \\ &\quad \underbrace{s^0 - 1}_{t_1}, s^0, \underbrace{s^0 - 1}_{t_2}, \dots, & S' \end{aligned}$$

где

$$s^0 = \text{maximum } s_k$$

и ряд

$$\dots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots \quad T$$

обладает упомянутыми выше свойствами рядов R и S .

Подобные рассуждения можно продолжать как угодно далеко, и все получаемые таким образом ряды

$$R, S, T, \dots \quad (\Phi)$$

должны удовлетворять указанным нами условиям.

С другой стороны, легко видеть, что если один из рядов системы (Φ) удовлетворяет этим условиям, то и все предыдущие удовлетворяют им и для соответствующего ряда J количество L_μ более $\frac{2}{3}$ при всех значениях μ .

§ 6. Остановимся прежде всего на случае, когда один из рядов (Φ) состоит только из равных чисел.

Тогда предыдущие ряды (Φ) , а также и ряд J^1 , периодичны.

Кроме того, нетрудно убедиться, что всякий раз, когда

$$\alpha_{\mu-1} = 2, \quad \alpha_\mu = 2, \quad \alpha_{\mu+1} = 1, \quad \alpha_{\mu+2} = 1$$

число $2j$ последовательных равенств

$$\alpha_{\mu-2} = \alpha_{\mu+3}, \quad \alpha_{\mu-3} = \alpha_{\mu+4}, \quad \dots, \quad \alpha_{\mu-(2j+1)} = \alpha_{\mu+(2j+2)}$$

должно быть меньше числа членов в периоде ряда J .

Следовательно, L_μ имеет только конечное число различных значений и все эти значения более $\frac{2}{3}$.*

* Легко убедиться, что L_μ может быть равно $\frac{2}{3}$ только в тех случаях, когда все числа

$$\alpha_{\mu-2}, \quad \alpha_{\mu-3}, \quad \alpha_{\mu-4}, \quad \dots$$

соответственно равны

$$\alpha_{\mu+3}, \quad \alpha_{\mu+4}, \quad \alpha_{\mu+5}, \quad \dots,$$

иначе сказать, когда число $2j$ может быть назначено более всякой данной величины.

Итак, можно найти бесчисленное множество рядов J , для каждого из которых наименьшее значение L_μ более $\frac{2}{3}$.

Отсюда, принимая во внимание результаты § 4, мы заключаем, что существует бесчисленное множество классов* форм (a, b, c) , из которых для каждой определитель равен одному, и тому же положительному числу D , а наименьшее численное значение более $\frac{2}{3}\sqrt{D}$.

Положим теперь, что один из рядов (Φ) будет

$$\dots, \delta, \delta, \delta, \delta, \delta, \delta, \delta \pm 1, \delta, \delta, \delta, \delta, \delta, \dots,$$

где δ — произвольное целое положительное число.

При этом предположении все предыдущие ряды совокупности будут следующего вида:

$$\dots, \omega_4, \omega_3, \omega_2, \omega_1, \omega, \omega \pm 1, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots$$

Что же касается ряда J^1 , то для него при некотором значке μ

$$\alpha_{\mu+1} = 2, \quad \alpha_\mu = 2, \quad \alpha_{\mu-1} = 1, \quad \alpha_{\mu-2} = 1$$

и количества

$$\alpha_{\mu+2}, \quad \alpha_{\mu+3}, \quad \alpha_{\mu+4}, \dots$$

соответственно равны

$$\alpha_{\mu-3}, \quad \alpha_{\mu-4}, \quad \alpha_{\mu-5}, \dots,$$

откуда, принимая во внимание тождество

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{g}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{g}}} = 3,$$

* Все эквивалентные между собой формы мы соединяем в один класс.
C. Gauss. Disquisitiones arithmeticae, § 175.

ВЫВОДИМ

$$\alpha_\mu + \frac{1}{\alpha_{\mu+1} + \frac{1}{\alpha_{\mu+2} + \frac{1}{\alpha_{\mu+3} + \dots}}} + \frac{1}{\alpha_{\mu-1} + \frac{1}{\alpha_{\mu-2} + \frac{1}{\alpha_{\mu-3} + \dots}}} = 3.$$

Следовательно, в этом случае

$$\max. \frac{2}{L_\mu} = 3 \text{ и } \min. L_\mu \frac{2}{3}.$$

Итак, можно найти бесчисленное множество рядов J , для каждого из которых

$$\min. L_\mu = \frac{2}{3}.$$

Другими словами, существует бесчисленное множество классов форм (a, b, c) , для каждой из которых определитель равен одному и тому же положительному числу D , а наименьшее численное значение равно $\frac{2}{3} \sqrt{D}$.

§. 7. Будем теперь между всеми рядами J^1 искать те, для которых при всех значениях μ

$$L_\mu \geq l,$$

где l — данное число и больше $\frac{2}{3}$.

Пусть в искомом ряду J^1 при некотором значении μ

$$\alpha_{\mu+1} = 2, \quad \alpha_\mu = 2, \quad \alpha_{\mu-1} = 1, \quad \alpha_{\mu-2} = 1$$

и

$$\alpha_{\mu+2} = \alpha_{\mu+3}, \quad \alpha_{\mu+3} = \alpha_{\mu+4}, \quad \dots, \quad \alpha_{\mu+(2j+1)} = \alpha_{\mu+(2j+2)}.$$

Тогда

$$3 - \frac{2}{L_\mu} < 1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{\alpha_{\mu+2} + \frac{1}{\alpha_{\mu+3} + \dots + \frac{1}{\alpha_{\mu+2j} + \frac{1}{\alpha_{\mu+(2j+1)}}}}}} -$$

$$- \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha_{\mu+2} + \dots + \frac{1}{\alpha_{\mu+2j} + \frac{1}{\alpha_{\mu+(2j+1)}}}}}},$$

откуда, принимая во внимание тождество

$$1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{\alpha_{\mu+2} + \frac{1}{\alpha_{\mu+3} + \dots + \frac{1}{\alpha_{\mu+2j} + \frac{1}{\alpha_{\mu+(2j+1)}}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha_{\mu+2} + \frac{1}{\alpha_{\mu+3} + \dots + \frac{1}{\alpha_{\mu+2j} + \frac{1}{\alpha_{\mu+(2j+1)}}}}} + \frac{1}{\alpha_{\mu+2j}} + \frac{1}{\alpha_{\mu+2j}}}$$

и условие

$$L_\mu \geq l,$$

выводим

$$3 - \frac{2}{l} < \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha_{\mu+2} + \frac{1}{\alpha_{\mu+3} + \dots + \frac{1}{\alpha_{\mu+2j} + \frac{1}{\alpha_{\mu+(2j+1)}}}}} + \frac{1}{\alpha_{\mu+2j}} + \frac{1}{\alpha_{\mu+2j}}}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha_{\mu+2} + \dots}}} \\
& \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{\alpha_{\mu+2j} + \frac{1}{\alpha_{\mu+(2j+1)}}}
\end{aligned}$$

Но, с другой стороны, из теории непрерывных дробей известно, что каковы бы ни были целые положительные числа

$$\alpha_{\mu+2}, \quad \alpha_{\mu+3}, \dots, \quad \alpha_{\mu+2j}, \quad \alpha_{\mu+(2j+1)},$$

разность

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha_{\mu+2} + \frac{1}{\alpha_{\mu+3} + \dots}}}} \\
& \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{\alpha_{\mu+2j}} \\
& - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha_{\mu+2} + \frac{1}{\alpha_{\mu+3} + \dots}}}} \\
& \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{\alpha_{\mu+2j} + \frac{1}{\alpha_{\mu+(2j+1)}}}
\end{aligned}$$

не больше

$$\underbrace{\begin{array}{c} \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}}_{2j+1} - \underbrace{\begin{array}{c} \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} \end{array}}_{2j+2},$$

а эта последняя разность при всех значениях j , превышающих некоторый определенный предел j^1 , менее данной величины $3 - \frac{2}{l}$.

Следовательно, обозначая через j_0 наибольшее значение числа j для искомого ряда J^1 , будем иметь

$$j_0 < j^1.$$

Кроме того, нетрудно убедиться, что при

$$r_k - r_{k+1} = \pm 1$$

число ρ последовательных равенств

$$r_{k-1} = r_{k+2}, \quad r_{k-2} = r_{k+3}, \quad \dots, \quad r_{k-\rho} = r_{k+\rho+1}$$

должно удовлетворять условию

$$(\rho + 2)r^0 \leq j_0 + 1.$$

На этом основании, обозначая через ρ_0 наибольшее значение ρ , а через

$$\sigma_0, \tau_0, \dots$$

количества, которые зависят соответственно от рядов

$$S, T, \dots$$

таким же образом, как ρ_0 от R , будем иметь

$$\begin{aligned} j_0 &\leq j^1, \\ (\rho_0 + 2) r^0 &\leq j_0 + 1, \\ (\sigma_0 + 2) s^0 &\leq \rho_0 + 1, \\ (\tau_0 + 2) t^0 &\leq \sigma_0 + 1, \\ &\dots \end{aligned} \quad (27)$$

Эти неравенства показывают, что в совокупности (Ф) можно найти ряд

$$\dots, w^0, w^0, w^0, w^0, w^0, \dots, \quad W$$

состоящий только из равных целых положительных чисел; ему предшествует ряд следующего вида:

$$\dots, v^0, \underbrace{v^0 - 1}_{w^0}, v^0, \underbrace{v^0 - 1}_{w^0}, v^0, \underbrace{v^0 - 1}_{w^0}, \dots \quad V$$

А число рядов

$$R, S, T, \dots, U, V, W$$

но может быть более $j^1 + 1$.

В самом деле, в противном случае ряд целых чисел

$$\rho_0, \sigma_0, \tau_0, \dots,$$

которые удовлетворяют неравенствам (27) и не могут быть отрицательными, содержит, по крайней мере, $j^1 + 1$ членов, а это невозможно.

Положим теперь, что между числами

$$\rho_0, \sigma_0, \tau_0, \dots$$

ряду U соответствует ψ_0 , а ряду V соответствует χ_0 .

Заметим еще, что найденные таким образом ряды J должны быть периодичны.

Пусть (a^1, b^1, c^1) — некоторая приведенная форма, соответствующая одному из этих рядов J .

В таком случае, обозначая положительный корень уравнения

$$a^1 \xi^2 + 2b^1 \xi + c^1 = 0$$

через ξ^1 , а отрицательный корень того же уравнения через $-\frac{1}{\eta^1}$, будем иметь

$$\xi^1 = \beta_0 + \frac{1}{\beta_1 + \frac{1}{\beta_2 + \frac{1}{\beta_3 + \frac{1}{\beta_4 + \frac{1}{\beta_5 + \frac{1}{\beta_6 + \frac{1}{\beta_7 + \frac{1}{\beta_8 + \frac{1}{\beta_9 + \frac{1}{\beta_{10} + \frac{1}{\xi^1}}}}}}}}}}}}$$

и

$$\eta^1 = \beta_q + \frac{1}{\beta_{q-1} + \frac{1}{\beta_{q-2} + \frac{1}{\beta_{q-3} + \frac{1}{\beta_{q-4} + \frac{1}{\beta_{q-5} + \frac{1}{\beta_{q-6} + \frac{1}{\beta_{q-7} + \frac{1}{\beta_{q-8} + \frac{1}{\beta_{q-9} + \frac{1}{\beta_{q-10} + \frac{1}{\eta^1}}}}}}}}}}}}$$

где

$$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{q-1}, \beta_q$$

один из периодов ряда J .

Отсюда затем, введя две несократимые дроби

$$\frac{P}{Q} = \beta_0 + \frac{1}{\beta_1 + \frac{1}{\beta_2 + \frac{1}{\beta_3 + \frac{1}{\beta_4 + \frac{1}{\beta_5 + \frac{1}{\beta_6 + \frac{1}{\beta_7 + \frac{1}{\beta_8 + \frac{1}{\beta_9 + \frac{1}{\beta_{10} + \frac{1}{\frac{P}{Q}}}}}}}}}}}} \quad \text{и} \quad \frac{P^1}{Q^1} = \beta_0 + \frac{1}{\beta_1 + \frac{1}{\beta_2 + \frac{1}{\beta_3 + \frac{1}{\beta_4 + \frac{1}{\beta_5 + \frac{1}{\beta_6 + \frac{1}{\beta_7 + \frac{1}{\beta_8 + \frac{1}{\beta_9 + \frac{1}{\beta_{10} + \frac{1}{\frac{P^1}{Q^1}}}}}}}}}}}}$$

ГЛАВА II

§ 1. Для удобства дальнейших рассуждений изменим несколько наши обозначения.

Положим

$$w^0 = a_0, v^0 = a_1, \dots, s^0 = a_{n-2}, r^0 = a_{n-1},$$

и затем обозначим ряды

$$W, V, \dots, S, R$$

соответственно символами

$$(a_0), (a_0, a_1), \dots, (a_0, a_1, \dots, a_{n-2}), (a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}).$$

Символ (a_0) означает ряд

$$\dots, a_0, a_0, a_0, a_0, a_0, a_0, a_0, \dots$$

символ (a_0, a_1) — ряд

$$\dots, a_1, \underbrace{a_1 - 1}_{a_0}, a_1, \underbrace{a_1 - 1}_{a_0}, a_1, \underbrace{a_1 - 1}_{a_0}, \dots$$

и вообще, если символ $(a_0, a_1, \dots, a_k)$ означает ряд

$$\dots, b_{k,-2}, b_{k,-1}, b_{k,0}, b_{k,1}, b_{k,2}, \dots,$$

то ряд $(a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1})$ можно представить так:

$$\dots, a_{k+1}, \underbrace{a_{k+1}-1}_{b_{k,-2}}, a_{k+1}, \underbrace{a_{k+1}-1}_{b_{k,-1}}, a_{k+1}, \underbrace{a_{k+1}-1}_{b_{k,0}}, a_{k+1}, \underbrace{a_{k+1}-1}_{b_{k,1}}, \\ a_{k+1}, \underbrace{a_{k+1}-1}_{b_{k,2}}, \dots$$

Обозначим, кроме того, символом $\begin{pmatrix} a_0, a_1, \dots, a_k \\ a_0, a_1, \dots, a_k \end{pmatrix}$ ряд

$$\dots, b_{k,-2}, b_{k,-2}, b_{k,-1}, b_{k,-1}, b_{k,0}, b_{k,0}, b_{k,1}, b_{k,1}, b_{k,2}, b_{k,2}, \dots,$$

который получается через двукратное повторение членов ряда $(a_0, a_1, \dots, a_k)$.

При такого рода обозначениях символ

$$\begin{pmatrix} a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, 2 \\ a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, 2 \end{pmatrix}$$

представляет ряд J^1 , для которого соответствующий ряд R выражается символом $(a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1})$.

Распространяя эти обозначения и на ряды J_0 и J_1 , для которых нет соответствующих рядов R , мы будем представлять первый из них символом $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, а второй символом $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Из способа составления рядов $(a_0, a_1, \dots, a_k)$ и $\begin{pmatrix} a_0, a_1, \dots, a_k \\ a_0, a_1, \dots, a_k \end{pmatrix}$ легко видеть, что они периодичны.

Каждому ряду $(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$ соответствует несколько периодов, которые могут быть получены из одного при помощи круговых перемещений всех его членов.*

А именно, если

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m-2}, \alpha_{m-1}, \alpha_m \quad \Pi_1$$

один из периодов ряда $(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$, то все прочие будут:

* Здесь, как и во всех дальнейших рассуждениях, дело идет о периодах с наименьшим числом членов.

Крайние же члены

$$\alpha_1, \alpha_m, \alpha_\mu, \alpha_{\mu-1},$$

периодов $[a_0, a_1, \dots, a_k]$ и $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ соответственно равны

$$a_k, a_k - 1, a_k - 1, a_k.$$

Исключение представляет только простейший случай $k=0$: символы $[a_0]$ и $\{a_0\}$ означают один и тот же одночленный период a_0 .

§ 3. На основании результатов предыдущего параграфа легко убедиться, что для ряда $\begin{pmatrix} a_0, a_1, \dots, a_k \\ a_0, a_1, \dots, a_k \end{pmatrix}$ maximum количества $\frac{2}{L_\mu}$ первой главы равен $\xi^1 + \frac{1}{\eta^1}$, где

$$\xi^1 = \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_m + \frac{1}{\alpha_m + \frac{1}{\alpha_{m-1} + \frac{1}{\alpha_{m-1} + \dots + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\xi^1}}}}}}}}$$

и

$$\eta^1 = \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \frac{1}{\alpha_3 + \dots + \frac{1}{\alpha_m + \frac{1}{\alpha_m + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\eta^1}}}}}}}}$$

Сумма $\xi^1 + \frac{1}{\eta^1}$ легко может быть выражена при помощи несократимых дробей $\frac{P}{Q}$ и $\frac{P'}{Q'}$, соответственно равных

$$\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_m + \frac{1}{\alpha_m + \frac{1}{\alpha_{m-1} + \frac{1}{\alpha_{m-1} + \dots + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_1}}}}}}}$$

и

$$\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_m + \frac{1}{\alpha_m + \frac{1}{\alpha_{m-1} + \frac{1}{\alpha_{m-1} + \dots + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_2}}}}}},$$

так как ξ^1 равняется положительному корню уравнения

$$Q\xi^2 - (P - Q^1)\xi - P^1 = 0,$$

а $\frac{-1}{\eta^1}$ — отрицательному корню того же уравнения.

Таким образом, обозначив максимум количества $\frac{2}{L_\mu}$ через $\frac{2}{L}$, выводим

$$\frac{1}{L} = \sqrt{\frac{P^1}{Q} + \left(\frac{P - Q^1}{2Q}\right)^2}. \quad (1)$$

Заметим еще, что $\frac{P}{Q} > \frac{P^1}{Q^1}$ и потому

$$PQ^1 - P^1Q = +1. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) могут быть приложены и к случаю $k=0$, причем тогда

$$\frac{P}{Q} = a_0 + \frac{1}{a_0} = \frac{a_0^2 + 1}{a_0}, \quad \frac{P^1}{Q^1} = a_0 = \frac{a_0}{1}$$

и

$$\frac{1}{L} = \sqrt{1 + \frac{a_0^2}{4}}.$$

§ 4. Количества $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k$ в символах $(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k)$, $\begin{pmatrix} a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k \\ a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k \end{pmatrix}$, $[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k]$, $\{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\}$

по самому существу вопроса должны быть целыми положительными числами.

Однако мы считаем полезным распространить понятие об этих символах и на тот случай, когда $a_0 = 0$.

Условимся выводить ряды

$$(0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1} \\ 0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1} \end{pmatrix}$$

из ряда

$$(0, a_1, \dots, a_k)$$

и периоды

$$[0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}] \quad \text{и} \quad \{0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}\}$$

из периодов

$$\{0, a_1, \dots, a_k\} \quad \text{и} \quad [0, a_1, \dots, a_k]$$

при помощи тех же общих правил, какие нами были указаны и для случая $a_0 > 0$.

Например, символ $(0, a_1)$ означает ряд

$$\dots, a_1, \underbrace{a_1 - 1}_0, a_1, \underbrace{a_1 - 1}_0, a_1, \underbrace{a_1 - 1}_0, a_1, \underbrace{a_1 - 1}_0, \dots,$$

т. е.

$$\dots, a_1, a_1, a_1, a_1, a_1, a_1, a_1, \dots,$$

а символ $(0, a_1, a_2)$ означает ряд

$$\dots, a_2, \underbrace{a_2 - 1}_{a_1}, a_2, \underbrace{a_2 - 1}_{a_1}, a_2, \underbrace{a_2 - 1}_{a_1}, a_2, \underbrace{a_2 - 1}_{a_1}, \dots$$

Вообще нетрудно убедиться, что символы

$$(0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k), \begin{pmatrix} 0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k \\ 0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k \end{pmatrix}, [0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k], \{0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\}$$

соответственно равносильны

$$(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k), \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_{k-1}, a_k \\ a_1, \dots, a_{k-1}, a_k \end{pmatrix}, [a_1, \dots, a_{k-1}, a_k], \{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\}.$$

§ 5. Введем еще новое обозначение: если несколько периодов

$$\begin{array}{ll} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, & A \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s, & B \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r, & C \\ \cdot & \cdot \\ \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n & F \end{array}$$

связаны между собой таким образом, что для получения периода A надо написать по порядку обыкновенного письма b раз период B , c раз период C , ..., и, наконец, f раз период F , способ образования периода A мы будем выражать символическою формулою

$$A = bB + cC + \dots + fF.$$

Прилагая это обозначение к данному нами в § 1 способу составления периодов $[a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}]$ и $\{a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}\}$, получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 [a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}] &= [a_{k+1}] + \alpha_\mu [a_{k+1} - 1] + \dots + [a_{k+1}] + \\
 &+ \alpha_m [a_{k+1} - 1] + [a_{k+1}] + \alpha_1 [a_{k+1} - 1] + \dots + [a_{k+1}] + \\
 &+ \alpha_{\mu-1} [a_{k+1} - 1]; \\
 \{a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}\} &= \alpha_1 \{a_{k+1} - 1\} + \{a_{k+1}\} + \alpha_2 \{a_{k+1} - 1\} + \\
 &+ \{a_{k+1}\} + \dots + \alpha_m \{a_{k+1} - 1\} + \{a_{k+1}\},
 \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\{\alpha_\mu\} + \dots + \{\alpha_m\} + \{\alpha_1\} + \dots + \{\alpha_{\mu-1}\} = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$$

и

$$[\alpha_1] + [\alpha_2] + \dots + [\alpha_m] = [a_0, a_1, \dots, a_k].$$

В частном случае $k=0$ формулы (3) дают

$$\begin{aligned}
 [a_0, a_1] &= [a_1] + a_0 [a_1 - 1], \\
 \{a_0, a_1\} &= a_0 \{a_1 - 1\} + \{a_1\},
 \end{aligned} \tag{4}$$

где $a_0 + 1$ и a_1 — произвольные целые положительные числа.

Полагая затем в формулах (3) k равным единице и принимая во внимание формулы (4), находим, что для образования периода $[a_0, a_1, a_2]$ надо написать по порядку обыкновенного письма a_0 раз период

$$[a_2] + (a_1 - 1)[a_2 - 1]$$

и один раз период

$$[a_2] + a_1 [a_2 - 1],$$

а для образования периода $\{a_0, a_1, a_2\}$ следует написать один раз период

$$a_1 \{a_2 - 1\} + \{a_2\}$$

и затем a_0 раз период

$$(a_1 - 1) \{a_2 - 1\} + \{a_2\}.$$

С другой стороны, те же формулы (3) дают

$$\begin{aligned} [a_2] + (a_1 - 1) \cdot [a_2 - 1] &= [a_1 - 1, a_2], \\ a_1 \{a_2 - 1\} + \{a_2\} &= \{a_1, a_2\}, \\ [a_2] + a_1 \cdot [a_2 - 1] &= [a_1, a_2] \end{aligned}$$

и

$$(a_1 - 1) \cdot \{a_2 - 1\} + \{a_2\} = \{a_1 - 1, a_2\}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, a_2] &= a_0 [a_1 - 1, a_2] + [a_1, a_2], \\ \{a_0, a_1, a_2\} &= \{a_1, a_2\} + a_0 \{a_1 - 1, a_2\}. \end{aligned}$$

Перейдем к более общему случаю.

Пусть будут

$$\begin{aligned} \alpha, \beta, \gamma, \dots, \varphi, \psi, \omega, \\ \alpha', \beta', \gamma', \dots, \rho', \sigma', \\ \alpha'', \beta'', \gamma'', \dots, \lambda'', \mu'', \end{aligned}$$

соответственно периоды $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l-1}\}$, $\{a_1, a_2, \dots, a_{2l-1}\}$ и $\{a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2l-1}\}$, допустим притом символическое равенство

$$\begin{aligned} \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l-1}\} &= a_0 \{a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2l-1}\} + \\ &+ \{a_1, a_2, \dots, a_{2l-1}\}. \end{aligned}$$

В таком случае из формул (3) следует, что для образования периода $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l-1}, a_{2l}]$ надо написать a_0 раз период

$$[a_{2l}] + \alpha'' [a_{2l} - 1] + [a_{2l}] + \beta'' [a_{2l} - 1] + \dots + [a_{2l}] + \mu'' [a_{2l} - 1]$$

и затем один раз период

$$[a_{2l}] + \alpha' [a_{2l} - 1] + [a_{2l}] + \beta' [a_{2l} - 1] + \dots + [a_{2l}] + \sigma' [a_{2l} - 1].$$

С другой стороны, те же формулы (3) дают

$$[a_{2l}] + \alpha''[a_{2l} - 1] + \dots + [a_{2l}] + \mu''[a_{2l} - 1] = \\ = [a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2l-1}, a_{2l}]$$

и

$$[a_{2l}] + \alpha'[a_{2l} - 1] + \dots + [a_{2l}] + \sigma'[a_{2l} - 1] = \\ = [a_1, a_2, \dots, a_{2l-1}, a_{2l}].$$

Следовательно,

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l-1}, a_{2l}] = a_0[a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2l-1}, a_{2l}] + \\ + [a_1, a_2, \dots, a_{2l-1}, a_{2l}].$$

Подобным же образом, допуская одно из равенств

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l-1}] = [a_1, a_2, \dots, a_{2l-1}] + a_0[a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2l-1}], \\ \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l}\} = \{a_1, a_2, \dots, a_{2l}\} + a_0\{a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2l}\}, \\ [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l}] = a_0[a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2l}] + [a_1, a_2, \dots, a_{2l}],$$

получим соответственно одно из равенств

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l-1}, a_{2l}\} = \{a_1, a_2, \dots, a_{2l-1}, a_{2l}\} + \\ + a_0\{a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2l-1}, a_{2l}\}, \\ [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l}, a_{2l+1}] = [a_1, a_2, \dots, a_{2l}, a_{2l+1}] + \\ + a_0[a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2l}, a_{2l+1}], \\ \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l}, a_{2l+1}\} = a_0\{a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2l}, a_{2l+1}\} + \\ + \{a_1, a_2, \dots, a_{2l}, a_{2l+1}\}.$$

Сопоставляя эти результаты с формулами (4), легко убедиться, что

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2t-1}] = [a_1, a_2, \dots, a_{2t-1}] + \\ + a_0[a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2t-1}], \\ \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2t-1}\} = a_0\{a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2t-1}\} + \\ + \{a_1, a_2, \dots, a_{2t-1}\}, \\ [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2t}] = a_0[a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2t}] + \\ + [a_1, a_2, \dots, a_{2t}], \\ \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2t}\} = \{a_1, a_2, \dots, a_{2t}\} + \\ + a_0\{a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2t}\} \quad (5)$$

при всех положительных целых значениях количеств

$$t, a_0 + 1, a_1, a_2, \dots, a_{2t-1}, a_{2t}.$$

Подставляя в формулы (5) $a_0 + 1$ на место a_0 , получаем

$$\begin{aligned} [a_0 + 1, a_1, a_2, \dots, a_{2t-1}] &= [a_1, a_2, \dots, a_{2t-1}] + \\ &\quad + (a_0 + 1) [a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2t-1}], \\ \{a_0 + 1, a_1, a_2, \dots, a_{2t-1}\} &= (a_0 + 1) \{a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2t-1}\} + \\ &\quad + \{a_1, a_2, \dots, a_{2t-1}\}, \\ [a_0 + 1, a_1, a_2, \dots, a_{2t}] &= (a_0 + 1) [a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2t}] + \\ &\quad + [a_1, a_2, \dots, a_{2t}], \\ \{a_0 + 1, a_1, a_2, \dots, a_{2t}\} &= \{a_1, a_2, \dots, a_{2t}\} + \\ &\quad + (a_0 + 1) \{a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2t}\}. \end{aligned}$$

Отсюда затем выводим

$$\begin{aligned} [a_0 + 1, a_1, a_2, \dots, a_{2t-1}] &= [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2t-1}] + \\ &\quad + [a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2t-1}], \\ \{a_0 + 1, a_1, a_2, \dots, a_{2t-1}\} &= \{a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2t-1}\} + \\ &\quad + \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2t-1}\} \\ [a_0 + 1, a_1, a_2, \dots, a_{2t}] &= [a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2t}] + \\ &\quad + [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2t}], \\ \{a_0 + 1, a_1, a_2, \dots, a_{2t}\} &= \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2t}\} + \\ &\quad + \{a_1 - 1, a_2, \dots, a_{2t}\}. \end{aligned} \tag{6}$$

§ 6. Положим теперь

$$\alpha_k = 2,$$

т. е. перейдем к наиболее интересующим нас рядам

$$\begin{pmatrix} a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, 2 \\ a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, 2 \end{pmatrix}.$$

и затем

$$\frac{Q - Q^1}{Q} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha_1 - 1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_{m-1} + \frac{1}{\alpha_{m-1} + \frac{1}{\alpha_m + \frac{1}{\alpha_m}}}}}}}}$$

На этом основании равенство (7) дает

$$\frac{P - 2Q}{Q} = \frac{Q - Q^1}{Q},$$

следовательно

$$Q^1 = 3Q - P. \quad (8)$$

Сопоставляя формулу (8) с формулами (2) и (1), находим

$$P^1 = 3P + \frac{P^2 + 1}{Q} \quad (9)$$

и

$$\frac{1}{L} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{Q^2}}. \quad (10)$$

Итак, для вычисления L достаточно знать соответствующее значение Q .

А для вычисления чисел Q мы выведем формулы, соответствующие символическим равенствам (6).

Заметим здесь кстати, что формулы (8), (9) и (10) могут быть распространены и на ряды $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, если примем для первого из этих рядов

$$\frac{P}{Q} = 2 + \frac{1}{2} \text{ и } \frac{P^1}{Q^1} = 2,$$

а для второго

$$\frac{P}{Q} = 1 + \frac{1}{1} \text{ и } \frac{P^1}{Q^1} = 1.$$

§ 7. Пусть будут

$$\frac{P_{\alpha, \lambda}}{Q_{\alpha, \lambda}} = 2 + \frac{1}{\alpha + \frac{1}{\alpha + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{2}}}}} \quad , \quad \frac{P^1_{\alpha, \lambda}}{Q^1_{\alpha, \lambda}} = 2 + \frac{1}{\alpha + \frac{1}{\alpha + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\lambda}}}}} \quad ,$$

$$\frac{P_{\mu, \omega}}{Q_{\mu, \omega}} = 2 + \frac{1}{\mu + \frac{1}{\mu + \frac{1}{\omega + \frac{1}{\omega + \frac{1}{2}}}}} \quad , \quad \frac{P^1_{\mu, \omega}}{Q^1_{\mu, \omega}} = 2 + \frac{1}{\mu + \frac{1}{\mu + \frac{1}{\omega + \frac{1}{\omega + \frac{1}{\omega}}}}} \quad ,$$

$$\frac{P_{\alpha, \omega}}{Q_{\alpha, \omega}} = 2 + \frac{1}{\alpha + \frac{1}{\alpha + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{2 + \frac{1}{P_{\mu, \omega} : Q_{\mu, \omega}}}}}}} \quad \text{и}$$

$$\frac{P_{\alpha, \omega}^1}{Q_{\alpha, \omega}^1} = 2 + \frac{1}{\alpha + \frac{1}{\alpha + \frac{1}{\alpha + \frac{1}{\alpha + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\lambda + \frac{1}{2 + \frac{1}{P_{\mu, \omega}^1 : Q_{\mu, \omega}^1}}}}}}}}}}$$

шесть несократимых дробей, для которых

$$\begin{aligned} Q_{\alpha, \lambda}^1 &= 3Q_{\alpha, \lambda} - P_{\alpha, \lambda}, \\ Q_{\mu, \omega}^1 &= 3Q_{\mu, \omega} - P_{\mu, \omega}, \\ Q_{\alpha, \omega}^1 &= 3Q_{\alpha, \omega} - P_{\alpha, \omega}. \end{aligned} \quad (8a)$$

По известным формулам теории непрерывных дробей имеем

$$\begin{aligned} P_{\alpha, \lambda} Q_{\alpha, \lambda}^1 - P_{\alpha, \lambda}^1 Q_{\alpha, \lambda} &= +1, \\ P_{\mu, \omega} Q_{\mu, \omega}^1 - P_{\mu, \omega}^1 Q_{\mu, \omega} &= +1, \\ P_{\alpha, \omega} Q_{\alpha, \omega}^1 - P_{\alpha, \omega}^1 Q_{\alpha, \omega} &= +1 \end{aligned} \quad (2a)$$

и

$$\begin{aligned} P_{\alpha, \omega} &= P_{\alpha, \lambda} P_{\mu, \omega} + P_{\alpha, \lambda}^1 Q_{\mu, \omega}, & P_{\alpha, \omega}^1 &= P_{\alpha, \lambda} P_{\mu, \omega}^1 + P_{\alpha, \lambda}^1 Q_{\mu, \omega}^1, \\ Q_{\alpha, \omega} &= Q_{\alpha, \lambda} P_{\mu, \omega} + Q_{\alpha, \lambda}^1 Q_{\mu, \omega}, & Q_{\alpha, \omega}^1 &= Q_{\alpha, \lambda} P_{\mu, \omega}^1 + Q_{\alpha, \lambda}^1 Q_{\mu, \omega}^1 \end{aligned} \quad (11)$$

откуда на основании формул (8a) выводим

$$\begin{aligned} P_{\alpha, \lambda}^1 &= 3P_{\alpha, \lambda} - \frac{P_{\alpha, \lambda}^2 + 1}{Q_{\alpha, \lambda}}, \\ P_{\mu, \omega}^1 &= 3P_{\mu, \omega} - \frac{P_{\mu, \omega}^2 + 1}{Q_{\mu, \omega}}, \\ P_{\alpha, \omega}^1 &= 3P_{\alpha, \omega} - \frac{P_{\alpha, \omega}^2 + 1}{Q_{\alpha, \omega}} \end{aligned} \quad (9a)$$

И

$$\begin{aligned}
P_{\alpha, \omega} &= P_{\alpha, \lambda} P_{\mu, \omega} + \left(3P_{\alpha, \lambda} - \frac{P_{\alpha, \lambda}^2 + 1}{Q_{\alpha, \lambda}} \right) Q_{\mu, \omega}, \\
Q_{\alpha, \omega} &= Q_{\alpha, \lambda} P_{\mu, \omega} + (3Q_{\alpha, \lambda} - P_{\alpha, \lambda}) Q_{\mu, \omega}, \\
Q_{\alpha, \omega}^1 &= Q_{\alpha, \lambda} \left(3P_{\mu, \omega} - \frac{P_{\mu, \omega}^2 + 1}{Q_{\mu, \omega}} \right) + (3Q_{\alpha, \lambda} - P_{\alpha, \lambda})(3Q_{\mu, \omega} - P_{\mu, \omega}).
\end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя найденные нами выражения $P_{\alpha, \omega}$, $Q_{\alpha, \omega}$ и $Q_{\alpha, \omega}^1$ в последнюю из формул (8а), получаем

$$\begin{aligned}
&Q_{\alpha, \lambda} \left(3P_{\mu, \omega} - \frac{P_{\mu, \omega}^2 + 1}{Q_{\mu, \omega}} \right) + (3Q_{\alpha, \lambda} - P_{\alpha, \lambda})(3Q_{\mu, \omega} - P_{\mu, \omega}) = \\
&= 3Q_{\alpha, \lambda} P_{\mu, \omega} + 3(3Q_{\alpha, \lambda} - P_{\alpha, \lambda}) Q_{\mu, \omega} - P_{\alpha, \lambda} P_{\mu, \omega} - \\
&\quad - \left(3P_{\alpha, \lambda} - \frac{P_{\alpha, \lambda}^2 + 1}{Q_{\alpha, \lambda}} \right) Q_{\mu, \omega},
\end{aligned}$$

а это последнее равенство после весьма простых преобразований обращается в следующее:

$$\begin{aligned}
&Q_{\alpha, \lambda}^2 + Q_{\mu, \omega}^2 + (P_{\alpha, \lambda} Q_{\mu, \omega} - P_{\mu, \omega} Q_{\alpha, \lambda})^2 = \\
&= 3Q_{\alpha, \lambda} Q_{\mu, \omega} (P_{\alpha, \lambda} Q_{\mu, \omega} - P_{\mu, \omega} Q_{\alpha, \lambda}).
\end{aligned} \tag{13}$$

Принимая затем во внимание, что количество

$$P_{\alpha, \lambda} Q_{\mu, \omega} - P_{\mu, \omega} Q_{\alpha, \lambda}$$

на основании второй из формул (12) равно

$$3Q_{\alpha, \lambda} Q_{\mu, \omega} - Q_{\alpha, \omega},$$

вместо равенства (13) мы можем написать

$$\begin{aligned}
&Q_{\alpha, \lambda}^2 + Q_{\mu, \omega}^2 + (3Q_{\alpha, \lambda} Q_{\mu, \omega} - Q_{\alpha, \omega})^2 = \\
&= 3Q_{\alpha, \lambda} Q_{\mu, \omega} (3Q_{\alpha, \lambda} Q_{\mu, \omega} - Q_{\alpha, \omega}),
\end{aligned}$$

откуда, наконец, по раскрытии скобок выводим

$$Q_{\alpha, \lambda}^2 + Q_{\mu, \omega}^2 + Q_{\alpha, \omega}^2 = 3Q_{\alpha, \lambda} Q_{\mu, \omega} Q_{\alpha, \omega}. \tag{14}$$

§ 8. Сопоставляя рассуждения предыдущего параграфа с формулами (6) и (8), находим

$$Q^2\{a_0+1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} + Q^2\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} + Q^2\{a_1-1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} = 3Q\{a_0+1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} \times Q\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} \cdot Q\{a_1-1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\}, \quad (15)^*$$

где

$$k-1, a_0+1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$$

произвольные целые положительные числа.

На том же основании имеем

$$Q^2\{a_0+2, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} + Q^2\{a_0+1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} + Q^2\{a_1-1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} = 3Q\{a_0+2, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} \times Q\{a_0+1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} \cdot Q\{a_1-1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\}, \quad (16)$$

$$Q^2\{1, a_0+1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} + Q^2\{a_0+1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} + Q^2\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} = 3Q\{1, a_0+1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} \times Q\{a_0+1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} \cdot Q\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\}.$$

Если же сравним формулу (15) с каждой из формул (16), получим

$$\begin{pmatrix} Q\{a_0+2, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} + Q\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} \\ - 3Q\{a_0+1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} \cdot Q\{a_1-1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q\{a_0+2, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} \\ - Q\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} \end{pmatrix} = 0 \quad (17)$$

* Мы обозначаем вообще символом $Q\{a, b, c, \dots, l\}$ количество Q § 3, соответствующее ряду $\begin{pmatrix} a, b, c, \dots, l \\ a, b, c, \dots, l \end{pmatrix}$. Подобным же образом

количества P, P^1 и Q^1 , соответствующие тому же ряду $\begin{pmatrix} a, b, c, \dots, l \\ a, b, c, \dots, l \end{pmatrix}$, мы будем обозначать через $P\{a, b, c, \dots, l\}$, $P^1\{a, b, c, \dots, l\}$ и $Q^1\{a, b, c, \dots, l\}$.

и

$$\begin{aligned} & \left(Q \{1, a_0 + 1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} + Q \{a_1 - 1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} \right) \times \\ & \quad \times \left(-3Q \{a_0 + 1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} \cdot Q \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} \right) \times \\ & \quad \times \left(\begin{aligned} & Q \{1, a_0 + 1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} \\ & - Q \{a_1 - 1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} \end{aligned} \right) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Но, с другой стороны, нетрудно видеть, что

$$Q \{a_0 + 2, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} > Q \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\}$$

и

$$Q \{1, a_0 + 1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} > Q \{a_1 - 1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\},$$

следовательно, можно сократить равенство (17) на

$$Q \{a_0 + 2, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} - Q \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\},$$

а (18) — на

$$Q \{1, a_0 + 1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} - Q \{a_1 - 1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} Q \{a_0 + 2, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} &= 3Q \{a_0 + 1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} \times \\ &\times Q \{a_1 - 1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} - Q \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} Q \{1, a_0 + 1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} &= 3Q \{a_0 + 1, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} \times \\ &\times Q \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\} - Q \{a_1 - 1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2\}. \end{aligned}$$

Соотношения (19) дают удобное средство для вычисления чисел Q , когда известны

$$Q \{2\}, Q \{1, 2\}, Q \{2, 2\}, \dots, Q(a, 2), Q \{a + 1, 2\}, \dots$$

и

$$Q \{1, 1, 2\}, Q \{1, 2, 2\}, \dots, Q \{1, a, 2\}, Q \{1, a + 1, 2\}, \dots$$

А для этих последних количеств формула (15) дает

$$\begin{aligned} Q^2\{1, a, 2\} + Q^2\{a, 2\} + Q^2\{a-1, 2\} = \\ = 3Q\{1, a, 2\} Q\{a, 2\} Q\{a-1, 2\}, \end{aligned} \quad (20)$$

где a — произвольное целое положительное число.

Кроме того имеем,

$$\begin{aligned} Q\{1\} &= 1, \quad Q\{2\} = 2, \quad Q\{1, 2\} = 5, \\ P\{a, 2\} &= Q\{a+1, 2\}, \quad P\{a-1, 2\} = Q\{a, 2\}, \\ Q^1\{a, 2\} &= Q\{a-1, 2\}, \quad P^1\{a-1, 2\} = Q\{a-1, 2\}, \end{aligned} \quad (21)$$

откуда, принимая во внимание формулы (8) и (9), выводим

$$\begin{aligned} Q\{2\} &= 3Q\{1\} \cdot Q\{1\} - Q\{1\}, \\ Q\{1, 2\} &= 3Q\{2\} \cdot Q\{1\} - Q\{1\}, \\ Q\{a+1, 2\} &= 3Q\{a, 2\} \cdot Q\{1\} - Q\{a-1, 2\} \end{aligned} \quad (22)$$

и

$$\begin{aligned} Q^2\{1\} + Q^2\{1\} + Q^2\{1\} &= 3Q\{1\} \cdot Q\{1\} \cdot Q\{1\}, \\ Q^2\{2\} + Q^2\{1\} + Q^2\{1\} &= 3Q\{2\} \cdot Q\{1\} \cdot Q\{1\}, \\ Q^2\{a, 2\} + Q^2\{a-1, 2\} + Q^2\{1\} &= 3Q\{a, 2\} \cdot Q\{a-1, 2\} \cdot Q\{1\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Наконец, сравнивая равенство (20) с последним из равенств (23) и, принимая во внимание неравенство

$$Q\{1, a, 2\} > Q\{1\},$$

получаем

$$Q\{1, a, 2\} = 3Q\{a, 2\} \cdot Q\{a-1, 2\} - Q\{1\}. \quad (24)$$

Итак, для определения $Q\{1, a, 2\}$ достаточно знать $Q\{a, 2\}$ и $Q\{a-1, 2\}$, которые, со своей стороны, легко могут быть вычислены по формулам (22).

§ 9. В заключение нашей статьи скажем несколько слов о решении в целых положительных числах уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz, \quad (14a)$$

к которому мы пришли в конце § 7.

Предложенное уравнение симметрично относительно неизвестных x, y, z .

Поэтому, зная одно из его решений

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma,$$

не трудно найти еще пять:

$$x = \alpha, \quad y = \gamma, \quad z = \beta;$$

$$x = \beta, \quad y = \gamma, \quad z = \alpha;$$

$$x = \beta, \quad y = \alpha, \quad z = \gamma;$$

$$x = \gamma, \quad y = \alpha, \quad z = \beta;$$

$$x = \gamma, \quad y = \beta, \quad z = \alpha.$$

Все эти шесть решений могут быть, конечно, различны между собой; однако мы условимся считать их за одно и будем обозначать так:

$$x, y, z = \alpha, \beta, \gamma.$$

Вместе с тем очевидно, что мы имеем право для большей определенности предполагать

$$\alpha \geq \beta \geq \gamma.$$

Согласно нашему условию формулы предыдущего параграфа дают для уравнения (14а) следующую систему решений

$$x, y, z = Q\{1\}, Q\{1\}, Q\{1\};$$

$$x, y, z = Q\{2\}, Q\{1\}, Q\{1\};$$

$$x, y, z = Q\{1, 2\}, Q\{2\}, Q\{1\};$$

.....

$$x, y, z = Q\{a, 2\}, Q\{a-1, 2\}, Q\{1\};$$

.....

$$x, y, z = Q\{b, a, 2\}, Q\{b-1, a, 2\}, Q\{a-1, 2\};$$

.....

.....

$$x, y, z = Q\{l, j, i, \dots, b, a, 2\}, Q\{l-1, j, i, \dots, b, a, 2\},$$

$$Q\{j-1, i, \dots, b, a, 2\};$$

.....

Ω

Допустим теперь, что некоторое решение

$$x, y, z = \alpha, \beta, \gamma$$

того же уравнения не заключается в системе Ω .

В таком случае числа α, β, γ не могут быть все равны между собой, так как при

$$\alpha = \beta = \gamma$$

решение

$$x, y, z = \alpha, \beta, \gamma$$

должно совпадать с первым из решений в системе Ω .

Поэтому мы можем считать

$$\alpha \geq \beta \geq \gamma \quad \text{и} \quad \alpha > \gamma.$$

Сопоставляя неравенства

$$\alpha \geq \beta \geq \gamma \quad \text{и} \quad \alpha > \gamma$$

с уравнением

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha\beta\gamma,$$

находим

$$3\beta\gamma > \alpha > \beta\gamma.$$

Если же решим уравнение относительно α , получим

$$\alpha = \frac{3\beta\gamma \pm \sqrt{9\beta^2\gamma^2 - 4(\beta^2 + \gamma^2)}}{2}.$$

Из двух знаков $\pm$ в этом равенстве надо взять $+$, потому что

$$9\beta^2\gamma^2 - 4(\beta^2 + \gamma^2) \geq \beta^2\gamma^2$$

и

$$\frac{3\beta\gamma - \sqrt{9\beta^2\gamma^2 - 4(\beta^2 + \gamma^2)}}{2} \leq \beta\gamma$$

при всех целых положительных значениях β и γ .

Следовательно

$$3\beta\gamma > \alpha > \frac{3}{2}\beta\gamma$$

и разность

$$3\beta\gamma - \alpha$$

заклучается между нулем и α .

Обозначая эту разность буквою δ , из уравнения

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha\beta\gamma$$

выводим

$$\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 3\beta\gamma\delta.$$

Итак, из данного решения

$$x, y, z = \alpha, \beta, \gamma$$

можно вывести новое

$$x, y, z = \beta, \gamma, \delta,$$

причем

$$\beta + \gamma + \delta < \alpha + \beta + \gamma.$$

Новое решение также не заключается в системе Ω , так как в противном случае и начальное

$$x, y, z = 3\beta\gamma - \delta, \beta, \gamma$$

должно заключаться, согласно формулам § 8, в той же системе Ω .

Поэтому, преобразуя решение

$$x, y, z = \beta, \gamma, \delta$$

по указанному нами способу, получим еще решение

$$x, y, z = \beta', \gamma', \delta',$$

которое также не содержится в системе Ω и удовлетворяет неравенству

$$\beta' + \gamma' + \delta' < \beta + \gamma + \delta.$$

Рассуждая подобным же образом далее, получим бесконечный ряд решений уравнения (14a)

$$\begin{aligned} x, y, z &= \alpha, \beta, \gamma, \\ x, y, z &= \beta, \gamma, \delta, \\ x, y, z &= \beta', \gamma', \delta', \\ x, y, z &= \beta'', \gamma'', \delta'', \\ &\dots \end{aligned}$$

и бесконечный убывающий ряд целых положительных чисел

$$\alpha + \beta + \gamma, \quad \beta + \gamma + \delta, \quad \beta' + \gamma' + \delta', \quad \beta'' + \gamma'' + \delta'', \dots$$

А это невозможно, так как существует только конечное число целых положительных чисел, не превосходящих данного предела $\alpha + \beta + \gamma$.

Следовательно, сделанное нами допущение противуречит основным понятиям теории чисел.

Итак, все решения, в целых положительных числах, уравнения (14a) должны заключаться в системе Ω .

Таблица чисел $Q \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, 2\}$, не превосходящих 1 000 000

$Q \{1\} = 1$	$Q \{2\} = 2$	$Q \{1, 2\} = 5$	$Q \{2, 2\} = 13$	$Q \{3, 2\} = 34$	$Q \{4, 2\} = 89$	$Q \{5, 2\} = 233$						
$Q \{1\} = 1$	$Q \{1, 2\} = 5$	$Q \{2, 2\} = 13$	$Q \{3, 2\} = 34$	$Q \{4, 2\} = 89$	$Q \{5, 2\} = 233$	$Q \{6, 2\} = 610$	$Q \{1, 2\} = 5$	$Q \{1, 1, 2\} = 29$	$Q \{2, 1, 2\} = 169$	$Q \{2, 2\} = 13$	$Q \{3, 2\} = 34$	$Q \{1, 1, 2\} = 29$
$Q \{1\} = 1$	$Q \{1, 1, 2\} = 29$	$Q \{1, 2, 2\} = 194$	$Q \{1, 3, 2\} = 1325$	$Q \{1, 4, 2\} = 9077$	$Q \{1, 5, 2\} = 62210$	$Q \{1, 6, 2\} = 426389$	$Q \{1, 1, 2\} = 29$	$Q \{2, 1, 2\} = 169$	$Q \{3, 1, 2\} = 985$	$Q \{1, 2, 2\} = 194$	$Q \{1, 3, 2\} = 1325$	$Q \{1, 1, 1, 2\} = 433$
$Q \{2\} = 2$	$Q \{2, 1, 2\} = 169$	$Q \{2, 2, 2\} = 2897$	$Q \{2, 3, 2\} = 51641$	$Q \{2, 4, 2\} = 925765$			$Q \{1, 1, 1, 2\} = 433$	$Q \{1, 2, 1, 2\} = 14701$	$Q \{1, 3, 1, 2\} = 499393$	$Q \{1, 1, 2, 2\} = 7561$	$Q \{1, 1, 3, 2\} = 135137$	$Q \{1, 1, 1, 1, 2\} = 3766$
$Q \{1, 2\} = 5$	$Q \{3, 1, 2\} = 985$	$Q \{3, 2, 2\} = 43261$					$Q \{2, 1, 1, 2\} = 6466$			$Q \{2, 1, 2, 2\} = 294085$		
$Q \{2, 2\} = 13$	$Q \{4, 1, 2\} = 5741$	$Q \{4, 2, 2\} = 646018$					$Q \{3, 1, 1, 2\} = 96557$					
$Q \{3, 2\} = 34$	$Q \{5, 1, 2\} = 33461$											
$Q \{4, 2\} = 89$	$Q \{6, 1, 2\} = 195025$											
$Q \{5, 2\} = 233$												
$Q \{6, 2\} = 610$												
$Q \{7, 2\} = 1597$												
$Q \{8, 2\} = 4181$												
$Q \{9, 2\} = 10946$												
$Q \{10, 2\} = 28657$												
$Q \{11, 2\} = 75025$												
$Q \{12, 2\} = 196418$												
$Q \{13, 2\} = 514229$												

Примечание. Эта таблица дает вместе с тем решения уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ при условии, что x, y, z целые положительные числа и не превышают 1 000 000. А именно можно взять за наименьшее из количеств x, y, z первое число какого угодно из столбцов этой таблицы, а за остальные два — какие угодно смежные из прочих чисел того же столбца. Других же решений, удовлетворяющих тому же условию, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ не допускает.

Таблица периодов $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ для значений k , не превосходящих 5

См- Бойл	$\{x\}$	$\{\gamma-1, x+1\}$	$\{\delta-1, \gamma, x+1\}$	$\{\varepsilon-1, \delta, \gamma, x+1\}$	$\{\eta-1, \varepsilon, \delta, \gamma, x+1\}$	$\{\theta-1, \eta, \varepsilon, \delta, \gamma, x+1\}$
Периоды	x	$\gamma-1$ раз $1 \dots x+1$	$\gamma \dots x$ $1 \dots x+1$ $\delta-1 \left\{ \begin{array}{l} \gamma-1 \dots x+1 \\ 1 \dots x+1 \end{array} \right.$	$\gamma \dots x$ $1 \dots x+1$ $\varepsilon-1 \left\{ \begin{array}{l} \gamma-1 \dots x+1 \\ 1 \dots x+1 \end{array} \right.$ $\delta \left\{ \begin{array}{l} \gamma \dots x \\ 1 \dots x+1 \end{array} \right.$	$\gamma \dots x$ $1 \dots x+1$ $\varepsilon \left\{ \begin{array}{l} \gamma-1 \dots x+1 \\ 1 \dots x+1 \end{array} \right.$ $\delta \left\{ \begin{array}{l} \gamma \dots x \\ 1 \dots x+1 \end{array} \right.$ $\eta-1 \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon-1 \dots x+1 \\ 1 \dots x+1 \end{array} \right.$	$\gamma \dots x$ $1 \dots x+1$ $\varepsilon \left\{ \begin{array}{l} \gamma-1 \dots x+1 \\ 1 \dots x+1 \end{array} \right.$ $\delta \left\{ \begin{array}{l} \gamma \dots x \\ 1 \dots x+1 \end{array} \right.$ $\eta-1 \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon-1 \dots x+1 \\ 1 \dots x+1 \end{array} \right.$ $\theta-1 \left\{ \begin{array}{l} \eta-1 \dots x+1 \\ 1 \dots x+1 \end{array} \right.$

Примечание. Те же периоды читатель найдет в таблице, приложенной к первому тому сочинения И. Бернулли „Rescueil pour les astronomes“.

Таблица форм (a, b, c) произвольного положительного определителя D , чис-

ленные значения которых не могут быть сделаны меньше $\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{7561}\right)^2}}$

Формы	Minimum'ы
$\sqrt{\frac{4D}{5}} \{x^2 - xy - y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - 1}} = \sqrt{\frac{4}{5} D}$
$\sqrt{\frac{D}{2}} \{x^2 - 2xy - y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{2} D}$
$\sqrt{\frac{4D}{221}} \{5x^2 - 11xy - 5y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{5}\right)^2}} = \sqrt{\frac{100}{221} D}$
$\sqrt{\frac{4D}{1517}} \{13x^2 - 29xy - 13y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{13}\right)^2}} = \sqrt{\frac{676}{1517} D}$
$\sqrt{\frac{4D}{7565}} \{29x^2 - 63xy - 31y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{29}\right)^2}} = \sqrt{\frac{3364}{7566} D}$
$\sqrt{\frac{D}{650}} \{17x^2 - 38xy - 17y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{34}\right)^2}} = \sqrt{\frac{289}{650} D}$
$\sqrt{\frac{4D}{71285}} \{89x^2 - 199xy - 89y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{89}\right)^2}} = \sqrt{\frac{31684}{71285} D}$
$\sqrt{\frac{4D}{257045}} \{169x^2 - 367xy - 181y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{169}\right)^2}} = \sqrt{\frac{114244}{257045} D}$
$\sqrt{\frac{D}{21170}} \{97x^2 - 216xy - 98y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{194}\right)^2}} = \sqrt{\frac{9409}{21170} D}$
$\sqrt{\frac{4D}{488597}} \{233x^2 - 521xy - 233y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{233}\right)^2}} = \sqrt{\frac{217156}{488597} D}$

Формы	Minimum'ы
$\sqrt{\frac{4D}{1687397}} \{433x^2 - 941xy - 463y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{433}\right)^2}} = \sqrt{\frac{749956}{1687397}} D$
$\sqrt{\frac{D}{209306}} \{305x^2 - 682xy - 305y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{610}\right)^2}} = \sqrt{\frac{93025}{209306}} D$
$\sqrt{\frac{4D}{8732021}} \{985x^2 - 2139xy - 1055y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{985}\right)^2}} = \sqrt{\frac{3880900}{8732021}} D$
$\sqrt{\frac{4D}{15800621}} \{1325x^2 - 2961xy - 1327y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{1325}\right)^2}} = \sqrt{\frac{7022500}{15800621}} D$
$\sqrt{\frac{4D}{22953677}} \{1597x^2 - 3571xy - 1597y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{1597}\right)^2}} = \sqrt{\frac{10201636}{22953677}} D$
$\sqrt{\frac{4D}{75533477}} \{2897x^2 - 6451xy - 2927y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{2897}\right)^2}} = \sqrt{\frac{33570436}{75533477}} D$
$\sqrt{\frac{4D}{157326845}} \{4181x^2 - 9349xy - 4181y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{4181}\right)^2}} = \sqrt{\frac{69923044}{157326845}} D$
$\sqrt{\frac{4D}{296631725}} \{5741x^2 - 12467xy - 6149y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{5741}\right)^2}} = \sqrt{\frac{131836324}{296631725}} D$
$\sqrt{\frac{D}{23517650}} \{3233x^2 - 7026xy - 3457y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{6466}\right)^2}} = \sqrt{\frac{10452289}{23517650}} D$
$\sqrt{\frac{4D}{514518485}} \{7561x^2 - 16837xy - 7639y^2\}$	$\sqrt{\frac{D}{\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{7561}\right)^2}} = \sqrt{\frac{228674884}{514518485}} D$

Примечание. При составлении этой таблицы мы считаем, для удобства, все эквивалентные между собой формы за одну.

О ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ КОРНЯ
КУБИЧЕСКОГО ИЗ ЦЕЛОГО РАЦИОНАЛЬНОГО
ЧИСЛА

(К МЕМУАРУ Е. ЗОЛОТАРЕВА)

В этом мемуаре я предполагаю применить общую теорию целых чисел, зависящих от корня алгебраического уравнения, разработанную трудами Куммера, Дедекинда и Золотарева, к случаю чисел, зависящих от корня кубического из целого рационального числа, надеясь, что этот частный случай, интересный сам по себе, может способствовать также развитию общего случая.

В частности, я хочу показать, как, следуя идеям Золотарева, которого, к нашему глубокому сожалению, столь рано отняла у науки преждевременная смерть, можно легко получить разложение на простые множители всех целых чисел, зависящих от корня кубического из целого рационального числа.

§ 1. Обозначим через a и b два целых рациональных числа таких, что их произведение ab не делится ни на какой квадрат целого рационального числа.

Полагая, далее,

$$ab^2 = A \quad \text{и} \quad a^2b = B$$

и обозначая через X , Y , Z произвольные рациональные числа, мы будем рассматривать алгебраические числа вида

$$\begin{aligned} \xi &= X + Y\sqrt[3]{A} + Z\sqrt[3]{B} = X + Y\sqrt[3]{A} + \frac{1}{b}Z\sqrt[3]{A^2} = \\ &= X + Z\sqrt[3]{B} + \frac{1}{a}Y\sqrt[3]{B^2}. \end{aligned}$$

Число ξ удовлетворяет алгебраическому уравнению третьей степени

$$\xi^3 - 3X\xi^2 + 3(X^2 - abYZ)\xi = X^3 + AY^3 + BZ^3 - 3abXYZ.$$

Абсолютное значение правой части

$$X^3 + AY^3 + BZ^3 - 3abXYZ$$

этого уравнения мы назовем *нормой* числа

$$\xi = X + Y\sqrt[3]{A} + Z\sqrt[3]{B},$$

зависящего от $\sqrt[3]{A}$ (или $\sqrt[3]{B}$).

Заметим, что норма произведения двух или нескольких чисел, зависящих от $\sqrt[3]{A}$, равна произведению их норм^[1].
Деля

$$X^3 + AY^3 + BZ^3 - 3abXYZ \text{ на } \xi,$$

получим число

$$\frac{X^3 + AY^3 + BZ^3 - 3abXYZ}{X + Y\sqrt[3]{A} + Z\sqrt[3]{B}} = X^2 - abYZ + (aZ^2 - XY)\sqrt[3]{A} + \\ + (BY^2 - XZ)\sqrt[3]{B},$$

которое назовем *союзным* для ξ .

Будем говорить, что число ξ — целое, если все коэффициенты

$$3X, 3(X^2 - abYZ), X^3 + AY^3 + BZ^3 - 3abXYZ$$

соответствующего уравнения — числа целые. Ограничиваясь исключительно целыми числами ξ , легко доказать, что числа

$$3X = x, \quad 3Y = y, \quad 3Z = z$$

должны быть целыми.

В самом деле, очевидно, что

$$x, \quad aby \text{ и } Ay^3 + Bz^3 = ab^2y^3 + a^2bz^3$$

числа целые.

Числа же

$$abyz \quad \text{и} \quad ab^2y^3 + a^2bz^3$$

могут быть одновременно целыми только в том случае, если y и z целые, так как ab^2 и a^2b не делятся ни на какой куб. Установив это, имеем

$$3X = x, \quad 3(X^2 - abYZ) = \frac{x^2 - abyz}{3},$$

$$X^3 + AY^3 + BZ^3 - 3abXYZ = \frac{x^3 + ab^2y^3 + a^2bz^3 - 3abxyz}{3^3},$$

и тогда условие, что ξ число целое, сводится к двум сравнениям:

$$x^2 \equiv abyz \pmod{3} \quad \text{и} \quad x^3 + ab^2y^3 + a^2bz^3 - 3abxyz \equiv 0 \pmod{3^3}.$$

Рассмотрим теперь два случая:

$$\text{I) } x \equiv 0 \pmod{3}, \quad \text{II) } x \equiv \pm 1 \pmod{3}.$$

В первом из этих случаев предыдущие сравнения дают

$$abyz \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{и} \quad ab^2y^3 + a^2bz^3 \equiv 0 \pmod{3^3},$$

откуда следует:

$$y \equiv z \equiv 0 \pmod{3}.$$

С другой стороны, очевидно, что при

$$x \equiv y \equiv z \equiv 0 \pmod{3}$$

число

$$\xi = \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3}$$

— целое.

Во втором случае сравнение

$$x^2 \equiv abyz \pmod{3}$$

может быть заменено двумя следующими:

$$y \equiv \eta ax \pmod{3} \quad \text{и} \quad z \equiv \eta bx \pmod{3}.$$

где η равно ± 1 .

После этого сравнение

$$x^3 + ab^2 y^3 + a^2 bz^3 - 3abxyz \equiv 0 \pmod{3^3}$$

дает

$$1 + a^4 b^2 \eta + a^2 b^4 \eta \equiv 1 + 2\eta \equiv 0 \pmod{3},$$

откуда следует, что

$$\eta = 1.$$

Если положить

$$y = ax + 3u, \quad z = bx + 3v,$$

где u и v — числа целые, то остается удовлетворить сравнению

$$\begin{aligned} & x^3 + ab^2(ax + 3u)^3 + a^2b(bx + 3v)^3 - \\ & - 3abx(ax + 3u)(bx + 3v) \equiv 0 \pmod{3^3}, \end{aligned}$$

которое приводится к такому

$$1 + a^4 b^2 + a^2 b^4 - 3a^2 b^2 \equiv 0 \pmod{3^3}.$$

Принимая же во внимание равенства

$$\begin{aligned} 1 + a^4 b^2 + a^2 b^4 - 3a^2 b^2 &= (1 - ab^2)^2 + ab^2(a - 1)^2(a + 2) = \\ &= (1 + ab^2)^2 + ab^2(a + 1)^2(a - 2), \end{aligned}$$

легко видеть, что сравнение

$$+ a^2 b^4 - 3a^2 b^2 \equiv 0 \pmod{3^3}$$

приводится

в случае $a \equiv +1 \pmod{3}$ к сравнению $ab^2 \equiv +1 \pmod{3^2}$,
а в случае $a \equiv -1 \pmod{3}$ к сравнению $ab^2 \equiv -1 \pmod{3^2}$.

Другими словами, сравнение

$$1 + a^4 b^2 + a^2 b^4 - 3a^2 b^2 \equiv 0 \pmod{3^3}$$

равносильно следующему сравнению

$$A \equiv \pm 1 \pmod{3^2}.$$

Сравнение

$$1 + a^4 b^2 + a^2 b^4 - 3a^2 b^2 \equiv 0 \pmod{3^3}$$

можно дать также в следующей форме

$$\begin{aligned} a^2(b^2 - a^2)^2 + 3(a^4 - a^2)(b^2 - a^2) + \\ + (2a^2 + 1)(a^2 - 1)^2 \equiv 0 \pmod{3^3} \end{aligned}$$

и далее получить сравнение, простое и симметричное по отношению к буквам a и b :

$$b^2 \equiv a^2 \pmod{3^2},$$

т. е.

$$b \equiv \pm a \pmod{3^2}.$$

Значит, условие, что число

$$\xi = \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3},$$

зависящее от $\sqrt[3]{A}$, целое, выражается, в случае $b \equiv \pm a \pmod{3^2}$ сравнениями

$$y \equiv ax \pmod{3}, \quad z \equiv bx \pmod{3}$$

и во всех других случаях сравнениями

$$x \equiv y \equiv z \equiv 0 \pmod{3}.$$

§ 2. Пусть ξ и ξ_1 — два целых числа, зависящих от $\sqrt[3]{A}$.

Мы будем говорить, что эти два числа *не имеют общего множителя*, если существуют два целых числа ω и ω_1 , зависящие также от $\sqrt[3]{A}$, такие, что нормы трех чисел

$$\xi, \xi_1, \omega\xi + \omega_1\xi_1$$

не имеют общего множителя в обычном смысле.

Тогда можно найти три целых рациональных числа P, Q, R такие, что сумма

$$P \cdot (\text{норма } \xi) + Q \cdot (\text{норма } \xi_1) + R \cdot (\text{норма } \omega\xi + \omega_1\xi_1)$$

будет равна единице.

Следовательно, если ξ и ξ_1 не имеют общего множителя, тогда существуют два целых числа

$$\xi' = P \cdot (\pm \text{ союзное для } \xi) + R\omega \quad (\pm \text{ союзное для } \omega\xi + \omega_1\xi_1);$$

$$\xi'_1 = Q \cdot (\pm \text{ союзное для } \xi_1) + R\omega_1 \quad (\pm \text{ союзное для } \omega\xi + \omega_1\xi_1),$$

также зависящих от $\sqrt[3]{A}$, такие, что

$$\xi'\xi + \xi'_1\xi_1 = 1.$$

В противном случае мы условимся говорить, что числа ξ и ξ_1 имеют общий множитель.

В частности ξ имеет общий множитель с целым рациональным простым числом p , если норма ξ делится на p , и ξ не имеет общего множителя с p , если эта норма не делится на p .

Буквой p мы всегда будем обозначать целое рациональное простое число и буквой ξ — целое число, зависящее от $\sqrt[3]{A}$. Мы условимся говорить, что два целых числа ξ и ξ_1 ,

зависящие от $\sqrt[3]{A}$, не имеют общего множителя, принадлежащего к p , если существуют два целых числа ω и ω_1 , зависящие от $\sqrt[3]{A}$, такие, что сумма $\omega\xi + \omega_1\xi_1$ не имеет общего множителя с p . В этом случае мы будем говорить также, что ξ и ξ_1 имеют только различные множители с p (если нормы ξ и ξ_1 делятся на p).

Установив эти определения, важно заметить два следующих предложения, которые легко могут быть доказаны. Если два целых числа, зависящих от $\sqrt[3]{A}$, имеют только различные множители со всеми целыми рациональными простыми числами, которые делят их нормы, эти два числа не имеют общего множителя.

Если имеем две системы целых чисел, зависящих от $\sqrt[3]{A}$, и если каждое число первой системы не имеет никакого множителя, принадлежащего к p , общего с числами второй, тогда произведение всех чисел первой системы не будет иметь также никакого множителя, принадлежащего к p , общего с произведением всех чисел второй системы.

Мы условимся говорить, далее, что число ξ_1 имеет все множители другого числа ξ , принадлежащие к p , если существует целое рациональное число P , не делящееся на p , такое, что $P\xi_1$ делится на ξ , т. е. что $\frac{P\xi_1}{\xi}$ будет число целое.

В силу последнего определения, для делимости числа ξ_1 на другое число ξ необходимо и достаточно, чтобы ξ_1 имело все множители числа ξ , принадлежащие всем простым числам p , которые делят норму ξ .

Легко доказать, что число ξ_2 , имея все множители двух чисел ξ и ξ_1 , принадлежащие к p , должно иметь все множители их произведения $\xi\xi_1$, принадлежащие к p , если эти числа ξ и ξ_1 имеют только различные множители числа p . В соответствии с этим определением мы скажем еще, что *все мно-*

жители двух чисел ξ и ξ_1 , принадлежащие к p , тождественны, если существуют два целых рациональных числа P и P_1 , не делящиеся на p , такие, что $\frac{P\xi_1}{\xi}$ и $\frac{P_1\xi}{\xi_1}$ будут целыми числами.

Мы условимся говорить, наконец, что все множители ξ , принадлежащие к p , приводятся к одному простому множителю, если ξ не содержит множителей, принадлежащих к p , любого другого целого числа ξ_1 , норма которого делится на p , и которое, в свою очередь, не имеет всех множителей числа ξ , принадлежащих p .

Мы определим для области целых чисел, зависящих от $\sqrt[3]{A}$, каждый простой множитель с помощью некоторого целого рационального простого числа p и числа ξ (из этой области), все множители которого, принадлежащие p , приводятся к одному простому множителю. Этому множителю мы припишем норму, равную p^k , если норма ξ делится на p^k и не делится на p^{k+1} .

§ 3. Предполагая теперь, что p не равно 3, мы рассмотрим следующие случаи:

- I) p — делитель a ;
 - II) p — делитель b ;
 - III) p не делит A и A — кубический невычет p ;
 - IV) p не делит A , которое является кубическим вычетом p .
- В первом из этих случаев число

$$\xi = \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3}$$

имеет множителя, общего с p только для значений x , делящихся на p .

С другой стороны, если x делится на p , произведение

$$\frac{ab^2}{p} \xi = \frac{ab^2 x + ab^2 y \sqrt[3]{A} + ab^2 z \sqrt[3]{B}}{3p} =$$

$$= \frac{\frac{ab^2y}{p} + \frac{abz}{p} \sqrt[3]{A} + \frac{bx}{p} \sqrt[3]{B}}{3} \cdot \sqrt[3]{A}$$

делится на $\sqrt[3]{A}$. Другими словами, каждое число ξ , имея один общий множитель с p , содержит все множители $\sqrt[3]{A}$, принадлежащие к p , и, следовательно, все множители $\sqrt[3]{A}$, принадлежащие к p , приводятся к одному простому множителю, который мы обозначим через α_p .

Условимся говорить, что число ξ делится на α_p^n , если ξ содержит все множители числа $(\sqrt[3]{A})^n$, принадлежащие к p . Что касается числа p , то мы положим

$$p = \alpha_p^3,$$

ибо каждое число ξ , делящееся на p , также делится на α_p^3 , и, обратно, каждое число ξ , делящееся на α_p^3 , делится на p .

Таким же образом, если p делит b , мы положим

$$p = \alpha_p^3,$$

определяя α_p как множитель, общий для p и $\sqrt[3]{B}$.

В этих двух случаях мы приписываем множителю α_p норму, равную p , согласно тому, что мы говорили раньше. Что касается третьего случая, легко доказать, что в этом случае каждое число ξ , имея общий множитель с p , должно делиться на p .

В самом деле, если норма числа

$$\xi = \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3}$$

делится на p , нормы чисел

$$(x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B})(x - z \sqrt[3]{B}) = x^2 - abyz + (xy - az^2) \sqrt[3]{A},$$

$$(x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B})(x - y \sqrt[3]{A}) = x^2 - abyz + (xz - by^2) \sqrt[3]{B}$$

также делятся на p .

Из этого выводим сравнения

$$(x^2 - abyz)^3 + A(xy - az^2)^3 \equiv (x^2 - abyz)^3 + \\ + B(xz - by^2)^3 \equiv 0 \pmod{p},$$

которые для третьего случая тождественны таким:

$$x^2 \equiv abyz, \quad xy \equiv az^2, \quad xz \equiv by^2 \pmod{p},$$

откуда получим

$$x^4 \equiv a^2 b^2 y^2 z^2 \equiv a^2 b x z^3, \quad x(x^3 - Bz^3) \equiv 0 \pmod{p},$$

и, наконец,

$$x \equiv y \equiv z \equiv 0 \pmod{p}.$$

Поэтому каждое простое число p , для которого A не является кубическим вычетом, должно быть рассматриваемо в области целых чисел, зависящих от $\sqrt[3]{A}$, как простой множитель. Норма этого множителя равна, очевидно, p^3 .

Останавливаясь, наконец, на четвертом случае, заметим, что множители числа

$$\xi = \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3},$$

принадлежащие к p , тождественны множителям числа

$$x^2 - abyz + (xy - az^2) \sqrt[3]{A} = 3\xi(x - z \sqrt[3]{B}),$$

принадлежащим к p , если $x^3 - Bz^3$ не делится на p и множителям числа

$$x^2 - abyz + (xz - by^2) \sqrt[3]{B} = 3\xi (x - y \sqrt[3]{A}),$$

принадлежащим к p , если $x^3 - Ay^3$ не делится на p .

Заметим также, что множители числа

$$x^2 - abyz + (xz - by^2) \sqrt[3]{B},$$

принадлежащие к p , тождественны множителям числа

$$\begin{aligned} ab(xz - by^2) + (x^2 - abyz) \sqrt[3]{A} = \\ = \sqrt[3]{A} \{ x^2 - abyz + (xz - by^2) \sqrt[3]{B} \}, \end{aligned}$$

принадлежащим к p , так как p не делит A .

Значит, множители числа

$$\xi = \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3},$$

принадлежащие к p , тождественны множителям некоторого числа формы

$$R + S \sqrt[3]{A},$$

принадлежащим к P , причем R и S — целые рациональные числа, или два числа

$$x^3 - Ay^3, \quad x^3 - Bz^3$$

делятся на p одновременно.

Здесь нужно различать два случая:

1) сравнение $t^3 \equiv A \pmod{p}$ имеет одно решение:

$$t \equiv \tau \pmod{p};$$

2) сравнение $t^3 \equiv A \pmod{p}$ имеет три решения:

$$t \equiv \tau_1, \quad t \equiv \tau_2, \quad t \equiv \tau_3 \pmod{p}.$$

Выберем, что всегда возможно, числа $\tau, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ так, чтобы разности

$$\tau^3 - A, \quad \tau_1^3 - A, \quad \tau_2^3 - A, \quad \tau_3^3 - A$$

не делились на p^2 .

Остановимся сначала на случае, когда сравнение $t^3 \equiv A \pmod{p}$ имеет одно решение $t \equiv \tau \pmod{p}$. В этом случае каждое целое число формы

$$R + S\sqrt[3]{A}$$

имеет все множители числа

$$\tau - \sqrt[3]{A},$$

принадлежащие к p , если только это число $R + S\sqrt[3]{A}$ имеет множитель, общий с p , ибо

$$\begin{aligned} \frac{\tau^3 - A}{p} (R + S\sqrt[3]{A}) &= -\frac{\tau^3 - A}{p} S (\tau - \sqrt[3]{A}) + (\tau^3 - A) \frac{R + S\tau}{p} = \\ &= (\tau - \sqrt[3]{A}) \left\{ \frac{R + S\tau}{p} (\tau^2 + \tau \sqrt[3]{A} + b \sqrt[3]{B}) - \frac{\tau^3 - A}{p} S \right\}, \end{aligned}$$

а из сравнения

$$R^3 + AS^3 \equiv 0 \pmod{p}$$

следует

$$R + s\tau \equiv 0 \pmod{p}.$$

Что касается числа ξ вида

$$\frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3},$$

имеющего множитель, общий с p , то для него применимо

наше предыдущее замечание о том, что это число должно иметь все множители числа $\tau - \sqrt[3]{A}$, принадлежащие к p , исключая случай

$$x^3 \equiv Ay^3 \equiv Bz^3 \pmod{p}.$$

Сравнения

$$x^3 \equiv Ay^3 \equiv Bz^3 \pmod{p}$$

легко привести к следующим:

$$x \equiv \tau y, \quad by \equiv \tau z, \quad \tau x \equiv abz \pmod{p}.$$

Предполагая теперь, что эти сравнения удовлетворяются, и обращая внимание на равенство

$$\begin{aligned} & \frac{\tau^3 - A}{p} \cdot \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3} = \\ & = (\tau^2 + \tau \sqrt[3]{A} + b \sqrt[3]{B}) \frac{\frac{\tau x - abz}{p} + \frac{\tau y - x}{p} \sqrt[3]{A} + \frac{\tau z - by}{p} \sqrt[3]{B}}{3}, \end{aligned}$$

мы видим, что рассматриваемое число ξ имеет все множители числа

$$\tau^2 + \tau \sqrt[3]{A} + b \sqrt[3]{B},$$

принадлежащие к p .

Что касается чисел

$$\tau - \sqrt[3]{A}, \quad \tau^2 + \tau \sqrt[3]{A} + b \sqrt[3]{B},$$

то они имеют только различные множители числа p , так как разность

$$(\tau^2 + \tau \sqrt[3]{A} + b \sqrt[3]{B}) - (\tau - \sqrt[3]{A})(\tau + 2 \sqrt[3]{A}),$$

равная $3b \sqrt[3]{B}$, не имеет никакого множителя, общего с p . Следовательно, если число ξ имеет все множители чисел

$$\tau - \sqrt[3]{A}, \quad \tau^2 + \tau \sqrt[3]{A} + b \sqrt[3]{B},$$

принадлежащие к p , тогда ξ должно иметь также все множители произведения

$$(\tau - \sqrt[3]{A})(\tau^2 + \tau \sqrt[3]{A} + b \sqrt[3]{B}) = \tau^3 - A,$$

принадлежащие к p , т. е. это число ξ должно делиться на p . И обратно, если число ξ делится на p , это число ξ имеет все множители чисел

$$\tau - \sqrt[3]{A}, \quad \tau^2 + \tau \sqrt[3]{A} + b \sqrt[3]{B},$$

принадлежащие к p . Поэтому мы положим

$$p = \gamma_p \delta_p,$$

определяя γ_p как общий множитель p и $\tau - \sqrt[3]{A}$, и δ_p — как общий множитель p и $\tau^2 + \tau \sqrt[3]{A} + b \sqrt[3]{B}$, и будем говорить, что число ξ делится на произведение $\gamma_p^m \delta_p^n$, если произведение

$$\left(\frac{\tau^3 - A}{p}\right)^{m+n} \xi$$

делится на

$$(\tau - \sqrt[3]{A})^m (\tau^2 + \tau \sqrt[3]{A} + b \sqrt[3]{B})^n.$$

Множителю γ_p мы приписываем норму p и множителю δ_p — норму p^2 , так как норма $\tau - \sqrt[3]{A}$, равная $\tau^3 - A$, делится на p , а норма $\tau^2 + \tau \sqrt[3]{A} + b \sqrt[3]{B}$, равная $(\tau^3 - A)^2$, делится на p^2 , так что мы будем иметь

$$\text{норма } p = p^2 = (\text{норма } \gamma_p) \cdot (\text{норма } \delta_p).$$

Заметим, что для делимости

$$\xi = \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3}$$

на γ_p необходимо и достаточно удовлетворить сравнению [2]

$$b(x + y\tau) + z\tau^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

а для делимости

$$\xi = \frac{x + y\sqrt[3]{A} + z\sqrt[3]{B}}{3}$$

на δ_p необходимо и достаточно удовлетворить сравнениям

$$x \equiv y\tau \text{ и } by \equiv z\tau \pmod{p}.$$

Рассматривая, наконец, случай, когда сравнение

$$t^3 \equiv A \pmod{p}$$

имеет три решения

$$t \equiv \tau_1, \quad t \equiv \tau_2, \quad t \equiv \tau_3 \pmod{p},$$

мы определим число p как произведение трех множителей

$$p = \lambda'_p \lambda''_p \lambda'''_p,$$

где

$$\lambda'_p \text{ общий делитель } p \text{ и } \tau_1 - \sqrt[3]{A},$$

$$\lambda''_p \text{ общий делитель } p \text{ и } \tau_2 - \sqrt[3]{A},$$

$$\lambda'''_p \text{ общий делитель } p \text{ и } \tau_3 - \sqrt[3]{A}.$$

Действительно, каждое число ξ формы

$$R + S\sqrt[3]{A},$$

норма которого делится на p , имеет все множители числа $\tau_1 - \sqrt[3]{A}$, или числа $\tau_2 - \sqrt[3]{A}$, или числа $\tau_3 - \sqrt[3]{A}$, принадлежащие к p , так как из сравнения

$$R^3 + AS^3 \equiv 0 \pmod{p}$$

следует одно из сравнений

$$R + S\tau_1 \equiv 0, \quad R + S\tau_2 \equiv 0, \quad R + S\tau_3 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Этот факт очевиден для каждого числа

$$\xi = \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3},$$

исключая случай

$$x^3 \equiv Ay^3 \equiv Bz^3 \pmod{p}.$$

Система сравнений

$$x^3 \equiv Ay^3 \equiv Bz^3, \quad x^3 + Ay^3 + Bz^3 - 3abxyz \equiv 0 \pmod{p}$$

приводится к одной из следующих трех систем:

- 1) $x \equiv y\tau_1, \quad by \equiv z\tau_1 \pmod{p},$
- 2) $x \equiv y\tau_2, \quad by \equiv z\tau_2 \pmod{p},$
- 3) $x \equiv y\tau_3, \quad by \equiv z\tau_3 \pmod{p}.$

Предполагая, например,

$$x \equiv y\tau_1 \quad \text{и} \quad by \equiv z\tau_1 \pmod{p},$$

легко доказать, что число

$$\xi = \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3}$$

имеет все множители числа $\tau_1^2 + \tau_1 \sqrt[3]{A} + b \sqrt[3]{B}$, принадлежащие к p . Но множители числа $\tau_1^2 + \tau_1 \sqrt[3]{A} + b \sqrt[3]{B}$, принадлежащие к p , тождественны множителям произведения

$$(\tau_2 - \sqrt[3]{A})(\tau_3 - \sqrt[3]{A}) = \tau_2 \tau_3 - (\tau_2 + \tau_3) \sqrt[3]{A} + b \sqrt[3]{B},$$

принадлежащим к p , так как разность

$$\begin{aligned} & (\tau_1^2 + \tau_1 \sqrt[3]{A} + b \sqrt[3]{B}) - (\tau_2 - \sqrt[3]{A})(\tau_3 - \sqrt[3]{A}) = \\ & = \tau_1^2 - \tau_2 \tau_3 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \sqrt[3]{A} \end{aligned}$$

делится на $p[^3]$; достаточно, поэтому, умножить p на число

$$\frac{\tau_1^3 - A}{p} \cdot \frac{\tau_2^3 - A}{p} \cdot \frac{\tau_3^3 - A}{p},$$

взаимно простое с p , после чего число

$$p \cdot \frac{\tau_1^3 - A}{p} \cdot \frac{\tau_2^3 - A}{p} \cdot \frac{\tau_3^3 - A}{p}$$

будет делиться на $\tau_1^2 + \tau_1 \sqrt[3]{A} + b \sqrt[3]{B}$ и на $(\tau_2 - \sqrt[3]{A})(\tau_3 - \sqrt[3]{A})$.
Значит, в рассматриваемом случае каждое целое число

$$\xi = \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3},$$

имея общий множитель с p , имеет все множители: либо числа $\tau_1 - \sqrt[3]{A}$, либо числа $\tau_2 - \sqrt[3]{A}$, либо числа $\tau_3 - \sqrt[3]{A}$, принадлежащие к p .

В то же время легко видеть, что условие, чтобы ξ имело все множители либо числа $\tau_1 - \sqrt[3]{A}$, либо числа $\tau_2 - \sqrt[3]{A}$, либо числа $\tau_3 - \sqrt[3]{A}$, принадлежащие к p , выражается соответствующими сравнениями:

$$\begin{aligned} & \text{либо } b(x + y\tau_1) + z\tau_1^2 \equiv 0 \pmod{p}, \\ & \text{либо } b(x + y\tau_2) + z\tau_2^2 \equiv 0 \pmod{p}, \\ & \text{либо } b(x + y\tau_3) + z\tau_3^2 \equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Числа

$$\tau_1 - \sqrt[3]{A}, \quad \tau_2 - \sqrt[3]{A}, \quad \tau_3 - \sqrt[3]{A}$$

имеют только различные множители, принадлежащие к p , так как их разности не имеют никаких множителей, общих с p . Следовательно, все множители каждого из этих чисел, принадлежащие к p , приводятся к простым множителям.

Наконец, если число ξ делится на p , это число ξ имеет все множители чисел

$$\tau_1 - \sqrt[3]{A}, \quad \tau_2 - \sqrt[3]{A}, \quad \tau_3 - \sqrt[3]{A},$$

принадлежащие к p , и обратно, если ξ имеет все множители чисел

$$\tau_1 - \sqrt[3]{A}, \quad \tau_2 - \sqrt[3]{A}, \quad \tau_3 - \sqrt[3]{A},$$

принадлежащие к p , это число ξ делится на p . Вот почему в рассматриваемом случае мы положили

$$p = \lambda'_p \lambda''_p \lambda'''_p,$$

определив

$$\lambda'_p \text{ как общий множитель } p \text{ и } \tau_1 - \sqrt[3]{A},$$

$$\lambda''_p \text{ как общий множитель } p \text{ и } \tau_2 - \sqrt[3]{A},$$

$$\lambda'''_p \text{ как общий множитель } p \text{ и } \tau_3 - \sqrt[3]{A}.$$

Множителям λ'_p , λ''_p , λ'''_p мы припишем нормы, равные p , и условимся говорить, что число ξ делится на произведение

$$(\lambda'_p)^l (\lambda''_p)^m (\lambda'''_p)^n,$$

если произведение

$$\left(\frac{\tau_1^3 - A}{p}\right)^l \cdot \left(\frac{\tau_2^3 - A}{p}\right)^m \cdot \left(\frac{\tau_3^3 - A}{p}\right)^n \cdot \xi$$

делится на

$$(\tau_1 - \sqrt[3]{A})^l (\tau_2 - \sqrt[3]{A})^m (\tau_3 - \sqrt[3]{A})^n.$$

§ 4. Полагая теперь $p=3$, мы рассмотрим отдельно следующие случаи:

- I) $a \equiv 0$ или $b \equiv 0 \pmod{3}$,
- II) $a^2 - b^2 \equiv \pm 3 \pmod{9}$,
- III) $a^2 - b^2 \equiv \pm 9 \pmod{27}$,
- IV) $a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{27}$.

В первом из этих случаев любое целое число ξ , зависящее от $\sqrt[3]{A}$, имеет форму

$$x + y\sqrt[3]{A} + z\sqrt[3]{B},$$

где x, y, z — числа целые рациональные, а условие, что это число имеет общий множитель с 3, выражается сравнением

$$x \equiv 0 \pmod{3}.$$

Легко видеть, что в этом случае число 3 играет ту же роль, что и любое простое число, делящее A ; таким образом положим

$$3 = \alpha_3^3,$$

обозначая через α_3 общий множитель чисел 3 и $\sqrt[3]{A}$ или 3 и $\sqrt[3]{B}$.

Пусть теперь

$$a^2 - b^2 \equiv \pm 3 \pmod{9}.$$

Тогда любое целое число ξ имеет также форму

$$x + y\sqrt[3]{A} + z\sqrt[3]{B},$$

число x, y, z — целые рациональные. Что касается условия, что это число

$$\xi = x + y\sqrt[3]{A} + z\sqrt[3]{B}$$

имеет общий множитель с 3, то оно выражается сравнением

$$x^3 + Ay^3 + Bz^3 \equiv 0 \pmod{3},$$

которое эквивалентно более простому сравнению

$$x + Ay + Bz \equiv 0 \pmod{3}.$$

А если последнее сравнение удовлетворяется, число

$$\xi = x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}$$

имеет все множители числа

$$a \sqrt[3]{A} - b \sqrt[3]{B},$$

принадлежащие 3, так как

$$\begin{aligned} & \frac{a^3 A - b^3 B}{3} (x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}) = \\ & = (a \sqrt[3]{A} - b \sqrt[3]{B}) \left\{ \begin{aligned} & \frac{x + Ay + Bz}{3} (a^2 b^2 + A \sqrt[3]{A} + B \sqrt[3]{B}) - \\ & - B \frac{b^2 - 1}{3} (aby + by \sqrt[3]{A} + az \sqrt[3]{A}) - \\ & - A \frac{a^2 - 1}{3} (abz + by \sqrt[3]{B} + az \sqrt[3]{B}) \end{aligned} \right\}, \end{aligned}$$

а число

$$\frac{a^3 A - b^3 B}{3} = \frac{a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{3}$$

не делится на 3. Следовательно, все множители числа $a \sqrt[3]{A} - b \sqrt[3]{B}$, принадлежащие к 3, приводятся к одному простому, норма которого равна 3.

Заметим, наконец, что

$$\frac{(a \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B})^3}{3} = \frac{a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{3} - a^3 b^2 \sqrt[3]{A} + a^2 b^3 \sqrt[3]{B}$$

есть число целое и не имеет множителя, общего с 3, так как его норма, равная

$$\pm \left(\frac{a^3 A - b^3 B}{3} \right)^2,$$

не делится на 3.

В соответствии с этим в случае

$$a^2 - b^2 \equiv \pm 3 \pmod{9}$$

мы положим

$$3 = v^3,$$

определяя v как общий множитель 3 и $a\sqrt[3]{A} - b\sqrt[3]{B}$, и будем говорить, что число ξ делится на v^n , если норма этого числа делится на 3^n .

Касаясь далее случая

$$a^2 - b^2 \equiv 9 \pmod{27},$$

мы напомним сначала, что в этом случае число

$$\xi = \frac{x + y\sqrt[3]{A} + z\sqrt[3]{B}}{3}$$

будет целым, если удовлетворяются два сравнения

$$y \equiv ax \text{ и } z \equiv bx \pmod{3}.$$

Для того, чтобы удовлетворить этим сравнениям, мы можем положить

$$x = abs + 3u, \quad y = bs + 3v, \quad z = as + 3w,$$

обозначая через s, u, v, w целые рациональные числа. После этого норма ξ , равная

$$\pm \frac{x^3 + Ay^3 + Bz^3 - 3abxyz}{27},$$

будет сравнима по модулю 3 с выражением

$$\pm (u + av + bw)^2 (abs + u + av + bw).$$

Следовательно, наше число ξ имеет общий множитель с 3 только при

$$u + av + bw \equiv 0 \pmod{3}$$

или при

$$abs + u + av + bw \equiv 0 \pmod{3}.$$

Но

$$u + av + bw = \frac{x + ay + bz}{3} - abs \equiv \frac{ay + bz - 2x}{3} \pmod{3}.$$

$$abs + u + av + bw = \frac{x + ay + bz}{3},$$

поэтому мы видим, что в случае

$$a^2 - b^2 \equiv \pm 9 \pmod{27},$$

число

$$\xi = \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3}$$

имеет общий множитель с 3, если целые числа x, y, z , удовлетворяющие сравнениям

$$x \equiv ay \equiv bz \pmod{3},$$

удовлетворяют также сравнению

$$ay + bz - 2x \equiv 0 \pmod{9}$$

или сравнению

$$x + ay + bz \equiv 0 \pmod{9}.$$

С другой стороны, если

$$ay + bz - 2x \equiv 0 \pmod{9} \text{ или } x + ay + bz \equiv 0 \pmod{9}$$

число

$$\xi = \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3}$$

имеет соответственно все множители числа

$$\frac{ab + b \sqrt[3]{A} + a \sqrt[3]{B}}{3}$$

или числа

$$\frac{(a \sqrt[3]{A} - b \sqrt[3]{B})^2}{3ab} = \frac{b \sqrt[3]{A} + a \sqrt[3]{B} - 2ab}{3},$$

принадлежащие к 3, так как

$$\begin{aligned} & ab \cdot \frac{a^2 - b^2}{9} \cdot \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3} = \\ &= \frac{a^2 - b^2}{9} \left\{ \frac{ab + b \sqrt[3]{A} + a \sqrt[3]{B}}{3} x + \frac{ay - x}{3} (b \sqrt[3]{A} - a \sqrt[3]{B}) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{ay + bz - 2x}{3} a \sqrt[3]{B} \right\} = \frac{ab + b \sqrt[3]{A} + a \sqrt[3]{B}}{3} \left\{ \frac{a^2 - b^2}{9} x + \right. \\ & \quad \left. + \frac{ay - x}{3} \frac{a \sqrt[3]{A} + b \sqrt[3]{B} - a^2 - b^2}{3} + \frac{ay + bz - 2x}{9} a (a - \sqrt[3]{A}) \right\} \end{aligned}$$

II

$$\begin{aligned} & ab \left(\frac{a^2 - b^2}{9} \right)^2 \cdot \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3} = \\ &= \left(\frac{a^2 - b^2}{9} \right)^2 \left\{ bz \frac{b \sqrt[3]{A} + a \sqrt[3]{B} - 2ab}{3} + b \frac{ay - bz}{3} (\sqrt[3]{A} - a) + \right. \\ & \quad \left. + ab \frac{x + ay + bz}{3} \right\} = \frac{b \sqrt[3]{A} + a \sqrt[3]{B} - 2ab}{3} \left\{ \left(\frac{a^2 - b^2}{9} \right)^2 bz - \right. \\ & \quad \left. - \frac{a^2 - b^2}{9} \cdot \frac{ay - bz}{3} \cdot \frac{b^2 + a \sqrt[3]{A} + b \sqrt[3]{B}}{3} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{x + ay + bz}{9} \left(\frac{ab + b \sqrt[3]{A} + a \sqrt[3]{B}}{3} \right)^2 \}.$$

Числа

$$\frac{ab + b \sqrt[3]{A} + a \sqrt[3]{B}}{3} \quad \text{и} \quad \frac{b \sqrt[3]{A} + a \sqrt[3]{B} - 2ab}{3}$$

имеют только различные множители числа 3, потому что их разность, равная ab , не имеет общего множителя с 3.

В то же время легко видеть, что каждое число ξ , делящееся на 3, должно иметь все множители произведения

$$\left(\frac{ab + b \sqrt[3]{A} + a \sqrt[3]{B}}{3} \right)^2 \cdot \frac{b \sqrt[3]{A} + a \sqrt[3]{B} - 2ab}{3} = \frac{ab(a^2 - b^2)^2}{27},$$

принадлежащие к 3, и обратно, — если ξ имеет все множители чисел

$$\left(\frac{ab + b \sqrt[3]{A} + a \sqrt[3]{B}}{3} \right)^2, \quad \frac{b \sqrt[3]{A} + a \sqrt[3]{B} - 2ab}{3},$$

принадлежащие к 3, то это число ξ делится на 3.

Поэтому в случае

$$a^2 - b^2 \equiv \pm 9 \pmod{27}$$

мы положим

$$3 = [3]^2 \{3\},$$

определяя

$$[3] \text{ как общий множитель } 3 \text{ и } \frac{ab + b \sqrt[3]{A} + a \sqrt[3]{B}}{3},$$

$$\{3\} \text{ как общий множитель } 3 \text{ и } \frac{b \sqrt[3]{A} + a \sqrt[3]{B} - 2ab}{3}.$$

Этим простым множителям мы припишем нормы, равные 3, и будем говорить, что число ξ делится на произведение

$$[3]^m \{3\}^n,$$

если произведение

$$(ab)^{m+n} \left(\frac{a^2 - b^2}{9} \right)^{m+2n} \cdot \xi$$

делится на

$$\left(\frac{ab + b \sqrt[3]{A} + a \sqrt[3]{B}}{3} \right)^m \left(\frac{b \sqrt[3]{A} + a \sqrt[3]{B} - 2ab}{3} \right)^n.$$

Наконец, в случае

$$a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{27}$$

мы положим также

$$3 = [3]^2 \{3\},$$

определяя

$$[3] \text{ как общий множитель } 3 \text{ и } \frac{4ab + b \sqrt[3]{A} + 16a \sqrt[3]{B}}{3}$$

и

$$\begin{aligned} \{3\} \text{ как общий множитель } 3 \text{ и } \frac{(4a \sqrt[3]{A} - b \sqrt[3]{B})^2}{3ab} = \\ = \frac{b \sqrt[3]{A} + 16a \sqrt[3]{B} - 8ab}{3}. \end{aligned}$$

Этим простым множителям мы припишем норму, равную 3, и будем говорить, что число ξ делится на

$$[3]^m \{3\}^n,$$

если произведение

$$(ab)^{m+n} \cdot \left(\frac{64a^2 - b^2}{9} \right)^{m+2n} \cdot \xi$$

делится на

$$\left(\frac{4ab + b \sqrt[3]{A} + 16a \sqrt[3]{B}}{3} \right)^m \cdot \left(\frac{b \sqrt[3]{A} + 16a \sqrt[3]{B} - 8ab}{3} \right)^n.$$

В обоих случаях — III и IV — условие, что число

$$\xi = \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3}$$

делится на [3], выражается сравнением

$$ay + bz - 2x \equiv 0 \pmod{9},$$

а условие, что это число делится на {3}, выражается сравнением^[4]

$$x + ay + bz \equiv 0 \pmod{9}.$$

§ 5. После того как определены простые множители и степени этих множителей, легко определить *произведение степеней различных простых множителей* как делитель всех чисел ξ , которые делятся на эти степени, и только этих чисел ξ .

Этому произведению мы приписываем норму, равную произведению норм простых составляющих множителей, возведенных в соответствующие степени, которые показывают, сколько раз наше произведение *содержит* каждый из этих множителей.

Что касается разложения на простые множители числа ξ , то оно приводится к следующему.

Определим сначала все простые делители p нормы ξ и разложим эти делители на простые множители, определенные раньше, тем самым будут найдены все простые множители, которые могут делить рассматриваемое число ξ , и остается найти для каждого из этих множителей наивысшие степени, которые действительно делят ξ .

Тогда разложение ξ на простые множители будет закончено, так что можно рассматривать ξ как произведение найденных выше степеней, и обратно, как мы будем говорить, это произведение приводится к ξ .

Нужно заметить здесь, что в теории разложения на простые множители все числа ξ , нормы которых равны единице, рассматривают как единицы; их называют *комплексными единицами*.

Все комплексные единицы, взятые со знаком $+$ или $-$,

равны целым положительным или отрицательным степеням основной комплексной единицы.

Не останавливаясь на верных, но трудных методах нахождения основной комплексной единицы, мы заметим, что для малых значений a и b легко найти комплексные единицы путем подбора, рассматривая несколько чисел ξ , содержащих одни и те же простые множители.

Обозначая через ω простой множитель или произведение нескольких простых множителей (или, наконец, целое число ξ , зависящее от $\sqrt[3]{A}$), мы будем говорить, что два числа ξ и ξ' сравнимы по модулю ω , если их разность $\xi - \xi'$ делится на ω .

В соответствии с этим мы разобьем все числа ξ на несколько классов по модулю ω , относя к одному классу все числа, сравнимые по модулю ω .

Число этих классов равно норме ω .

Мы рассмотрим это разбиение на классы по модулю 3 в случае

$$a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{9}.$$

Норма 3 равна 27, и, следовательно, можно разбить все целые числа ξ на 27 классов по модулю 3.

Предполагая

$$a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{9},$$

мы разобьем эти 27 классов на 6 следующих групп.

1) Один класс чисел, делящихся на 3.

Эти числа имеют вид

$$x + y\sqrt[3]{A} + z\sqrt[3]{B},$$

где x, y, z — целые рациональные числа, удовлетворяющие сравнениям

$$x \equiv ay \equiv bz \pmod{3}.$$

2) Два класса чисел, делящихся на произведение $[3]\{3\}$ и не делящихся на 3.

Эти числа имеют вид

$$x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B},$$

где x, y, z — целые рациональные числа, удовлетворяющие сравнениям

$$x - ay \equiv \pm 1, \quad x + ay + bz \equiv 0 \pmod{3}.$$

3) Шесть классов чисел, делящихся на $[3]$ и не делящихся на $\{3\}$.

Эти числа имеют дробный вид

$$\frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3},$$

где x, y, z — целые рациональные числа, удовлетворяющие сравнениям

$$x \equiv \pm 1 \pmod{3}, \quad ay - x \equiv 0, \quad \pm 3 \pmod{9}, \\ ay + bz - 2x \equiv 0 \pmod{9}.$$

4) Шесть классов чисел, делящихся на $\{3\}$ и не делящихся на $[3]$.

Эти числа имеют также дробный вид

$$\frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3},$$

где x, y, z — целые рациональные числа, удовлетворяющие сравнениям

$$x \equiv \pm 1 \pmod{3}, \quad ay - x \equiv 0, \quad \pm 3 \pmod{9}, \\ x + ay + bz \equiv 0 \pmod{9}.$$

5) Шесть классов чисел вида

$$x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B},$$

которые не имеют никаких общих множителей с 3.

Для этих шести классов целые рациональные числа x , y , z удовлетворяют одной из шести следующих систем сравнений:

$$\left. \begin{array}{l} x - ay \equiv 0 \\ x - bz \equiv +1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x - ay \equiv 0 \\ x - bz \equiv -1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x - ay \equiv +1 \\ x - bz \equiv 0 \end{array} \right\} \quad (\text{мод. } 3).$$

$$\left. \begin{array}{l} x - ay \equiv -1 \\ x - bz \equiv 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x - ay \equiv +1 \\ x - bz \equiv +1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x - ay \equiv -1 \\ x - bz \equiv -1 \end{array} \right\}$$

6) Шесть классов чисел дробного вида

$$\frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3},$$

которые не имеют никаких общих множителей с 3.

Для последних шести классов целые рациональные числа x , y , z удовлетворяют одной из следующих систем сравнений:

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv \pm 1 \pmod{3} \\ ay \equiv x \pmod{9} \\ bz \equiv 4x \pmod{9} \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} x \equiv \pm 1 \pmod{3} \\ ay \equiv 4x \pmod{9} \\ bz \equiv x \pmod{9} \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} x \equiv \pm 1 \pmod{3} \\ ay \equiv 7x \pmod{9} \\ bz \equiv 7x \pmod{9} \end{array} \right\}.$$

Мы имеем здесь три группы 3), 4) и 6) чисел ξ дробного вида, по отношению к которым легко доказать следующие утверждения.

Произведение числа из группы 3) или группы 4) на число той же группы или число из групп 5) и 6) принадлежит также соответственно группе 3) или 4) и, следовательно, оно имеет дробный вид.

Произведение числа из группы 3) на число из группы 4) принадлежит группе 1) или группе 2).

Произведение двух чисел из группы 6) принадлежит группе 5).

Произведение числа из группы 6) на число из группы 5) принадлежит группе 6).

Действительно, пусть

$$\xi_1 = \frac{x_1 + y_1 \sqrt[3]{A} + z_1 \sqrt[3]{B}}{3} \quad \text{и} \quad \xi_2 = \frac{x_2 + y_2 \sqrt[3]{A} + z_2 \sqrt[3]{B}}{3}$$

два числа группы 6) и

$$\xi' = x' + y' \sqrt[3]{A} + z' \sqrt[3]{A}$$

число группы 5).

Тогда

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 + ab(y_1 z_2 + z_1 y_2) = \\ & = (x_1 - ay_1)(x_2 - ay_2) + ay_1(x_2 - 5ay_2 + bz_2) + \\ & + ay_2(x_1 - 5ay_1 + bz_1) + 9a^2 y_1 y_2 \equiv 0 \pmod{9}, \\ & a(x_1 y_2 + x_2 y_1 + az_1 z_2) = \\ & = (ay_1 - bz_1)(ay_2 - bz_2) + ay_1(x_2 - 5ay_2 + bz_2) + \\ & + ay_2(x_1 - 5ay_1 + bz_1) + 9a^2 y_1 y_2 + (a^2 - b^2) z_1 z_2 \equiv 0 \pmod{9}, \\ & b(x_1 z_2 + x_2 z_1 + by_1 y_2) = \\ & = (ay_1 - bz_1)(ay_2 - bz_2) + bz_1(x_2 - 5bz_2 + ay_2) + \\ & + bz_2(x_1 - 5bz_1 + ay_1) + 9b^2 z_1 z_2 + (b^2 - a^2) y_1 y_2 \equiv 0 \pmod{9}, \\ & x_1 x' + ab(y_1 z' + z_1 y') = (x_1 - ay_1)x' + ay'(bz_1 - ay_1) + \\ & + ay_1(x' + bz' + ay') \equiv \pm 1 \pmod{3}, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} x_1 - 5ay_1 + bz_1 & \equiv x_2 - 5ay_2 + bz_2 \equiv x_1 - 5bz_1 + \\ & + ay_1 \equiv x_2 - 5bz_2 + ay_2 \equiv 0 \pmod{9} \end{aligned}$$

и

$$x' + bz' + ay' \equiv \pm 1 \pmod{3}.$$

Следовательно, произведение

$$\begin{aligned} \xi_1 \xi_2 & = \frac{x_1 x_2 + ab(y_1 z_2 + z_1 y_2)}{9} + \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1 + az_1 z_2}{9} \sqrt[3]{A} + \\ & + \frac{x_1 z_2 + x_2 z_1 + by_1 y_2}{9} \sqrt[3]{B} \end{aligned}$$

принадлежит к группе 5), а произведение

$$\xi_1 \xi' = \frac{x_1 x' + ab(y_1 z' + z_1 y')}{3} + \frac{x_1 y' + x' y_1 + az_1 z'}{3} \sqrt[3]{A} + \\ + \frac{x_1 z' + x' z_1 + by_1 y'}{3} \sqrt[3]{B}$$

принадлежит к группе 6).

В частности квадрат каждого числа из группы 6) принадлежит группе 5).

Комплексные единицы принадлежат к группам 5) и 6).

Следовательно, если существуют комплексные единицы дробного вида

$$\frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3},$$

тогда их квадраты будут иметь вид

$$X + Y \sqrt[3]{A} + Z \sqrt[3]{B},$$

где X, Y, Z — целые рациональные числа.

С помощью комплексной единицы дробного вида мы можем представить каждое число из группы 6) как произведение этой единицы на число группы 5).

§ 6. Мы будем называть теперь простые множители и их произведения, определенные ранее, просто *множителями*.

Если множитель не приводится ни к какому существующему числу ξ , мы назовем его *идеальным числом*. Назовем *произведением двух множителей* ω и ω' такой множитель ω'' , который содержит каждый простой множитель точно столько раз, сколько ω и ω' вместе.

Два идеальных числа назовем *эквивалентными*, когда их произведения на один и тот же множитель приводятся к существующим числам ξ .

В соответствии с этим разобьем все идеальные числа на *классы* таким образом, что два идеальных числа принадлежат к одному классу или различным классам, смотря по тому — эквивалентные они или не эквивалентные.

Число этих классов, к которым добавим еще класс существующих чисел ξ , всегда конечно.

В самом деле, пусть ω — идеальное число и N — норма ω .

Обозначим через g целое рациональное число, определенное двумя неравенствами

$$g^3 \leq N < (g+1)^3,$$

и рассмотрим все числа

$$x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B},$$

где x, y, z имеют значение

$$0, 1, 2, \dots, g.$$

Между этими числами обязательно существуют два различные

$$\xi' = x' + y' \sqrt[3]{A} + z' \sqrt[3]{B} \quad \text{и} \quad \xi'' = x'' + y'' \sqrt[3]{A} + z'' \sqrt[3]{B},$$

которые сравнимы по модулю ω , так как их число $(g+1)^3$ больше нормы ω . Разность

$$\xi' - \xi'' = (x' - x'') + (y' - y'') \sqrt[3]{A} + (z' - z'') \sqrt[3]{B}$$

будет делиться на ω , так что мы можем рассматривать эту разность как произведение ω на другой множитель ω' , норму которого обозначим через N' .

При этом норма $\xi' - \xi''$ будет равна произведению NN' норм ω и ω' и меньше

$$g^3(1 + A + B + 3ab),$$

так как

$$-g \leq x' - x'' < g, \quad -g \leq y' - y'' < g, \quad -g \leq z' - z'' < g.$$

Следовательно

$$NN' < g^3(1 + A + B + 3ab) \leq N(1 + A + B + 3ab).$$

и

$$N' < 1 + A + B + 3ab.$$

Мы видим, что для каждого идеального числа ω существует другое идеальное число ω' такое, что произведение $\omega\omega'$ приводится к существующему числу ξ , и норма которого меньше, чем

$$1 + A + B + 3ab.$$

Таким образом мы добились того, что можем рассматривать только те множители, нормы которых меньше $1 + A + B + 3ab$ и число которых, очевидно, конечно. Пусть

$$\omega', \omega'', \omega''', \dots, \omega^{(m)}$$

— эти множители.

Остается найти между ними те, которые приводятся к существующим числам, и разбить другие на классы эквивалентных чисел.

Для этого, очевидно, достаточно определить все существующие числа ξ , к которым могут приводиться

$$\omega', \omega'', \omega''', \dots, \omega^{(m)}$$

и произведения

$$\begin{aligned} &\omega' \omega', \omega' \omega'', \omega' \omega''', \dots, \omega' \omega^{(m)}, \\ &\omega'' \omega'', \omega'' \omega''', \dots, \omega'' \omega^{(m)}, \\ &\dots \dots \dots \omega^{(m)} \omega^{(m)}. \end{aligned}$$

Нормы этих произведений меньше $(1 + A + B + 3ab)^2 = H$.

Положим теперь, что мы уже нашли комплексную единицу $\xi_0 > 1$.

В теории разложения на множители числа

$$\pm \xi, \pm \xi_0 \xi, \pm \xi_0^{-1} \xi, \pm \xi_0^2 \xi, \pm \xi_0^{-2} \xi, \dots$$

играют одну и ту же роль, и поэтому можно всегда выбрать между ними число, лежащее между 1 и ξ_0 .

Выбирая таким образом числа

$$\xi = \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3},$$

нормы которых меньше H , будем иметь неравенства

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3} < \xi_0, \\ 2 \frac{x^3 + Ay^3 + Bz^3 - 3abxyz}{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}} &= \\ &= (x - y \sqrt[3]{A})^2 + (x - z \sqrt[3]{B})^2 + (y \sqrt[3]{A} - z \sqrt[3]{B})^2 < 18H \end{aligned}$$

и далее

$$\begin{aligned} -\sqrt{18H} &< x - y \sqrt[3]{A} < \sqrt{18H}, \quad -\sqrt{18H} < x - z \sqrt[3]{B} < \sqrt{18H}, \\ -\sqrt{18H} &< y \sqrt[3]{A} - z \sqrt[3]{B} < \sqrt{18H}, \\ 3 - 2\sqrt{18H} &< 3x < 3\xi_0 + 2\sqrt{18H}, \\ 3 - 2\sqrt{18H} &< 3y \sqrt[3]{A} < 3\xi_0 + 2\sqrt{18H}, \\ 3 - 2\sqrt{18H} &< 3z \sqrt[3]{B} < 3\xi_0 + 2\sqrt{18H}. \end{aligned}$$

Из этого следует, что для того, чтобы определить точное число классов идеалов, достаточно рассмотреть конечное число существующих чисел ξ и разложить их на множители.

Эти общие рассуждения могут быть упрощены для частных случаев, как мы увидим дальше.

§ 7. Частные случаи.

I. $a=2, \quad b=1, \quad A=2, \quad B=4.$

В этом случае числа ξ имеют вид

$$x + y \sqrt[3]{2} + z \sqrt[3]{4},$$

где x, y, z — целые рациональные числа.

Что касается комплексной единицы, то она равна

$$1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = \xi_0.$$

Наконец, все множители приводятся к существующим числам, потому что это имеет место для всех простых множителей, нормы которых меньше $1 + 2 + 4 + 6 = 13$:

$$2 = (\sqrt[3]{2})^3,$$

$$3 = (\sqrt[3]{2} + 1)^3 (\sqrt[3]{2} - 1) = \xi_0^{-1} (\sqrt[3]{2} + 1)^3,$$

$$5 = (\sqrt[3]{4} + 1)(1 + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}),$$

7 — простой множитель,

$$11 = (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 1)(2\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} - 1),$$

13 — простой множитель.

$$a = 3, \quad b = 1, \quad A = 3, \quad B = 9.$$

$$\xi = x + y \sqrt[3]{3} + z \sqrt[3]{9}.$$

Основная комплексная единица

$$4 + 3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{9} = \xi_0.$$

Все множители приводятся к существующим числам ξ , так как

$$2 = (\sqrt[3]{3} - 1)(1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}),$$

$$3 = (\sqrt[3]{3})^3,$$

$$5 = (2 - \sqrt[3]{3})(4 + 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}),$$

7 — простой множитель,

$$11 = (2 + \sqrt[3]{3})(4 - 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}),$$

13 — простой множитель,

$$17 = (2 + \sqrt[3]{9})(4 + 3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{9}),$$

19 — простой множитель.

III. $a = 5, \quad b = 1, \quad A = 5, \quad B = 25.$

$$\xi = x + y\sqrt[3]{5} + z\sqrt[3]{25}.$$

Основная комплексная единица

$$41 + 24\sqrt[3]{5} + 14\sqrt[3]{25} = \xi_0.$$

Все множители приводятся к существующим числам ξ , так как

$$2 = (3 + 2\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5} - 1),$$

$$3 = (2 - \sqrt[3]{5})^2 \cdot \xi_0,$$

$$5 = (\sqrt[3]{5})^3,$$

7 — простой множитель,

$$11 = (6 + 3\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{25})(6 + 2\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{25}),$$

$$13 = (2 + \sqrt[3]{5})(2\sqrt[3]{5} - 3)(2 + 2\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}),$$

$$17 = (\sqrt[3]{25} - 2)(4 + 5\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{25}),$$

19 — простой множитель,

$$23 = (7 - 4\sqrt[3]{5})(49 + 28\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25}),$$

$$29 = (\sqrt[3]{25} + 2\sqrt[3]{5} - 6)(26 + 17\sqrt[3]{5} + 10\sqrt[3]{25}),$$

31 — простой множитель,

37 — простой множитель,

$$41 = (1 + 2\sqrt[3]{5})(1 - 2\sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{25}),$$

43 — простой множитель.

IV.

$$a = 6, \quad b = 1, \quad A = 6, \quad B = 36.$$

$$\xi = x + y\sqrt[3]{6} + z\sqrt[3]{36}.$$

Основная комплексная единица

$$109 + 60\sqrt[3]{6} + 33\sqrt[3]{36} = \xi_0.$$

Все множители приводятся к существующим числам ξ , так как

$$2 = (2 - \sqrt[3]{6})^3 \cdot \xi_0,$$

$$3 = (3 + 2\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{36})^3 \cdot \xi_0^{-1},$$

$$5 = (\sqrt[3]{6} - 1)(1 + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{36}),$$

$$7 = (1 + \sqrt[3]{6})(7 + 4\sqrt[3]{6} + 2\sqrt[3]{36})(\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{6} - 5),$$

$$11 = (\sqrt[3]{36} - \sqrt[3]{6} - 1)(7 + 5\sqrt[3]{6} + 2\sqrt[3]{36}),$$

13 — простой множитель,

$$17 = (2\sqrt[3]{36} - 3\sqrt[3]{6} - 1)(37 + 21\sqrt[3]{6} + 11\sqrt[3]{36}),$$

19 — простой множитель,

$$23 = (23 + 13\sqrt[3]{6} + 7\sqrt[3]{36})(8\sqrt[3]{36} - 5\sqrt[3]{6} - 17),$$

$$29 = (5 + 2\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{36})(13 - 4\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{36}),$$

31 — простой множитель,

$$37 = (1 + \sqrt[3]{36})(3\sqrt[3]{6} - 5)(7 + 3\sqrt[3]{6} + 2\sqrt[3]{36}),$$

$$41 = (4 \sqrt[3]{6} - 7)(49 + 28 \sqrt[3]{6} + 16 \sqrt[3]{36}),$$

43 — простой множитель,

$$47 = (2 \sqrt[3]{6} - 1)(1 + 2 \sqrt[3]{6} + 4 \sqrt[3]{36}),$$

$$53 = (5 + 3 \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{36})(7 - 9 \sqrt[3]{6} + 4 \sqrt[3]{36}),$$

$$59 = (\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{6} - 1)(2 \sqrt[3]{36} + 7 \sqrt[3]{6} - 5),$$

61 — простой множитель.

V. $a=7, \quad b=1, \quad A=7, \quad B=49.$

$$\xi = x + y \sqrt[3]{7} + z \sqrt[3]{49}.$$

Основная комплексная единица

$$4 + 2 \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49} = \xi_0.$$

В этом случае мы имеем два класса идеальных чисел:

1) идеальные числа, нормы которых сравнимы с ± 3 по модулю 7,

2) идеальные числа, нормы которых сравнимы с ± 2 по модулю 7, к которым нужно добавить класс существующих чисел ξ , нормы которых сравнимы с ± 1 по модулю 7.

Действительно:

$$2 = \gamma_2 \delta_2, \quad \gamma_2^3 = 1 + \sqrt[3]{7}, \quad \delta_2^3 = 1 - \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49},$$

$$3 = \nu^3, \quad \nu \gamma_2 = \sqrt[3]{7} - 1,$$

$$5 = \gamma_5 \delta_5, \quad \nu \gamma_5 = 2 + \sqrt[3]{7},$$

$$7 = (\sqrt[3]{7})^3,$$

$$11 = \gamma_{11} \delta_{11}, \quad \gamma_2 \gamma_{11} = 2 + \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49},$$

13 — простой множитель,

$$17 = \gamma_{17} \delta_{17}, \quad \gamma_2 \gamma_{17} = 3 + \sqrt[3]{7},$$

$$19 = \lambda'_{19} \lambda''_{19} \lambda'''_{19}, \quad \nu \lambda'_{19} = 4 - \sqrt[3]{7}, \quad \nu \lambda''_{19} = 1 + 2 \sqrt[3]{7}, \quad \nu \lambda'''_{19} = 2 + \sqrt[3]{49},$$

$$23 = \gamma_{23} \delta_{23}, \quad \nu \gamma_{23} = 5 - 2 \sqrt[3]{7},$$

$$29 = (2 \sqrt[3]{7} - 3)(9 + 6 \sqrt[3]{7} + 4 \sqrt[3]{49}).$$

31 — простой множитель,

37 — простой множитель,

$$41 = (\sqrt[3]{49} - 2)(4 + 7 \sqrt[3]{7} + 2 \sqrt[3]{49}),$$

43 — простой множитель,

$$47 = \gamma_{47} \delta_{47}, \quad \nu \gamma_{47} = 4 + 3 \sqrt[3]{7} + 2 \sqrt[3]{49},$$

$$53 = \gamma_{53} \delta_{53}, \quad \gamma_2 \gamma_{53} = 4 + \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{49},$$

$$59 = \gamma_{59} \delta_{59}, \quad \gamma_2 \gamma_{59} = 5 - \sqrt[3]{7},$$

61 — простой множитель,

67 — простой множитель,

$$71 = (4 + \sqrt[3]{7})(16 - 4 \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49}),$$

$$73 = \lambda'_{73} \lambda''_{73} \lambda'''_{73}, \quad \gamma_2 \lambda'_{73} = 5 \sqrt[3]{7} - 9, \quad \gamma_2 \lambda''_{73} = 6 + \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49},$$

$$\gamma_2 \lambda'''_{73} = 3 - 2 \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49}.$$

Рассматривая этот случай, а также случаи

$$A = 13 \quad \text{и} \quad A = 19,$$

я пришел к заключению, что число классов (идеальных и существующих) должно быть кратным 3 для всех простых чисел A , сравнимых с 1 по мод. 3, так как если бы это число классов не делилось на 3, все простые числа p , для которых A — кубический вычет, были бы кубическими вычетами A .

VI. $a=10, \quad b=1, \quad A=10, \quad B=100.$

$$\xi = \frac{x + y \sqrt[3]{10} + z \sqrt[3]{100}}{3}, \quad x \equiv y \equiv z \pmod{3}.$$

Основная комплексная единица

$$\frac{23 + 11 \sqrt[3]{10} + 5 \sqrt[3]{100}}{3};$$

квадрат ее равен

$$181 + 84 \sqrt[3]{10} + 39 \sqrt[3]{100}.$$

В этом случае все множители приводятся к существующим числам ξ , так как это имеет место для всех простых множителей, норма которых меньше 141.

В частности

$$\{3\} = \frac{1 + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{100}}{3} \quad \text{и} \quad [3] = \frac{1 - 2 \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{100}}{3}.$$

Таким же способом я рассмотрел случаи

$$A=11, 12, 13, 14, 15, 17 \text{ и } 19$$

и нашел, что

$$\text{для } A=12 \text{ и } 17$$

все множители приводятся к существующим числам,

$$\text{для } A=11 \text{ и } 15$$

существует один класс идеальных чисел, и

для $A=13$ и 19

существуют два класса идеальных чисел.

Заканчивая, я приведу из области чисел, зависящих от $\sqrt[3]{17}$, следующие примеры:

$$2 = \frac{7 + 2\sqrt[3]{17} + \sqrt[3]{289}}{3} \cdot \frac{5 + \sqrt[3]{17} - \sqrt[3]{289}}{3},$$

$$3 = \left(\frac{4 + 2\sqrt[3]{17} + \sqrt[3]{289}}{3} \right)^2 \cdot \frac{4 - 4\sqrt[3]{17} + \sqrt[3]{289}}{3},$$

$$79 = \frac{2 + \sqrt[3]{17} + 2\sqrt[3]{289}}{3} \cdot \frac{53 + 22\sqrt[3]{17} + 8\sqrt[3]{289}}{3} \cdot (12 - 2\sqrt[3]{17} - \sqrt[3]{289}),$$

$$\left(\frac{4 + 2\sqrt[3]{17} + \sqrt[3]{289}}{3} \right)^2 = \frac{28 + 11\sqrt[3]{17} + 4\sqrt[3]{289}}{3},$$

$$\left(\frac{7 + 2\sqrt[3]{17} + \sqrt[3]{289}}{3} \right)^2 = 13 + 5\sqrt[3]{17} + 2\sqrt[3]{289},$$

$$\frac{4 + 2\sqrt[3]{17} + \sqrt[3]{289}}{3} \cdot \frac{4 - 4\sqrt[3]{17} + \sqrt[3]{289}}{3} = \sqrt[3]{17} - 2,$$

$$\frac{4 + 2\sqrt[3]{17} + \sqrt[3]{289}}{3} \cdot \frac{7 + 2\sqrt[3]{17} + \sqrt[3]{289}}{3} = \frac{32 + 13\sqrt[3]{17} + 5\sqrt[3]{289}}{3},$$

$$\frac{5 + \sqrt[3]{17} - \sqrt[3]{289}}{3} \cdot \frac{2 + \sqrt[3]{17} + 2\sqrt[3]{289}}{3} = 3 - 3\sqrt[3]{17} + \sqrt[3]{289},$$

$$\frac{7 + 2\sqrt[3]{17} + \sqrt[3]{289}}{3} (12 - 2\sqrt[3]{17} - \sqrt[3]{289}) = \frac{16 - 7\sqrt[3]{17} + \sqrt[3]{289}}{3}.$$

A	Комплексные единицы
2	$1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$
3	$4 + 3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{9}$
5	$41 + 24\sqrt[3]{5} + 14\sqrt[3]{25}$
6	$109 + 60\sqrt[3]{6} + 33\sqrt[3]{36}$
7	$4 + 2\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49}$
10	$\frac{23 + 11\sqrt[3]{10} + 5\sqrt[3]{100}}{3}$
11	$89 + 40\sqrt[3]{11} + 18\sqrt[3]{121}$
12	$55 + 24\sqrt[3]{12} + 21\sqrt[3]{18}$
13	$94 + 40\sqrt[3]{13} + 17\sqrt[3]{169}$
14	$29 + 12\sqrt[3]{14} + 5\sqrt[3]{196}$
15	$\frac{5}{(5 - 2\sqrt[3]{15})^3} = 5401 + 2190\sqrt[3]{15} + 888\sqrt[3]{225}$
17	$324 + 126\sqrt[3]{17} + 49\sqrt[3]{289}$
18	$55 + 24\sqrt[3]{12} + 21\sqrt[3]{18}$

A	Комплексные единицы
19	$\frac{14 + 5 \sqrt[3]{19} + 2 \sqrt[3]{361}}{3}$
20	$11 + 4 \sqrt[3]{20} + 3 \sqrt[3]{50}$
21	$\frac{3 (3 + \sqrt[3]{21})}{(3 - \sqrt[3]{21})^4} = 1705 + 618 \sqrt[3]{21} + 224 \sqrt[3]{441}$
22	$\frac{1}{6} \left(\frac{2 + \sqrt[3]{21}}{3 - \sqrt[3]{22}} \right)^3 = 793 + 283 \sqrt[3]{22} + 101 \sqrt[3]{484}$
23	$\frac{(1 + \sqrt[3]{23})^6}{9 (3 - \sqrt[3]{23})^9} = 2166673601 + 761875860 \sqrt[3]{23} +$ $+ 267901370 \sqrt[3]{529}$
26	$9 + 3 \sqrt[3]{26} + \sqrt[3]{26^2}$
28	$9 + 3 \sqrt[3]{28} + \sqrt[3]{28^2}$
29	$\frac{(19 + 6 \sqrt[3]{29} + 2 \sqrt[3]{29^2})^6}{3 (70 - 32 \sqrt[3]{29} + 3 \sqrt[3]{29^2})^3}$
30	$\frac{3}{(\sqrt[3]{30} - 3)^3} = 811 + 261 \sqrt[3]{30} + 84 \sqrt[3]{900}$

A	Комплексные единицы
31	$\frac{(1 + \sqrt[3]{31})^2}{(\sqrt[3]{31} - 3)^5} = 101209 + 32218 \sqrt[3]{31} + 10256 \sqrt[3]{31^2}$
33	$\frac{(\sqrt[3]{33} - 1)^3}{(2 + 9\sqrt[3]{33} - 3\sqrt[3]{33^2})^5}$
34	$\frac{(4 + \sqrt[3]{34})^3}{2(\sqrt[3]{34} - 3)^6} = 334153 + 103146 \sqrt[3]{34} + 31839 \sqrt[3]{34^2}$
35	$\frac{(1 + \sqrt[3]{35})^3}{3(\sqrt[3]{35} - 2)(\sqrt[3]{35} - 3)^2} = \frac{278 + 85 \sqrt[3]{35} + 26 \sqrt[3]{35^2}}{3}$
37	$100 + 30 \sqrt[3]{37} + 9 \sqrt[3]{37^2}$
38	$\frac{2 \cdot 3^2 (8 - \sqrt[3]{38})^3}{(\sqrt[3]{38} - 2)^6 (\sqrt[3]{38} - 3)^3} = 29071 + 8647 \sqrt[3]{38} + 2572 \sqrt[3]{38^2}$
39	$\frac{3(1 + \sqrt[3]{39})^2}{(4 - \sqrt[3]{39})(\sqrt[3]{39} - 3)^3} = 529 + 156 \sqrt[3]{39} + 46 \sqrt[3]{39^2}$
41	$\frac{3^{10} (7 + \sqrt[3]{41})^{12} (2 + \sqrt[3]{41})^{21}}{(5 - \sqrt[3]{41})^{42}}$

A	Комплексные единицы
42	$\frac{7}{(7 - 2 \sqrt[3]{42})^3} = 21169 + 6090 \sqrt[3]{42} + 1752 \sqrt[3]{42^2}$
43	$49 + 14 \sqrt[3]{43} + 4 \sqrt[3]{43^2}$
44	$\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt[3]{44} - 2}{2 \sqrt[3]{44} - 7} \right)^3 = \frac{4007 + 1135 \sqrt[3]{44} + 643 \sqrt[3]{242}}{3}$
45	$\frac{3^4 (3 + \sqrt[3]{45})^3}{(\sqrt[3]{45} - 3)^9} = 1477441 + 415374 \sqrt[3]{45} + 116780 \sqrt[3]{45^2}$
46	$\frac{3^3 \cdot 2^2 (2 + \sqrt[3]{46})^3}{(4 - \sqrt[3]{46})^9} = 16449049 + 4590798 \sqrt[3]{46} + 1281255 \sqrt[3]{46^2}$
47	$\frac{3(2 + \sqrt[3]{47})^6 (1 + \sqrt[3]{47})^3}{(\sqrt[3]{47} - 3)^6 (2 \sqrt[3]{47} - 7)^6}$
50	$11 + 4 \sqrt[3]{20} + 3 \sqrt[3]{50}$
51	$\frac{(3 + \sqrt[3]{51})^6 (\sqrt[3]{51} - 1)^3}{3(2 \sqrt[3]{51} - 7)^6 (\sqrt[3]{51} - 3)^3} = 107846641 + 29081484 \sqrt[3]{51} +$ $+ 7841994 \sqrt[3]{51^2}$

A	Комплексные единицы
52	$\frac{12}{(4 - \sqrt[3]{52})^3} = 209 + 56 \sqrt[3]{52} + 15 \sqrt[3]{52^2}$
53	$\frac{(7 + \sqrt[3]{53})^5 (1 + \sqrt[3]{53})^5}{3(4 - \sqrt[3]{53})^5 (5 - \sqrt[3]{53})^5 (2 \sqrt[3]{53} - 7)^3}.$
55	$\frac{5^5 \cdot 7^{15} (7 - \sqrt[3]{55})^{18}}{(4 - \sqrt[3]{55})^{18} (\sqrt[3]{55} - 3)^{15} (\sqrt[3]{55} + 1)^{15} (5 - \sqrt[3]{55})^{15}}$
57	$\frac{(3 + \sqrt[3]{57})^4 (8 - \sqrt[3]{57})}{3(4 - \sqrt[3]{57})^4 (\sqrt[3]{57} - 1) (\sqrt[3]{57} - 3) (3 \sqrt[3]{57} - 11)} =$ $= 1460968 + 379620 \sqrt[3]{57} + 98641 \sqrt[3]{57^2}$
58	$\frac{6}{(4 - \sqrt[3]{58})^3} = 929 + 240 \sqrt[3]{58} + 62 \sqrt[3]{58^2}$
59	$\frac{(1 + \sqrt[3]{59})^{15}}{3^5 (\sqrt[3]{59} - 3)^6 (4 - \sqrt[3]{59})^{15}}$
60	$\frac{4}{(4 - \sqrt[3]{60})^3} = 2161 + 522 \sqrt[3]{60} + 141 \sqrt[3]{60^2}$

A	Комплексные единицы
61	$\frac{3}{(4 - \sqrt[3]{61})^3} = 3905 + 992 \sqrt[3]{61} + 252 \sqrt[3]{61^2}$
62	$\frac{2}{(4 - \sqrt[3]{62})^3} = 8929 + 2256 \sqrt[3]{62} + 570 \sqrt[3]{62^2}$
63	$16 + 4 \sqrt[3]{63} + \sqrt[3]{63^2}$
65	$16 + 4 \sqrt[3]{65} + \sqrt[3]{65^2}$
66	$\frac{2}{(\sqrt[3]{66} - 4)^3} = 9505 + 2352 \sqrt[3]{66} + 582 \sqrt[3]{66^2}$
67	$\frac{3}{(\sqrt[3]{67} - 4)^3} = 4289 + 1056 \sqrt[3]{67} + 260 \sqrt[3]{67^2}$
68	$\frac{4}{(\sqrt[3]{68} - 4)^3} = 2449 + 600 \sqrt[3]{68} + 147 \sqrt[3]{68^2}$
69	$\frac{3^7(1 + \sqrt[3]{69})^{30}}{(3 + \sqrt[3]{69})^6(6 - \sqrt[3]{69})^{15}(\sqrt[3]{69} - 4)^{30}}$
70	$\frac{6}{(\sqrt[3]{70} - 4)^3} = 1121 + 272 \sqrt[3]{70} + 66 \sqrt[3]{70^2}$

Я убежден, что почти все эти единицы являются основными.

О ПРОСТЫХ ДЕЛИТЕЛЯХ ЧИСЕЛ ВИДА

$$1 + 4x^2$$

*Доложено в заседании Физико-математического отделения
19 апреля 1895 г.*



В известном „Cours de M. Hermite“ приведено* замечательное предложение о простых делителях чисел вида $n^2 + 1$, сообщенное г. Эрмиту на словах Чебышевым.

Это предложение можно формулировать так: если μ означает наибольший простой делитель чисел

$$1 + 2^2, 1 + 4^2, 1 + 6^2, \dots, 1 + 4N^2,$$

то отношение

$$\frac{\mu}{N}$$

возрастает беспредельно вместе с N .

Разбирая бумаги Чебышева, я нашел небольшой обрывок, который позволяет восстановить доказательство приведенного предложения.

Возьмем сумму

$$\sum \log(1 + 4x^2) = \log(1 + 2^2) + \log(1 + 4^2) + \log(1 + 6^2) + \dots + \log(1 + 4N^2).$$

Она разбивается на логарифмы простых чисел вида $4m + 1$, не превосходящих притом μ .

Чтобы узнать, сколько раз в нашу сумму входит логарифм какого-нибудь простого числа q , рассматриваем сравнения

$$1 + 4x^2 \equiv 0 \pmod{q}, \quad 1 + 4x^2 \equiv 0 \pmod{q^2}, \\ 1 + 4x^2 \equiv 0 \pmod{q^3}, \dots$$

* Cours de M. Hermite. Quatrième édition, p. 197.

и считаем число решений каждого из них при условии

$$x \leq N.$$

Сумма этих чисел, т. е. общее число решений наших сравнений, покажет, сколько раз $\log q$ должен входить в состав вышеуказанной суммы

$$\log(1 + 2^2) + \log(1 + 4^2) + \dots + \log(1 + 4N^2).$$

А число решений сравнения

$$1 + 4x^2 \equiv 0 \pmod{q^k}$$

при условии

$$x \leq N$$

наверно не больше

$$\frac{2N}{q^k} + 1$$

и равно нулю, если k больше $\frac{\log(1 + 4N^2)}{\log q}$.

Отсюда заключаем, что логарифм простого числа q входит в состав нашей суммы с множителем меньшим, чем

$$2N \left[\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \dots \right] + \frac{\log(1 + 4N^2)}{\log q}.$$

Следовательно,

$$\sum \log(1 + 4x^2) < 2N \sum \frac{\log q}{q-1} + \varphi(\mu) \log(1 + 4N^2).$$

Здесь q означает все простые числа вида $4m + 1$, не превосходящие μ , а $\varphi(\mu)$ — число их.

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \sum \log(1 + 4x^2) &> 2N \log 2 + \\ &+ 2 \log 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots N > 2N \log N - N. \end{aligned}$$

Из неравенств

$$\sum \log(1 + 4x^2) < 2N \sum \frac{\log q}{q-1} + \varphi(\mu) \log(1 + 4N^2)$$

и

$$\sum \log(1 + 4x^2) > 2N \log N - N$$

выводим следующее:

$$\frac{\log N}{\log \mu} < \frac{1}{\log \mu} \sum \frac{\log q}{q-1} + \frac{\varphi(\mu) \log(1 + 4N^2)}{2N \log \mu} + \frac{1}{2 \log \mu}.$$

Пусть, далее, q' означает все простые числа вида $4m + 3$, меньшие μ .

Вспомним,* что

$$\sum \frac{\log q}{q} + \sum \frac{\log q'}{q'}$$

отличается от $\log \mu$ менее, чем на 2, а разность

$$\sum \frac{\log q}{q} - \sum \frac{\log q'}{q'}$$

остается конечной при беспредельном возрастании числа μ .

Поэтому при беспредельном возрастании μ каждое из выражений

$$\frac{1}{\log \mu} \sum \frac{\log q}{q} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\log \mu} \sum \frac{\log q'}{q'}$$

стремится к пределу $\frac{1}{2}$, равно как и выражение

$$\frac{1}{\log \mu} \sum \frac{\log q}{q-1}.$$

После этих замечаний станем увеличивать N беспредельно. Вместе с N должно увеличиваться беспредельно и μ , причем

$$\frac{1}{\log \mu} \sum \frac{\log q}{q-1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2 \log \mu}$$

* M e r t e n s. Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. Crelle's Journal, B. 78.

будут приближаться соответственно к пределам $\frac{1}{2}$ и 0.

Правая часть неравенства

$$\frac{\log N}{\log \mu} < \frac{1}{\log \mu} \sum \frac{\log q}{q-1} + \frac{\varphi(\mu) \log(1+4N^2)}{2N \log \mu} + \frac{1}{2 \log \mu}$$

содержит, кроме

$$\frac{1}{\log \mu} \sum \frac{\log q}{q-1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2 \log \mu},$$

еще

$$\frac{\varphi(\mu) \log(1+4N^2)}{2N \log \mu} = \frac{\varphi(\mu)}{\mu} \cdot \frac{\log(1+4N^2)}{\log N^2} \cdot \frac{\mu}{\log \mu} \cdot \frac{\log N}{N}.$$

Обращаясь к последнему выражению, допустим, что отношение $\frac{\mu}{N}$ остается меньше некоторого числа h , превосходящего единицу.

Тогда

$$\frac{\mu}{\log \mu} \cdot \frac{\log N}{N} < h$$

и

$$\frac{\varphi(\mu) \log(1+4N^2)}{2N \log \mu} < h \frac{\varphi(\mu)}{\mu} \cdot \frac{\log(1+4N^2)}{\log N^2}.$$

Что касается выражений

$$\frac{\varphi(\mu)}{\mu} \quad \text{и} \quad \frac{\log(1+4N^2)}{\log N^2},$$

то они при беспредельном возрастании N и μ приближаются соответственно к пределам нуль и единица.

Мы видим, что сумма

$$\frac{1}{\log \mu} \sum \frac{\log q}{q-1} + \frac{\varphi(\mu) \log(1+4N^2)}{2N \log \mu} + \frac{1}{2 \log \mu}$$

должна приближаться к пределу $\frac{1}{2}$, если N возрастает бес-
предельно, а отношение $\frac{\mu}{N}$ остается конечным.

Итак, если отношение $\frac{\mu}{N}$ остается конечным при беспредельном возрастании N , то для достаточно больших значений N отношение

$$\frac{\log N}{\log \mu}$$

будет, в силу неравенства

$$\frac{\log N}{\log \mu} < \frac{1}{\log \mu} \sum \frac{\log q}{q-1} + \frac{\varphi(\mu) \log(1+4N^2)}{2N \log \mu} + \frac{1}{2 \log \mu},$$

меньше всякого данного числа, которое больше $\frac{1}{2}$.

С другой стороны, если отношение $\frac{\mu}{N}$ остается конечным при беспредельном возрастании N , то для достаточно больших значений N отношение

$$\frac{\log N}{\log \mu}$$

должно быть больше единицы или сколь угодно близко к единице.

Такое противоречие показывает, что при беспредельном возрастании N отношение $\frac{\mu}{N}$ не может оставаться конечным, а должно также возрастать беспредельно.

О НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ТРОЙНИЧНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМАХ

*Доложено в заседании Физико-математического отделения
25 апреля 1901 г.*



В настоящей статье мы имеем в виду заняться вопросом о последовательных точных высших пределах для наименьших значений неопределенных тройничных квадратичных форм одного и того же определителя.

Подобный вопрос для бинарных форм был решен нами в диссертации „О бинарных квадратичных формах положительного определителя“ [1].

Для тройничных форм мы не можем пока дать полного решения поставленного вопроса, которое сопряжено с большими затруднениями, и установим здесь только два высших предела, из которых первый нам был давно указан профессором А. Н. Коркиным.

Относительно рассматриваемых нами форм

$$f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy$$

мы будем предполагать, что их определитель

$$aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2$$

равен единице.

Мы имеем право сделать такое предположение, вносящее некоторое упрощение в наши вычисления, ибо каждая тройничная форма, не приводящаяся к бинарной, по разделении на кубический корень из ее определителя обращается в одну из форм, имеющих определителем единицу, а те тройничные формы, которые приводятся к бинарным, мы не рассматриваем.

Вместе с формой f мы будем рассматривать союзную ей форму

$$F = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY,$$

коэффициенты которой связаны с коэффициентами f формулами:

$$\begin{aligned} A &= a'a'' - b^2, & B &= b'b'' - ab, & a &= A'A'' - B^2, & b &= B'B'' - AB, \\ A' &= a''a - b'^2, & B' &= b''b - a'b', & a' &= A''A - B'^2, & b' &= B''B - A'B', \\ A'' &= aa' - b''^2, & B'' &= bb' - a''b'', & a'' &= AA' - B''^2, & b'' &= BB' - A''B''. \end{aligned}$$

Из теории квадратичных форм известно также следующее предложение.

Если подстановка

$$\begin{aligned} x &= \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1, \\ y &= \alpha' x_1 + \beta' y_1 + \gamma' z_1, \\ z &= \alpha'' x_1 + \beta'' y_1 + \gamma'' z_1 \end{aligned}$$

преобразует f в эквивалентную ей форму

$$f_1 = a_1 x_1^2 + a'_1 y_1^2 + a''_1 z_1^2 + 2b_1 y_1 z_1 + 2b'_1 z_1 x_1 + 2b''_1 x_1 y_1,$$

то подстановка

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z, \\ Y_1 &= \beta X + \beta' Y + \beta'' Z, \\ Z_1 &= \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z \end{aligned}$$

преобразует F в форму

$$\begin{aligned} F_1 &= A_1 X_1^2 + A'_1 Y_1^2 + A''_1 Z_1^2 + 2B_1 Y_1 Z_1 + \\ &+ 2B'_1 Z_1 X_1 + 2B''_1 X_1 Y_1, \end{aligned}$$

эквивалентную F и союзную с f_1 .

В частном случае, когда

$$\alpha = 1 \quad \text{и} \quad \alpha' = \alpha'' = \beta = \gamma = 0,$$

приведенные нами подстановки преобразуют бинарные формы

$$a' y^2 + 2byz + a'' z^2 \quad \text{и} \quad A' Y^2 + 2BYZ + A'' Z^2$$

в эквивалентные им формы и не изменяют коэффициентов a, A , так как в этом случае

$$a_1 = a \quad \text{и} \quad A_1 = A.$$

Для наших выводов важно обратить также внимание на разложение формы f на квадраты:

$$f = a \left\{ x + \frac{b'}{a} z + \frac{b''}{a} y \right\}^2 + \frac{A''}{a} \left\{ y - \frac{B}{A''} z \right\}^2 + \frac{z^2}{A''}.$$

Это разложение обнаруживает, что для всякой неопределенной формы f , по меньшей мере, одно из двух чисел

$$a, A''$$

должно быть отрицательным.

На таком же основании должно быть, по меньшей мере, одно отрицательное число и в каждой из следующих пяти пар:

$$a, A'; \quad a', A; \quad a', A''; \quad a'', A; \quad a'', A'.$$

Приступая к нашим исследованиям, прежде всего условимся для упрощения рассуждений рассматривать только такие формы, все коэффициенты которых можно привести к целым числам посредством одного и того же множителя; хотя наши выводы можно распространить и на формы, не удовлетворяющие этому условию. При указанном ограничении форма f имеет наименьшее значение и допускает такое преобразование, после которого первый ее коэффициент a становится равным, по числовой величине, ее наименьшему значению.

Согласно этому мы положим

$$a^2 \leq f^2$$

при всех рассматриваемых нами значениях x, y, z , т. е. при всех значениях целых чисел x, y, z , кроме

$$x = y = z = 0.$$

Наши выводы будут основаны на том соображении, что коэффициент a , представляющий наименьшее значение тройничной формы f , вместе с тем должен служить наименьшим значением и для бинарных форм

$$ax^2 + 2b''xy + a'y^2 \quad \text{и} \quad ax^2 + 2b'xz + a''z^2.$$

Различим два случая:

$$1) a > 0, \quad 2) a < 0;$$

остановимся сначала на первом из них.

При $a > 0$ коэффициенты союзной формы A', A'' должны быть отрицательными числами, и, следовательно, формы

$$ax^2 + 2b''xy + a'y^2, \quad ax^2 + 2b'xz + a''z^2,$$

определители которых равны

$$-A'', -A',$$

должны быть неопределенными.

Если одна из форм

$$\frac{ax^2 + 2b''xy + a'y^2}{\sqrt{-A''}}, \quad \frac{ax^2 + 2b'xz + a''z^2}{\sqrt{-A'}}$$

эквивалентна форме

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{4}{5}}(x^2 - xy - y^2) \quad \text{или} \quad \varphi_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}(x^2 - 2xy - y^2),$$

то простым преобразованием можно перейти от первого случая ко второму, при котором $a < 0$.

Если же формы

$$\frac{ax^2 + 2b''xy + a'y^2}{\sqrt{-A''}}, \quad \frac{ax^2 + 2b'xz + a''z^2}{\sqrt{-A'}}$$

не эквиваленты ни φ_0 , ни φ_1 , то, как известно, должно быть

$$a < \sqrt{-\frac{1}{2}A'} \quad \text{и} \quad a < \sqrt{-\frac{1}{2}A''},$$

и потому

$$a^2 < \sqrt{\frac{1}{4}A'A''}.$$

С другой стороны, рассматривая квадратичную форму

$$A'Y^2 + 2BYZ + A''Z^2,$$

определитель которой равен $-a$, мы можем, не изменяя a , преобразовать ее так, чтобы было

$$A'A'' \leq \frac{4}{3}a.$$

Присоединяя последнее неравенство к неравенству

$$a^2 < \sqrt{\frac{1}{4}A'A''},$$

получаем

$$a < \sqrt[3]{\frac{1}{3}}.$$

Следовательно, первый случай можно свести ко второму, если только численное значение формы f нельзя сделать меньше $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

Во втором случае, когда $a < 0$, форма

$$A'Y^2 + 2BYZ + A''Z^2$$

принадлежит к числу неопределенных, и мы можем предполагать ее приведенною таким образом, что

$$A' < 0, \quad A'' > 0$$

и корни уравнения

$$A' \xi^2 + 2B\xi + A'' = 0$$

выражаются непрерывными дробями

$$\alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \dots}}} \quad \text{и} \quad \frac{-1}{\alpha_{-1} + \frac{1}{\alpha_{-2} + \frac{1}{\alpha_{-3} + \dots}}},$$

где все α_k — целые положительные числа.

Придерживаясь обозначений, введенных нами в вышеупомянутой диссертации, положим

$$\xi_k = \alpha_k + \frac{1}{\alpha_{k+1} + \frac{1}{\alpha_{k+2} + \dots}}, \quad \eta_k = \alpha_{k-1} + \frac{1}{\alpha_{k-2} + \frac{1}{\alpha_{k-3} + \dots}},$$

и

$$\frac{2}{L_k} = \xi_k + \frac{1}{\eta_k}.$$

При таких предположениях и обозначениях имеем

$$A' = -L_0 \sqrt{-a} \quad \text{и} \quad A'' = L_{-1} \sqrt{-a},$$

и посредством простых преобразований можем заменить пару чисел L_0, L_{-1} любой парой L_{2l}, L_{2l-1} , где l означает число целое.

С другой стороны, рассматривая формы

$$ax^2 + 2b'xz + a'z^2, \quad ax^2 + 2b''xy + a'y^2,$$

можем установить равенства

$$a = -\mu \sqrt{-A'} \quad \text{и} \quad a = -\nu \sqrt{A''},$$

где

$$\mu^2 \leq \frac{4}{5} \quad \text{и} \quad \nu^2 \leq \frac{4}{3}.$$

Указанные нами равенства по исключению A' и A'' дают

$$a = -\sqrt[3]{\mu^4 L_0^2} = -\sqrt[3]{\nu^4 L_{-1}^2}.$$

Переходя затем от пары

$$L_0, L_{-1}$$

к паре

$$L_{2l}, L_{2l-1},$$

получаем

$$a = -\sqrt[3]{\mu_l^4 L_{2l}^2} = -\sqrt[3]{\nu_l^4 L_{2l-1}^2},$$

где также

$$\mu_l^2 \leq \frac{4}{5} \quad \text{и} \quad \nu_l^2 \leq \frac{4}{3}.$$

В дальнейших выводах мы положим

$$a_2 \geq \sqrt[3]{\frac{4}{25}}$$

и таким образом исключим из рассмотрения все формы, численное значение которых можно сделать меньше $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$.

После такого исключения первый случай ($a > 0$) сводится ко второму, как было уже замечено, а числа L_{2l} и L_{2l-1} будут ограничены неравенствами

$$L_{2l} \geq \frac{\sqrt{2}}{\mu_l^2 \sqrt{5}}, \quad L_{2l-1} \geq \frac{\sqrt{2}}{\nu_l^2 \sqrt{5}},$$

откуда выводим

$$\frac{2}{L_{2l}} \leq \mu_l^2 \sqrt{10} \leq \sqrt{6.4}$$

и

$$\frac{2}{L_{2l-1}} \leq \mu_i^2 \sqrt{10} \leq \sqrt{\frac{160}{9}} < 4.3.$$

При соблюдении этих неравенств ряд

$$\dots, \alpha_{-4}, \alpha_{-2}, \alpha_0, \alpha_2, \alpha_4, \dots$$

может состоять только из двоек и единиц, а ряд

$$\dots, \alpha_{-3}, \alpha_{-1}, \alpha_1, \alpha_3, \dots$$

может, кроме единиц и двоек, заключать только тройки.

Сверх того нетрудно заметить, что α_{2l} может быть двойкою только при $\mu_i^2 = \frac{4}{5}$, ибо при $\mu_i^2 < \frac{4}{5}$ имеем $\mu_i^2 \leq \frac{1}{2}$ и неравенство

$$\frac{2}{L_{2l}} \leq \mu_i^2 \sqrt{10}$$

дает

$$\frac{2}{L_{2l}} \leq \sqrt{2.5} < 2.$$

То же неравенство обнаруживает, что μ_i^2 не может быть меньше половины, ибо при $\mu_i^2 < \frac{1}{2}$ оно дает

$$\frac{2}{L_{2l}} \leq \frac{100}{221} \sqrt{10} < 1.5,$$

между тем как в силу неравенств

$$\alpha_{2l-1} < 4 \quad \text{и} \quad \alpha_{2l+1} < 4$$

должно быть

$$\frac{2}{L_{2l}} > 1.5.$$

Итак, по исключении форм, которые достигают значений меньших $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$, для μ_i^2 возможны только две величины:

$$\mu_i^2 = \frac{4}{5} \quad \text{и} \quad \mu_i^3 = \frac{1}{2}.$$

Отсюда ввиду постоянства произведения

$$\mu_i^2 L_{2l}$$

следует, что все значения L_{2l} равны или отличаются друг от друга множителем $\frac{8}{5}$.

Сообразно этому мы положим сначала

$$L_{2l} = L_{2l+2}$$

и посмотрим, какие заключения вытекают из такого неравенства.

На основании наших обозначений можно представить только что допущенное равенство в таком виде:

$$\eta_{2l+1} + \frac{1}{\alpha_{2l+1} + \frac{1}{\xi_{2l+2}}} = \xi_{2l+2} + \frac{1}{\alpha_{2l+1} + \frac{1}{\eta_{2l+1}}},$$

а отсюда без труда получаем

$$\alpha_{2l+1} \xi_{2l+2} + 1 = \alpha_{2l+1} \eta_{2l+1} + 1,$$

и потому

$$\xi_{2l+2} = \eta_{2l+1}.$$

Что же касается последнего равенства, то оно равносильно системе равенств

$$\alpha_{2l+2} = \alpha_{2l}, \quad \alpha_{2l+3} = \alpha_{2l-1}, \quad \alpha_{2l+4} = \alpha_{2l-2}, \dots$$

К таким равенствам приводит нас допущение

$$L_{2l} = L_{2l+2}.$$

Если же мы допустим двойное равенство

$$L_{2l-2} = L_{2l} = L_{2l+2},$$

то получим не одну, а две системы равенств:

$$\begin{aligned} \alpha_{2l+2} &= \alpha_{2l}, & \alpha_{2l+3} &= \alpha_{2l-1}, & \alpha_{2l+4} &= \alpha_{2l-2}, & \alpha_{2l+5} &= \alpha_{2l-3}, \dots, \\ \alpha_{2l} &= \alpha_{2l-2}, & \alpha_{2l+1} &= \alpha_{2l-3}, & \alpha_{2l+2} &= \alpha_{2l-4}, & \alpha_{2l+3} &= \alpha_{2l-5}, \dots \end{aligned}$$

Из этих двух систем нетрудно заключить о равенстве всех α_k , с четными значками k , и о равенстве таких α_k , разность значков которых делится на четыре:

$$\begin{aligned} \alpha_{2l} &= \alpha_{2l-2} = \alpha_{2l+2} = \alpha_{2l-4} = \alpha_{2l+4} = \dots, \\ \alpha_{2l+1} &= \alpha_{2l-3} = \alpha_{2l+5} = \alpha_{2l-7} = \alpha_{2l+9} = \dots, \\ \alpha_{2l-1} &= \alpha_{2l+3} = \alpha_{2l-5} = \alpha_{2l+7} = \alpha_{2l-9} = \dots \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно видеть, что при существовании двойного равенства

$$L_{2l-2} = L_{2l} = L_{2l+2}$$

все L_k , с четными значками, имеют одну и ту же величину.

С другой стороны, нетрудно заметить, что при установленном нами неравенстве

$$\frac{2}{L_{2l}} < \sqrt{6.4}$$

ряд

$$\dots, \alpha_{-4}, \alpha_{-2}, \alpha_0, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \dots$$

не может состоять из одних двоек, так как сумма

$$2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \dots}}} + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \dots}}},$$

равная $\sqrt{\frac{20}{3}}$, больше $\sqrt{6.4}$.

Таким образом, принимая во внимание все возможные

предположения об α_k с нечетными значками k , мы при допущении двойного равенства

$$L_{2l-2} = L_{2l} = L_{2l+2}$$

получим для ξ_{2l} девять возможных разложений в непрерывную дробь:

$$1) \xi_{2l} = 1 + \frac{1}{\xi_{2l}}, \quad 2) \xi_{2l} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\xi_{2l}}}, \quad 3) \xi_{2l} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\xi_{2l}}},$$

$$4) \xi_{2l} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\xi_{2l}}}}}, \quad 5) \xi_{2l} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\xi_{2l}}}}},$$

$$6) \xi_{2l} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\xi_{2l}}}}}, \quad 7) \xi_{2l} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\xi_{2l}}}}},$$

$$8) \xi_{2l} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\xi_{2l}}}}}, \quad 9) \xi_{2l} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\xi_{2l}}}}}.$$

Этим девяти непрерывным дробям соответствует шесть различных случаев, так как от непрерывных дробей 4), 5) и 6) можно перейти к 7), 8) и 9) посредством изменения числа l на одну единицу.

Разберем подробно намеченные нами шесть случаев.

В случае 1), когда

$$\xi_{2l} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}},$$

мы можем положить

$$A' Y^2 + 2BYZ + A'' Z^2 = -\sqrt{\frac{-4a}{5}} (Y^2 - YZ - Z^2),$$

число же μ_i^2 должны приравнять $\frac{4}{5}$, так как произведение $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}$ меньше установленного нами предела $\frac{2}{5}$.

Тогда

$$a = -\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = -\frac{4}{5},$$

и остальные коэффициенты формы f будут связаны уравнениями

$$-\frac{4}{5} a'' - b'^2 = -\frac{4}{5}, \quad b' b'' + \frac{4}{5} b = \frac{2}{5}, \quad -\frac{4}{5} a' - b''^2 = \frac{4}{5},$$

в силу которых получаем

$$f = -\frac{4}{5} \left\{ \left(x - \frac{5}{4} b' z - \frac{5}{4} b'' y \right)^2 + \frac{5}{4} (y^2 - yz - z^2) \right\}.$$

Определитель всех форм, к которым мы пришли, равен единице; но ни для одной из них ее наименьшее значение не равно $\frac{4}{5}$, что противуречит нашему предположению относительно a .

Чтобы убедиться, что численное значение каждой формы вида

$$-\frac{4}{5} \left\{ \left(x - \frac{5}{4} b' z - \frac{5}{4} b'' y \right)^2 + \frac{5}{4} (y^2 - yz - z^2) \right\}$$

можно сделать меньше $\frac{4}{5}$, положим последовательно

$$1) y=0, \quad z=1; \quad 2) y=z=1; \quad 3) y=-1, \quad z=2$$

и дадим x такие значения, при которых числовая величина алгебраической суммы

$$x - \frac{5}{4} b' z - \frac{5}{4} b'' y$$

меньше единицы, но не меньше половины.

Мы получим для численного значения f три величины

$$\frac{4}{5} \left\{ \frac{5}{4} - \left(x_1 - \frac{5}{4} b' \right)^2 \right\}, \quad \frac{4}{5} \left\{ \frac{5}{4} - \left(x_2 - \frac{5}{4} b' - \frac{5}{4} b'' \right)^2 \right\},$$

$$\frac{4}{5} \left\{ \frac{5}{4} - \left(x_3 - \frac{5}{2} b' + \frac{5}{4} b'' \right)^2 \right\},$$

из которых, по меньшей мере, одна меньше $\frac{4}{5}$, ибо в противном случае было бы

$$x_1 - \frac{5}{4} b' = \pm \frac{1}{2}, \quad x_2 - \frac{5}{4} b' - \frac{5}{4} b'' = \pm \frac{1}{2},$$

$$x_3 - \frac{5}{2} b' + \frac{5}{4} b'' = \pm \frac{1}{2},$$

откуда по исключении b' и b'' вытекает невозможное равенство

$$x_3 + x_2 - 3x_1 = \pm \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \pm \frac{3}{2} \quad \text{или} \quad \pm \frac{5}{2}.$$

Еще скорее устраняется случай 2), так как при $\mu_i^2 = \frac{1}{2}$ соответствующая ему величина — a равна $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, а при $\mu_i^2 = \frac{4}{5}$ соответствующая величина ν_i^2 оказывается равной $\frac{8}{5}$ и следовательно больше $\frac{4}{3}$.

Случай 3) также отпадает, так как в этом случае ν_i^2 больше $\frac{4}{3}$ не только при $\mu_i^2 = \frac{4}{5}$, но и при $\mu_i^2 = \frac{1}{2}$.

Перейдя к случаю 4), получаем

$$A' Y^2 + 2BYZ + A'' Z^2 = -\sqrt{\frac{-a}{24}} \{ 5Y^2 - 6YZ - 3Z^2 \},$$

$$\mu^2 = \frac{4}{5},$$

$$f = -\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \left\{ (x - pz - qy)^2 + \frac{1}{4} (3y^2 - 6yz - 5z^2) \right\}.$$

Количества p и q должно подобрать так, чтобы числовая величина f не могла опускаться ниже $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

На этом основании, полагая сначала

$$z = 1, \quad y = 0$$

и затем

$$z = 0, \quad y = 1,$$

получаем два неравенства

$$\left\{ \frac{5}{4} - (x - p)^2 \right\}^2 \geq 1 \quad \text{и} \quad \frac{3}{4} + (x - q)^2 \geq 1,$$

которые должны быть выполнены при всех целых числах x .

Из приведенных неравенств нетрудно заключить, что обе разности

$$p - \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad q - \frac{1}{2}$$

должны быть целыми числами.

Отсюда получаем один класс форм, которые эквивалентны форме

$$\begin{aligned} & - \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \left\{ \left(x - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}y \right)^2 + \frac{1}{4}(3y^2 - 6yz - 5z^2) \right\} = \\ & = - \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \left\{ x^2 + y^2 - z^2 - yz - xz - xy \right\} = \\ & = - \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \left\{ (x - z)^2 + (y - z)^2 - (x - z)(y - z) - 2z^2 \right\} \end{aligned}$$

и наименьшее значение которых равно $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, как нетрудно убедиться.

Случаи 5) и 6) отпадают на таких же основаниях, как 2) и 3).

Допустим теперь такие равенства

$$\frac{5}{8} L_{2l-2} = L_{2l} = L_{2l+2} = \frac{5}{8} L_{2l+4}.$$

При этом допущении имеем

$$5(\alpha_{2l-1} \xi_{2l} + 1) = 8(\alpha_{2l-1} \eta_{2l-1} + 1)$$

и

$$\xi_{2l+2} = \eta_{2l+1}.$$

Отсюда без большого труда выводим

$$\alpha_{2l} = \alpha_{2l+2} = 2, \quad \alpha_{2l-2} = \alpha_{2l+4} = 1,$$

вместе с тем в силу неравенств

$$\frac{2}{L_{2l}} \leq \sqrt{6.4} < 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

должно быть

$$\alpha_{2l-1} = \alpha_{2l+1} = 3.$$

На этом основании получаем четыре равенства

$$\xi_{2l} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\xi_{2l+2}}}, \quad \eta_{2l+1} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\eta_{2l-1}}},$$

$$\xi_{2l+2} = \eta_{2l+1}, \quad \eta_{2l-1} = \frac{5}{8} \xi_{2l} - \frac{1}{8} = \frac{1}{\eta_{2l} - 3},$$

а из них последовательно выводим

$$\xi_{2l} = \frac{7\xi_{2l+2} + 2}{3\xi_{2l+2} + 1}, \quad \xi_{2l+2} = \frac{\xi_{2l} - 2}{7 - 3\xi_{2l}}, \quad \xi_{2l} = \frac{5 + \eta_{2l}}{5(\eta_{2l} - 3)},$$

$$\eta_{2l+1} = \frac{7\eta_{2l-1} + 2}{3\eta_{2l-1} + 1} = \frac{35\xi_{2l} + 9}{15\xi_{2l} + 5} = \frac{\xi_{2l} - 2}{7 - 3\xi_{2l}}$$

и, наконец, приходим к уравнениям

$$120 \xi_{2l}^2 - 243 \xi_{2l} - 73 = 0$$

$$120 \left(-\frac{1}{\eta_{2l}} \right)^2 - 243 \left(-\frac{1}{\eta_{2l}} \right) - 73 = 0,$$

которые дают для $\frac{2}{L_{2l}}$ величину

$$\sqrt{\frac{94089}{14400}},$$

бóльшую установленного нами предела $\sqrt{6.4}$.

Остается рассмотреть предположение, что нет равенства

$$L_{2l} = L_{2l+2}$$

ни для какого значения l .

Такое предположение дает систему равенств

$$\dots = L_{2l-2} = \frac{8}{5} L_{2l} = L_{2l+2} = \frac{8}{5} L_{2l+4} = \dots$$

Допустив эту систему, мы должны положить

$$\dots = \mu_{l-2}^2 = \mu_l^2 = \frac{4}{5} = \mu_{l+2}^2 = \dots$$

и

$$\dots = \mu_{l-3}^2 = \mu_{l-1}^2 = \frac{1}{2} = \mu_{l+1}^2 = \dots$$

вместе с тем легко убеждаемся, что ряд

$$\dots, \alpha_{2l-1}, \alpha_{2l}, \alpha_{2l+1}, \alpha_{2l+8}, \dots$$

состоит только из двоек, ряд

$$\dots, \alpha_{2l-6}, \alpha_{2l-2}, \alpha_{2l+2}, \alpha_{2l+6}, \dots$$

состоит только из единиц и, наконец, ряд

$$\dots, \alpha_{2l-3}, \alpha_{2l-1}, \alpha_{2l+1}, \alpha_{2l+3}, \dots$$

должен состоять только из троек. Следовательно,

$$\xi_{2l} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\xi_{2l}}}}} = \frac{34\xi_{2l} + 9}{15\xi_{2l} + 4}$$

и соответственно этому мы можем положить

$$A' Y^2 + 2BYZ + A'' Z^2 = -\sqrt{\frac{-a}{40}} \{ 5Y^2 - 10YZ - 3Z^2 \}$$

и затем

$$f = -\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \left\{ (x - pz - qy)^2 + \frac{3}{4} y^2 - \frac{5}{2} yz - \frac{5}{4} z^2 \right\}.$$

Количества p и q должно подобрать так, чтобы числовая величина f не могла опускаться ниже $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$.

На этом основании, полагая сначала

$$z = 1, \quad y = 0$$

и затем

$$z = 0, \quad y = 1,$$

получаем два неравенства

$$\left\{ \frac{5}{4} - (x - p)^2 \right\}^2 \geq 1 \quad \text{и} \quad \frac{3}{4} + (x - q)^2 \geq 1,$$

которые должны быть выполнены при всех целых числах x .

Из приведенных неравенств нетрудно заключить, что обе разности

$$p - \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad q - \frac{1}{2}$$

должны быть целыми числами.

Таким образом мы получаем один класс форм, которые эквивалентны форме

$$-\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \left\{ \left(x - \frac{1}{2} z - \frac{1}{2} y \right)^2 + \frac{1}{4} (3y^2 - 10yz - 5z^2) \right\} =$$

$$= -\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \{ x^2 - x(y+z) - (y+z)^2 + 2y^2 \}$$

и наименьшее значение которых равно $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$, как нетрудно убедиться.

Итак, на основании произведенного нами исследования мы можем высказать два предложения относительно всех неопределенных тройничных квадратичных форм любого определителя D .

Наименьшее численное значение форм, эквивалентных

$$f_0 = -\sqrt[3]{\frac{2}{3}D} \{ x^2 + xy + y^2 - 2z^2 \},$$

равно $\sqrt[3]{\frac{2}{3}(D)}$, где (D) означает числовую величину D , а для всех прочих форм того же определителя D оно меньше $\sqrt[3]{\frac{2}{3}(D)}$.

Наименьшее значение форм, эквивалентных

$$f_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{5}D} \{ x^2 - xy - y^2 - 2z^2 \},$$

равно $\sqrt[3]{\frac{2}{5}(D)}$, а для форм, не эквивалентных ни f_0 , ни f_1 , оно меньше $\sqrt[3]{\frac{2}{5}(D)}$.

Первое предложение было сообщено нам 20 лет тому назад профессором А. Н. Коркиным.

Вопрос о точном высшем пределе для наименьших значений форм, не эквивалентных ни f_0 , ни f_1 , остается открытым, и мы можем утверждать только, что этот предел не меньше

$\sqrt[3]{\frac{1}{3}(D)}$ ввиду существования формы

$$- \sqrt[3]{\frac{1}{3} D \{ x^2 + y^2 - 3z^2 \}},$$

наименьшее значение которой равно $\sqrt[3]{\frac{1}{3}(D)}$.

Во время печатания этой заметки я убедился, что $\sqrt[3]{\frac{1}{3}(D)}$ служит точным высшим пределом для наименьших значений всех форм, не эквивалентных ни f_0 , ни f_1 .

ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ТРОЙНИЧНЫХ
КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ, НЕ ПРЕДСТАВЛЯЮ-
ЩИХ НУЛЬ, ДЛЯ ВСЕХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ
ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ $D \leq 50$

§ 1. В 41-м томе „Crelles Journal“ Эйзенштейном была дана таблица неопределенных тройничных квадратичных форм для всех определителей, меньших 20, не имеющих квадратных множителей; среди форм таблицы Эйзенштейна содержатся также формы, представляющие нуль.

Моя таблица не содержит форм, представляющих нуль, зато я не исключаю определителей, делящихся на квадраты. По моему мнению, важно рассматривать формы, определители которых делятся на квадраты, тем более, что эти формы встречаются в исследовании точного верхнего предела минимумов форм одного и того же произвольного определителя. В заметке „О неопределенных тройничных квадратичных формах“ (Mathem. Annalen, B. 56) я доказал следующую теорему.

Точный верхний предел минимумов всех неопределенных форм

$$f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy$$

одного и того же определителя

$$D = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2$$

равен

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}(D)},$$

т. е. минимуму форм, эквивалентных форме

$$\varphi_0 = -\sqrt[3]{\frac{2}{3} D(x^2 + xy + y^2 - 2z^2)}.$$

Для форм, не эквивалентных форме φ_0 , этот предел равен

$$\sqrt[3]{\frac{2}{5} D},$$

т. е. минимуму форм, эквивалентных форме

$$\varphi_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{5} D(x^2 + xy - y^2 - 2z^2)}.$$

Для форм, не эквивалентных формам φ_0 и φ_1 , этот предел равен

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3} D},$$

т. е. минимуму форм, эквивалентных форме

$$\varphi_2 = -\sqrt[3]{\frac{1}{3} D(x^2 + y^2 - 3z^2)}.$$

Наконец, если исключить формы, эквивалентные формам φ_0 , φ_1 , φ_2 , то тогда для любой формы f можно указать такую систему целых чисел x, y, z ($x^2 + y^2 + z^2 > 0$), что абсолютное значение f будет меньше

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3} D}.$$

При $D=12$ и $D=20$ выражения

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3} D} \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{\frac{2}{5} D}$$

обращаются в целые числа; соответственно этому в моей таблице найдем две замечательные формы

$$-2x^2 - 2xy - 2y^2 + 4z^2 \quad \text{и} \quad -2x^2 - 2xy + 2y^2 - 4z^2,$$

определители которых равны 12 и 20 и имеют квадратный множитель 4.

К формам $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ мы можем теперь добавить форму

$$\varphi_3 = \sqrt[3]{\frac{D}{25}} (-2x^2 - 2xy + 2y^2 - 5z^2),$$

определитель которой равен D , утверждая при этом, что для любой формы f , не эквивалентной формам $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, абсолютное значение f может быть сделано меньше

$$\sqrt[3]{\frac{8(D)}{25}}.$$

При $D=25$ форма φ_3 обращается в форму

$$-2x^2 - 2xy + 2y^2 - 5z^2,$$

содержащуюся в моей таблице.

Продолжение моего ряда

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \sqrt[3]{\frac{2}{5}}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{\frac{8}{25}}$$

является трудным, и моя таблица содержит только две формы $-2x^2 - 2y^2 - 2xz - 2yz + 6z^2$ и $-2x^2 - 2xy - 2y^2 + 10z^2$, наименьшие абсолютные значения которых равны 2, а определители соответственно равны 28 и 30.

§ 2. Составляя свою таблицу, я рассматривал наименьшие значения форм и установил, что эти значения в пределах моей таблицы не превосходят 2, ибо для

$$D=1, 2, 3, \dots, 50$$

мы имеем

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}D} < 4 \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{\frac{2}{5}D} < 3,$$

а равенство

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}D} = 3$$

невозможно.

Установив это, легко заметить, что искомые формы приводятся к следующим типам:

$$\begin{aligned} & \pm x^2 + \psi_{\pm D}(y, z), \\ & \pm 2x^2 + \frac{1}{2} \psi_{\pm 2D}(y, z), \\ & \pm 2 \left(x + \frac{1}{2} y \right)^2 + \frac{1}{2} \psi_{\pm 2D}(y, z), \\ & \pm 2 \left(x + \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} z \right)^2 + \frac{1}{2} \psi_{\pm 2D}(y, z), \end{aligned}$$

где через

$$\psi_{\pm H}(y, z)$$

обозначена бинарная квадратичная форма

$$ay^2 + 2byz + cz^2,$$

в которой коэффициенты

$$a, b, c$$

целые числа и удовлетворяют условию

$$ac - b^2 = \pm H.$$

Что касается определителей тройничных форм, то мы будем считать их положительными, так как определитель тройничной формы изменяет свой знак с $+$ на $-$ и обратно с $-$ на $+$, если форму умножить на -1 .

Отыскание форм я вел в таком порядке. Прежде всего я искал формы, которые достигают своего минимума только положительным значением; эти формы представляются следующими типами:

$$f_0 = x^2 - ay^2 - 2byz - cz^2,$$

$$f_1 = 2x^2 - \frac{1}{2}(a'y^2 + 2b'yz + c'z^2),$$

$$f_2 = 2 \left(x + \frac{1}{2} y \right)^2 - \frac{1}{2}(a'y^2 + 2b'yz + c'z^2),$$

$$f_3 = 2\left(x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{2}(a'y^2 + 2b'yz + c'z^2),$$

где формы

$$ay^2 + 2byz + cz^2 \quad \text{и} \quad a'y^2 + 2b'yz + c'z^2$$

— положительные формы и выражения

$$ac - b^2 \quad \text{и} \quad a'c' - b'^2$$

соответственно равны D и $2D$.

Все числа

$$a, b, c, a', b', c'$$

целые и, кроме того, целыми также являются числа:

$$\text{для } f_1 \quad \frac{1}{2}a', \frac{1}{2}b', \frac{1}{2}c',$$

$$\text{для } f_2 \quad \frac{1}{2}a' + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}b', \frac{1}{2}c',$$

$$\text{для } f_3 \quad \frac{1}{2}a' + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}b' + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}c' + \frac{1}{2}.$$

Из множества форм типа f_0 нужно исключить все формы, которые принимают значения 0 или -1 . В силу этого исключаются, например, случаи, когда коэффициенты a и c равны 1, 2, 4, 5, 9, 10.

Исключение лишних форм типа f_0 производится довольно легко; для оставшихся в малом числе после исключения форм легко убедиться, что они не принимают ни значения 0, ни значения -1 .

Из типов f_1, f_2, f_3 нужно исключить все формы, которые могут представлять 0, 1, -1 , -2 .

Принимая во внимание простые равенства

$$2 - 2 = 0, \quad 2 - 3 = -1, \quad 2 - 4 = -2, \quad 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 2^2 = -2,$$

$$2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 0, \quad 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} = -1, \quad 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} = -2,$$

$$2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} = 1, \quad 2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} = 0, \quad 2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{2} = -1,$$

мы должны из типов f_1, f_2, f_3 исключить все формы, где коэффициенты a' и c' меньше 12.

С другой стороны, известно, что любая положительная форма

$$a' y^2 + 2b' yz + c' z^2$$

может быть приведена так, что ее первый коэффициент будет не больше

$$\sqrt{\frac{4}{3} (a' c' - b'^2)},$$

а этот корень в рассматриваемых случаях не превышает

$$\sqrt{\frac{4}{3} \cdot 100} \text{ и, значит, меньше } 12.$$

Следовательно, все формы типов f_1, f_2, f_3 отпали.

Наибольшее число форм моей таблицы принадлежит к типу

$$-x^2 + ay^2 + 2byz + cz^2,$$

где

$$b^2 - ac = D,$$

так как типы

$$-2(x + \lambda y + \mu z)^2 + \frac{1}{2}(a' y^2 + 2b' yz + c' z^2),$$

где

$$\lambda = 0 \text{ или } \frac{1}{2}, \mu = 0 \text{ или } \frac{1}{2}, b'^2 - a'c' = 2D,$$

дают только 12 форм, не представляющих ни 0, ни ± 1 .

Составляя свою таблицу, я пользовался таблицей Кэли бинарных квадратичных форм (Grelle's Journal, В. 60. — The collected Math. Papers of Arthur Cayley, Vol. V); а так как таблица Кэли вычислена для всех определителей до ± 100 , я смог продолжить свою таблицу только до определителя 50.

Важно заметить, что все формы моей таблицы ясно отличаются одна от другой некоторыми характерными свойствами. Пользуясь этим, я всегда убеждался, что две формы эквивалентны, если их различие не обнаруживается легко устанавливаемыми характерными свойствами.

Необходимость установления возможной эквивалентности форм представляет основную трудность при составлении таблицы тройничных неопределенных квадратичных форм. Я преодолел эту трудность в пределах своей таблицы, и, таким образом, она содержит все возможные классы и не содержит никакого два раза.

§ 3. Для форм, определители которых меньше 37, моя таблица дает также подстановки, переводящие эти формы сами в себя. Эти подстановки выбраны таким образом, что они позволяют установить некоторые неравенства, ограничивающие представление чисел формами.

Для краткости таблицы я указываю только простейшие неравенства, но, анализируя их и выводя подходящие следствия, нетрудно убедиться, что приведенные представления действительно ограничены моими неравенствами так, что нахождение приведенного представления данного числа данной формой с определителем, меньшим 37, сводится к конечному числу элементарных операций. Найдя приведенные представления, мы можем получить все другие с помощью ряда под-

становок, комбинируя их с изменением знаков и перестановками x, y, z .

Нужно заметить, что для упрощения моих исследований я ввел в некоторых случаях дробные представления.

Следующие примеры служат для пояснения пользования моей таблицей при нахождении представлений чисел формами.

Пример 1. Представить число 61 формой

$$-x^2 - y^2 + 15z^2.$$

Так как 61 — число положительное, то мы можем ограничить целые числа, удовлетворяющие уравнению

$$-x^2 - y^2 + 15z^2 = 61,$$

неравенствами

$$x < y < 3z, \quad x + y < 5z,$$

указанными в моей таблице.

Из этих неравенств для суммы

$$x^2 + y^2$$

нетрудно получить следующее неравенство:

$$x^2 + y^2 < 13z^2.$$

Следовательно, мы будем иметь

$$61 = -x^2 - y^2 + 15z^2 > 2z^2$$

и далее

$$z^2 < \frac{61}{2}, \quad z < 6.$$

С другой стороны, очевидно, что $z > 2$. Значит, нужно испытать только три значения z :

$$z = 3, \quad z = 4, \quad z = 5.$$

Полагая $z = 3$, получим уравнение

$$x^2 + y^2 = 135 - 61 = 74,$$

откуда находим

$$x = 5, \quad y = 7;$$

для $z = 4$ имеем невозможное равенство

$$x^2 + y^2 = 240 - 61 = 179;$$

полагая, наконец, $z = 5$, получим уравнение

$$x^2 + y^2 = 375 - 61 = 314,$$

которое дает

$$x = 5, \quad y = 17.$$

Исследуя два полученных представления

$$x = 5, \quad y = 7, \quad z = 3$$

и

$$x = 5, \quad y = 17, \quad z = 5,$$

заметим, что второе не удовлетворяет условию

$$y < 3z$$

и, следовательно, не будет приведенным представлением. Действительно, достаточно сделать подстановку

$$x_1 = x, \quad -y_1 = 4y - 15z, \quad -z_1 = y - 4z,$$

чтобы преобразовать представление

$$x=5, \quad y=17, \quad z=5$$

в приведенное представление

$$x=5, \quad y=7, \quad z=3.$$

Что касается других представлений числа 61 формой

$$-x^2 - y^2 + 15z^2,$$

то их можно получить из приведенного представления, комбинируя подстановки моей таблицы с изменением знаков и перестановками x и y .

Пример 2. Представить число -13 формой

$$x^2 - 3y^2 - 2yz - 6z^2.$$

В этом случае моя таблица дает для приведенных представлений неравенства

$$(y + 6z) > 3x \text{ или } (3y + z) > 3x, \text{ или } (2y - 5z) > 3x$$

(x — число положительное). Из простых тождеств

$$3y^2 + 2yz + 6z^2 = \frac{1}{6} \{17y^2 + (y + 6z)^2\},$$

$$3y^2 + 2yz + 6z^2 = \frac{1}{3} \{17z^2 + (3y + z)^2\},$$

$$3y^2 + 2yz + 6z^2 = \frac{1}{7} \{17(y + z)^2 + (2y - 5z)^2\}$$

и из наших неравенств просто выводится неравенство

$$3y^2 + 2yz + 6z^2 - x^2 > \frac{2}{7} x^2.$$

В силу этого неравенства мы имеем

$$x^2 < \frac{13 \cdot 7}{2} = 45.5$$

и, следовательно, нужно испытать только семь значений x :

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Получим

для $x=0$	уравнение	$3y^2 + 2yz + 6z^2 = 13,$
для $x=1$	уравнение	$3y^2 + 2yz + 6z^2 = 14,$
для $x=2$	уравнение	$3y^2 + 2yz + 6z^2 = 17,$
для $x=3$	уравнение	$3y^2 + 2yz + 6z^2 = 22,$
для $x=4$	уравнение	$3y^2 + 2yz + 6z^2 = 29,$
для $x=5$	уравнение	$3y^2 + 2yz + 6z^2 = 38,$
для $x=6$	уравнение	$3y^2 + 2yz + 6z^2 = 49.$

Решая эти уравнения, можно считать одно из чисел y, z неотрицательным; пусть $z \geq 0$.

Кроме того, нетрудно получить с помощью предыдущих неравенств неравенства

$$y^2 < \frac{6}{17} \{3y^2 + 2yz + 6z^2\} \quad \text{и} \quad z^2 < \frac{3}{17} \{3y^2 + 2yz + 6z^2\},$$

из которых следует, что

$$y^2 < \frac{6}{17} \cdot 49 < 25 \quad \text{и} \quad z^2 < \frac{3}{17} \cdot 49 < 9.$$

Очевидно также, что все случаи, где $yz = 0$, невозможны, так как никакое из чисел

$$13, 14, 17, 22, 29, 38, 49$$

не делится на 3.

Значит, достаточно комбинировать два значения 1 и 2 для z с восемью значениями $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ для y . Результаты этих комбинаций ясно представлены таблицей:

	$z = 1$	$z = 2$
$3y^2 + 2yz + 6z^2$	$3y^2 + 2y + 6$	$3y^2 + 4y + 24$
$y = \pm 1$	11.7	31.23
$y = \pm 2$	22.14	44.28
$y = \pm 3$	39.27	63.39
$y = \pm 4$	62.46	88.56

Таким образом находим два представления числа -13 формой

$$x^2 - 3y^2 - 2yz - 6z^2:$$

$$x = 1, y = -2, z = 1 \quad \text{и} \quad x = 3, y = 2, z = 1.$$

Второе представление приводится к первому с помощью подстановки

$$x_2 = 3y + z - 2x, \quad -y_2 = 2y + z - x, \quad z_2 = z.$$

Значит, остается только одно приведенное представление

$$x = 1, \quad y = -2, \quad z = 1.$$

Что касается других представлений числа -13 формой

$$x^2 - 3y^2 - 2yz - 6z^2,$$

то их можно получить из этого приведенного представления, комбинируя подстановки моей таблицы с изменением знака x и одинаковым изменением знака y и z .

Пример 3. Представить число -15 формой

$$-x^2 - 2y^2 + 13z^2.$$

В этом случае моя таблица для приведенных представлений дает неравенства

$$3x > 13z \quad \text{или} \quad x + 4y > 13z, \quad \text{или} \quad 3x + 4y > 17z$$

(числа x, y, z — положительные).

Из простых тождеств

$$x^2 + 2y^2 = \frac{1}{9} \{(x + 4y)^2 + 2(2x - y)^2\},$$

$$x^2 + 2y^2 = \frac{1}{17} \{(3x + 4y)^2 + 2(3y - 2x)^2\}$$

и наших неравенств выводится, очевидно, неравенство

$$x^2 + 2y^2 - 13z^2 > 4z^2.$$

С другой стороны, анализируя подстановки моей таблицы, можно заметить, что в рассматриваемом случае можно ввести числа дробные, но так, чтобы числа $2x, y, 2z, x + z$ были целыми. В силу этого число z , меньшее $\sqrt{\frac{15}{4}}$, может иметь только четыре значения:

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{2}, \quad \frac{3}{2}.$$

Получим

$$\text{для } z=0 \quad \text{уравнение } x^2 + 2y^2 = 15,$$

$$\text{для } z=\frac{1}{2} \quad \text{уравнение } (2x)^2 + 8y^2 = 73,$$

$$\text{для } z=1 \quad \text{уравнение } x^2 + 2y^2 = 28,$$

$$\text{для } z=\frac{3}{2} \quad \text{уравнение } (2x)^2 + 8y^2 = 177.$$

Первое и третье из этих уравнений невозможны, второе дает

$$2x=1, \quad y=3,$$

и, наконец, четвертое дает два решения

$$2x=7, \quad y=4 \quad \text{и} \quad 2x=13, \quad y=1.$$

Итак, нашли три дробных представления:

$$1) \quad x=\frac{1}{2}, \quad y=3, \quad z=\frac{1}{2};$$

$$2) \quad x=\frac{7}{2}, \quad y=4, \quad z=\frac{3}{2};$$

$$3) \quad x=\frac{13}{2}, \quad y=1, \quad z=\frac{3}{2}.$$

Эти три представления удовлетворяют условиям, указанным в моей таблице, но третье представление можно отбросить, приведя его к первому с помощью подстановки

$$\begin{aligned} 2x_2 &= 7x + 12y - 39z, \\ y_2 &= 3x + 3y - 13z, \\ 2z_2 &= 3x + 4y - 15z. \end{aligned}$$

Значит, остается два приведенных представления

$$x=\frac{1}{2}, \quad y=3, \quad z=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad x=\frac{7}{2}, \quad y=4, \quad z=\frac{3}{2}.$$

Внимательно рассмотрев этот пример, можно сделать общее важное замечание.

Неравенства, данные в моей таблице для ограничения представлений отрицательных чисел, достигают цели, но, желая сократить число приведенных представлений, нужно принимать во внимание также неравенства, ограничивающие представления положительных чисел, требуя при этом, чтобы

они удовлетворялись во всех случаях, где соответствующие неравенства последнего столбца не имеют места.

Например, исследуя приведенные представления отрицательных чисел формой

$$-x^2 - 2y^2 + 13z^2,$$

можно различать три общих случая

- 1) $3x > 13z$, $x + 4y > 13z$ и, значит $3x + 4y > 17z$;
- 2) $x < 3z$, $x + 4y > 13z$, $3x + 4y > 17z$;
- 3) $3x > 13z$, $x + 4y < 9z$, $3x + 4y > 17z$

и два исключительных случая, когда

$$x = 0 \text{ и } 4y = 13z \text{ или } 3x = 13z \text{ и } y = 0.$$

Возвращаясь к представлениям числа -15 формой

$$-x^2 - 2y^2 + 13z^2,$$

заметим, что все они могут быть получены из двух приведенных представлений:

$$1) \ x = \frac{1}{2}, \ y = 3, \ z = \frac{1}{2};$$

$$2) \ x = \frac{7}{2}, \ y = 4, \ z = \frac{3}{2},$$

с помощью подстановок моей таблицы, комбинируя эти подстановки с изменением знаков чисел x , y , z .

Легко получить и представления в целых числах; для этой цели достаточно сделать подстановку

$$\begin{aligned} 2x_3 &= 3x + 4y - 13z, \\ y_3 &= x + 5y - 13z, \\ 2z_3 &= x + 4y - 11z, \end{aligned}$$

и из представления

$$x = \frac{7}{2}, \quad y = -4, \quad z = -\frac{3}{2}$$

мы найдем представление

$$x = 7, \quad y = 3, \quad z = 2.$$

Неравенства, которые ограничивают приведенные представления, можно, очевидно, применять также для доказательства невозможности представления некоторых чисел формами.

Я должен констатировать, что у меня во всех рассматриваемых случаях эта невозможность есть следствие невозможности удовлетворить некоторым, легко устанавливаемым, сравнениям. В соответствии с этим я убедился, что любое целое число представляется данной тройничной неопределенной формой, если невозможность такого представления не обнаруживается легко устанавливаемыми сравнениями.

§ 4. Заканчивая, я должен упомянуть о двух очень талантливых математиках — А. Мейере и Г. Вороном.

Работы Мейера, очень трудные для изучения, содержат важные результаты об эквивалентности тройничных неопределенных квадратичных форм и о возможности представлений чисел этими формами. (Crelle's Journal, B. 98, 112—116 и Inauguraldissertation „Zur Theorie der unbestimmten ternären quadratischen Formen“).

Что касается Г. Вороного, то он не смог опубликовать свои исследования о неопределенных формах, и поэтому я не могу утверждать, что он имел полное решение основных вопросов, относящихся к этим формам. Мне известно только, что он надеялся устранить принципиальные трудности исследования с помощью принципа Эрмита и геометрических соображений. Польза геометрических соображений при нахождении приведенных представлений чисел является для меня несомненной, так как они не только упрощают анализ полу-

ченных неравенств, но, кроме того, они помогают при нахождении подстановок.

Важно заметить также, что по поводу моей краткой заметки „О трех неопределенных квадратичных формах“, опубликованной на русском языке (Изв. Акад. Наук, 1902, сент., т. XVII, № 2), Г. Вороной говорил мне, что число условий, которые ограничивают приведенные представления, не остается одним и тем же для различных форм, а может значительно варьироваться. Это утверждение Вороного подтверждается до некоторой степени моей таблицей, где находим для приведенных представлений чисел формой

$$-x^2 - 2y^2 - 2yz + 14z^2$$

четыре неравенства, а для представлений формой

$$-x^2 - 2y^2 - 2yz + 17z^2$$

— девять неравенств.

Вопрос о числе этих неравенств в общем случае остается открытым, так же как и вопрос об общем методе нахождения неравенств и соответствующих подстановок и даже вопрос о существовании приведенного представления для любой формы.

С некоторой точки зрения неопределенные формы заслуживают большего внимания, чем формы определенные, исследования которых сводятся непосредственно к конечному числу элементарных операций.

Таблица неопределенных тройничных квадратичных форм, не представляющих нуль, для всех положительных определителей $D \leq 50$

D	Формы	Союзы	Подстановки	Приведенные представления	
				для положительных чисел	для отрицательных чисел
1, 2	Форм нет	_____	_____	_____	_____
3	$-x^2 - y^2 + 3z^2$	$-3x^2 - 3y^2 + z^2$	$x_1 = 2x - 3z,$ $y_1 = y,$ $z_1 = x - 2z,$ $x_2 = x$ $y_2 = 2y - 3z$ $z_2 = y - 2z$	$x < z$ $y < z$	$y > 3z$
4	Форм нет	_____	_____	_____	_____
5	$-x^2 - 2y^2 - 2yz + 2z^2$ $= \frac{1}{2} \{ -2x^2 - u^2 + 5z^2 \}$ $u = 2y + z$	$-5x^2 - 2y^2 - 2yz + 2z^2$	$u_1 = 9u - 20z,$ $z_1 = 4u - 9z,$ $x_1 = x,$ $x_2 = u + 3x - 5z$ $u_2 = 2u + 2x - 5z$ $z_2 = u + 2x - 4z$	$u < 2z$ $u + 2x < 3z$	$2u > 5z$ или $u + 2x > 5z$
6	$-x^2 - y^2 + 6z^2$	$-6x^2 - 6y^2 + z^2$	$x_1 = 5x - 12z,$ $z_1 = 2x - 5z,$ $y_1 = y,$ $x_2 = 4x + 3y - 12z$ $y_2 = 3x + 4y - 12z$ $z_2 = 2x + 2y - 7z$	$y < x < 2z$ $x + y < 3z$	$x > 3z$ или $x + y > 4z$
7	$-x^2 - y^2 + 7z^2$	$-7x^2 - 7y^2 + z^2$	$x_1 = 2z + 2y - 7z,$ $z_1 = x + 2y - 6z,$ $y_1 = 2x + 2y - 7z,$ $y_2 = 2x + 5y - 14z$	$x < y$ $x + 2y < 5z$	$x + 2y > 7z$
8	Форм нет	_____	_____	_____	_____
9	$x^2 - 3y^2 - 3z^2$	$9x^2 - 3y^2 - 3z^2$	$x_1 = 2x - 3y,$ $y_1 = x - 2y,$ $x_2 = 2x - 3z$ $z_2 = x - 2z$	$x > 3y, x > 3z$	$x < y$

10	$-x^2 - 2y^2 + 5z^2$	$-10x^2 - 5y^2 + 2z^2$	$x_1 = 9x - 20z,$ $z_1 = 4x - 9z,$ $z_2 = x + 2y - 4z$	$x_2 = 2x + 2y - 5z$ $y_2 = x + 3y - 5z$ $z_2 = x + 2y - 4z$	$x < 2z$ $x + 2y < 3z$	$2x > 5z$ или $x + 2y > 5z$
11	$-x^2 - y^2 + 11z^2$	$-11x^2 - 11y^2 + z^2$	$x_1 = 10x - 33z,$ $z_1 = 3x - 10z,$ $y_1 = y,$	$x_2 = 3x + 6y - 22z$ $y_2 = 6x + 8y - 33z$ $z_2 = 2x + 3y - 12z$	$x < y < 3z$ $2x + 3y < 11z$	$3x > 11z$ или $2x + 3y > 13z$
12	$-x^2 - y^2 + 12z^2$	$-12x^2 - 12y^2 + z^2$ $\equiv p^2 \pmod{3}, \equiv p^2 \pmod{5}$	$x_1 = 7x - 24z,$ $z_1 = 2x - 7z,$ $y_1 = y,$	$x_2 = 2x + 3y - 12z$ $y_2 = 3x + 2y - 12z$ $z_2 = x + y - 5z$	$y < 3z$ $x + y < 4z$ $x < y$	$y > 4z$ или $x + y > 6z$
	$-x^2 + 2y^2 - 6z^2$	$-12x^2 + 6y^2 - 2z^2$ $\equiv 0 \pmod{2}$	$x_1 = 3x - 4y,$ $y_1 = 2x - 3y,$ $z_1 = z,$	$y_2 = 2y - 3z$ $z_2 = y - 2z$ $x_2 = x$	$x < y$ $3z < y$	$x > 2y$ или $z > y$
	Форма Коркина $-2x^2 - 2xy - 2y^2 + 4z^2$ $\equiv 0 \pmod{2}$ $= 2[-u^2 - 3v^2 + 2z^2]$ $u = x + \frac{y}{2}, v = \frac{y}{2}$	$-8x^2 + 8xy - 8y^2 + 3z^2$	$u_1 = 3u - 4z,$ $z_1 = 2u - 3z,$ $v_1 = v$	$u_2 = 3v - 2z$ $v_2 = u + 2v - 2z$ $z_2 = u + 3v - 3z$	$u < z$ $u + 3v < 2z$	$u > 2z$ или $u + 3v > 4z$
13	$-x^2 - 2y^2 - 2yz + 6z^2$ $= -\frac{1}{2}\{-2x^2 - u^2 + 13z^2\}$ $u = 2y + z$	$-13x^2 - 6y^2 + 2yz + 2z^2$	$2u_1 = 11u - 39z,$ $2z_1 = 3u - 11z,$ $x_1 = x,$ $x_3 = 3x + 3u - 13z,$ $2u_3 = 12x + 7u - 39z$ $2z_3 = 4x + 3u - 15z$	$x_2 = 5x + u - 13z$ $2u_2 = 4x + 3u - 13z$ $2z_2 = 4x + u - 11z$	$u < 3z$ $u + 4x < 9z$ $3u - 4x < 13z$	$3u > 13z$ или $u + 4x > 13z$ или $3u + 4x > 17z$
14	$-x^2 - y^2 + 14z^2$	$-14x^2 - 14y^2 + z^2$	$2x_1 = 3x + 3y - 14z$ $2y_1 = 3x + 11y - 42z$ $2z_1 = x + 3y - 12z$		$x + 3y < 10z$ $x < y$	$x + 3y > 14z$

D	Формы	Союзы	Подстановки	Приведенные представления	
				для положительных чисел	для отрицательных чисел
15	$-x^2 - y^2 + 15z^2$	$-15x^2 - 15y^2 + z^2$ $\equiv p^2 \pmod{3}, \equiv p^2 \pmod{5}$	$x_1 = 4x - 15z,$ $z_1 = x - 4z,$ $y_1 = y,$ $x_2 = 6x + 5y - 30z$ $y_2 = 5x + 6y - 30z$ $z_2 = 2x + 2y - 11z$	$y < x < 3z$ $y + x < 5z$	$x > 5z$ или $y + x > 6z$
	$-x^2 - 2y^2 - 2yz + 7z^2$ $= -x^2 + 3u^2 - 5v^2$ $u = 3z + y, v = 2z + y$	$-15x^2 - 7y^2 - 2yz + 2z^2$ $\equiv p^2 \pmod{3}, \equiv 2p^2 \pmod{5}$	$x_1 = 2x - 3u,$ $u_1 = 4x - 2u,$ $v_1 = v,$ $u_2 = 4u - 5v$ $v_2 = 3u - 4v$ $x_2 = x$	$x < u$ $5v < 3u$	$x > 3u$ или $v > u$
	$-x^2 + 2y^2 + 2yz - 7z^2$ $= -x^2 - 3u^2 + 5v^2$ $u = 3z + y, v = 2z + y$	$-15x^2 + 7y^2 + 2yz - 2z^2$ $\equiv p^2 \pmod{3}, \equiv 2p^2 \pmod{5}$	$u_1 = 4u - 5v,$ $v_1 = 3u - 4v,$ $x_1 = x,$ $x_3 = 3x + 6u - 10v, u_3 = 2x + 2u - 5v$ $v_3 = 2x + 2u - 6v$	$u < v$ $x < 2v$ $2x + 3u < 5v$	$3u > 5v$ или $2x > 5v$ $2x + 3u > 7v$
16	Форм нет	_____	_____	_____	_____
17	$x^2 - 3y^2 - 2yz - 6z^2$	$17x^2 - 6y^2 + 2yz - 3z^2$	$x_1 = 2y + 12z - 5x, x_2 = 3y + z - 2x$ $z_1 = y + 5z - 2z, y_2 = 2y + z - x$ $y_1 = -y, z_2 = -z$ $x_3 = 8x + 6y - 15z, y_3 = 3x + 3y - 5z$ $z_3 = -3x - 2y + 6z$	$(y + 6z) < 2x$ $(3y + z) < x$ $(6y - 15z) < 7x$	$(y + 6z) > 3x$ или $(3y + z) > 3x$ или $(2y - 5z) > 3x$

18	$-x^2 - 3y^2 + 6z^2$	$-18x^2 - 6y^2 + 3z^2$	$y_1 = 3y - 4z$ $z_1 = 2y - 3z$ $x_1 = x$	$x_2 = 2x + 3y - 6z$ $y_2 = x - 2z$ $z_2 = x + y - 3z$	$y < z$ $x + y < 2z$	$y > 2z$ или $x + y > 4z$
19	$-x^2 - y^2 + 19z^2$	$-19x^2 - 19y^2 + z^2$		$x_1 = 2x + 4y - 19z$, $x_2 = 19x + 18y - 114z$ $y_1 = 4x + 17y - 76z$, $y_2 = 18x + 19y - 114z$ $z_1 = x + 4y - 18z$, $z_2 = 6x + 6y - 37z$	$x + 4y < 17z$ $x + y < 6z$ $x < y$	$x + 4y > 19z$ или $3x + 3y > 19z$
20	$x^2 - 3y^2 - 2yz - 7z^2$ $\equiv x^2 - \frac{1}{2}u^2 - \frac{5}{2}v^2$ $u \equiv 3z - y$, $v \equiv y + z$ Не представляет — 1	$20x^2 - 7y^2 + 2yz - 3z^2$	$x_1 = 3x - 2u$, $u_1 = 4x - 3u$, $v_1 = v$	$x_2 = 7x - 2u - 10v$ $u_2 = 4x - 2u - 5v$ $v_2 = 4x - u - 6v$	$u < x$ $u + 5v < 3x$	$u > 2x$ или $u + 5v > 4x$
	$-x^2 - 2y^2 + 10z^2$	$-20x^2 - 10y^2 + 2z^2$ $\equiv 0 \pmod{2}$	$y_1 = 9y - 20z$, $z_1 = 4y - 9z$, $x_1 = x$	$x_2 = 3x + 2y - 10z$ $y_2 = x + 2y - 5z$ $z_2 = x + y - 4z$	$y < 2z$ $x + y < 3z$	$2y > 5z$ или $x + y > 5z$
	$-2x^2 - 2xy + 2y^2 - 4z^2$ $\equiv 0 \pmod{2}$ $\equiv -2 \{u^2 - 5v^2 + 2z^2\}$ $u \equiv x + \frac{y}{2}$, $v \equiv \frac{y}{2}$	$-8x^2 - 8xy + 8y^2 - 5z^2$	$2u_1 = 3u - 5v$, $2v_1 = u - 3v$, $z_1 = z$	$u_2 = 2u + 2z - 5v$ $v_2 = u + 2z - 4v$ $z_2 = u + 3z - 5v$	$u < v$ $u + 2z < 3v$	$u > 5v$ или $u + 2z > 5v$
21	$-x^2 - y^2 + 21z^2$	$-21x^2 - 21y^2 + z^2$ $\equiv p^2 \pmod{3}$, $\equiv p^2 \pmod{7}$	$y_1 = 55y - 252z$, $z_1 = 12y - 55z$, $x_1 = x$	$x_2 = 2x + 9y - 42z$ $y_2 = 9x + 26y - 126z$ $z_2 = 2x + 6y - 29z$ $x_3 = 6x + 7y - 42z$, $y_3 = 7x + 6y - 42z$ $z_3 = 2x + 2y - 13z$	$2y < 9z$ $x + 3y < 14z$ $x + y < 6z$ $x < y$	$3y > 14z$ или $x + 3y > 15z$ или $x + y > 7z$

D	Формы	Союзы	Подстановки	Приведенные представления	
				для положительных чисел	для отрицательных чисел
21	$-x^2 - 2y^2 - 2yz + 10z^2$ $= u^2 - 3v^2 - 7w^2$ $u = 3x + y - 10z$ $v = x + y - 3z$ $w = x - 3z$	$-21x^2 - 10y^2 - 2yz + 2z^2$ $\equiv -p^2 \pmod{3}, \equiv p^2 \pmod{7}$	$u_1 = 2u - 3v, \quad u_2 = 8u - 21w$ $v_1 = u - 2v, \quad w_2 = 3u - 8w$ $w_1 = w, \quad v_3 = v$ $u_3 = 20u - 21v - 42w, v_3 = 7u - 8v - 14w$ $w_3 = 6u - 6v - 13w$	$3v < u$ $3w < u$ $21v + 42w < 19u$	$v > u$ или $7w > 3u$ или $v + 2w > u$
	$-x^2 + 2y^2 + 2yz - 10z^2$ $= u^2 - 2v^2 - 2wz - 11z^2$ $u = 2y - x + z, \quad v = y - x$	$-21x^2 + 10y^2 + 2yz - 2z^2$ $\equiv p^2 \pmod{3}, \equiv -p^2 \pmod{7}$	$u_1 = 3u - 4v - 2z, \quad u_2 = 4u - 3v - 12z$ $v_1 = 2u - 3v - 2z, \quad v_2 = 2u - v - 7z$ $z_1 = z, \quad z_2 = -u + v + 3z$ $u_3 = 4u + 3v - 9z, v_3 = 2u + v - 6z$ $z_3 = -u - v + 2z$	$(2v + z) < u$ или $(v + 4z) < u$ или $(v - 3z) < u$	$(2v + z) > 2u$ или $3(v + 4z) > 5u$ или $3(v - 3z) > 5u$
22	$-x^2 - y^2 + 22z^2$	$-22x^2 - 22y^2 + z^2$	$2x_1 = -x + 5y - 22z, 2x_2 = 11x + 9y - 66z$ $2y_1 = 5x + 23y - 110z, 2y_2 = 9x + 11y - 66z$ $2z_1 = x + 5y - 24z, 2z_2 = 3x + 3y - 20z$	$x + 5y < 22z$ или $x + y < 6z$ или $x < y$	$x + 5y > 26z$ или $3x + 3y < 22z$
23	$-x^2 - y^2 + 23z^2$	$-23x^2 - 23y^2 + z^2$	$y_1 = 24y - 115z, \quad x_1 = 10x + 27y - 138z$ $z_1 = 5y - 24z, \quad y_2 = 27x + 82y - 414z$ $x_1 = x, \quad z_2 = 6x + 18y - 91z$ $x_3 = 12x + 15y - 92z, y_3 = 8x + 12y - 69z$ $z_3 = 3x + 4y - 24z$	$5y < 23z$ или $x + 3y < 15z$ или $3x + 4y < 23z$ или $x < y$	$y > 5z$ или $3x + 9y > 46z$ или $3x + 4y > 25z$

$x^2 - 3y^2 - 8z^2$ Не представляет — 1	$24x^2 - 8y^2 - 3z^2$	$x_1 = 3x - 8z,$ $z_1 = x - 3z,$ $y_1 = y,$ $x_2 = 2x - 3y$ $y_2 = x - 2y$ $z_2 = z$	$4z < x$ или $3y < x$	$2z > x$ или $y > x$
$-x^2 - y^2 + 24z^2$	$-24x^2 - 24y^2 + z^2$ $\equiv p^2 \pmod{8}$	$y_1 = 5y - 24z,$ $z_1 = y - 5z,$ $x_1 = x,$ $x_2 = 3x + 4y - 24z$ $y_2 = 4x + 9y - 48z$ $z_2 = x + 2y - 11z$	$y < 4z$ или $x + 2y < 10z$ или $x < y$	$y > 6z$ или $x + 2y > 12z$
$-x^2 - 3y^2 + 8z^2$	$-24x^2 - 8y^2 + 3z^2$ $\equiv 3p^2 \pmod{8}$	$x_1 = 3x - 8z,$ $z_1 = x - 3z,$ $y_1 = y,$ $y_3 = 5y - 8z,$ $x_2 = 5x + 12y - 24z$ $y_2 = 4x + 13y - 24z$ $z_2 = 3x + 9y - 17z$ $x_3 = x$	$x < 2z$ или $3x + 9y < 16z$ или $3y < 4z$	$x > 4z$ или $x + 3y > 6z$ или $y > 2z$
$-x^2 + 2y^2 - 12z^2$	$-24x^2 + 12y^2 - 2z^2$ $\equiv 0 \pmod{2}$	$x_1 = 3x - 4y,$ $y_1 = 2x - 3y,$ $z_1 = z,$ $y_3 = 5y - 12z,$ $x_2 = 5x - 12y + 24z$ $y_2 = 6x - 17y + 36z$ $z_2 = 2x - 6y + 13z$ $x_3 = x$	$x < y$ или $3x + 18z < 8y$ или $3z < y$	$x > 2y$ или $x + 6z > 3y$ или $2z > y$
$-2x^2 - 2y^2 + 6z^2$ $= -2(x^2 + y^2 - 3z^2)$ $\equiv 0 \pmod{2}$	$-12x^2 - 12y^2 + 4z^2$	$y_1 = 2y - 3z$ $z_1 = y - 2z$ $x_1 = x$	$x < z, y < z$	$y > 3z$
$-2x^2 - 2xy + 2y^2 - 5z^2$ $= -\frac{1}{2}(-u^2 + 5y^2 - 10z^2)$ $u = 2x + y$	$-10x^2 - 10xy + 10y^2 - 5z^2$	$y_1 = 3y - 4z,$ $z_1 = 2y - 3z,$ $u_1 = u,$ $2u_2 = 3u - 5y$ $2y_2 = u - 3y$ $z_2 = z$	$2z < y$ или $u < y$	$z > y$ или $u > 5y$
$-x^2 - 2y^2 + 13z^2$	$-26x^2 - 13y^2 + 2z^2$	$2x_1 = 11x - 39z,$ $2z_1 = 3x - 11z,$ $y_1 = y,$ $2x_3 = 3x + y - 13z,$ $y_2 = x + 5y - 13z$ $2z_3 = x + 4y - 11z$	$x < 3z$ или $3x + 4y < 13z$ или $x + 4y < 9z$	$3x > 13z$ или $3x + 4y > 17z$ или $x + 4y < 13z$

D	Формы	Союзные	Подстановки	Приведенные представления	
				для положительных чисел	для отрицательных чисел
27	$x^2 - 6y^2 - 6yz - 6z^2$ $= x^2 - 6u^2 - 18v^2$ $u = y + \frac{z}{2}, v = \frac{z}{2}$ Не представляет — 1	$-27x^2 - 6y^2 + 6yz - 6z^2$	$x_1 = 5x - 12u,$ $u_1 = 2x - 5u,$ $v_1 = v,$ $x_2 = 5x - 6u - 18v$ $u_2 = x - 2u - 3v$ $v_2 = x - u - 4v$	$3u < x$ $3u + 9v < 2x$	$2u > x$ или $u + 3v > x$
	$-x^2 + 3y^2 - 9z^2$	$-27x^2 + 9y^2 - 3z^2$ $\equiv 0 \pmod{3}$	$x_1 = 2x - 3y,$ $y_1 = x - 2y,$ $z_1 = z,$ $y_2 = 2y - 3z$ $z_2 = y - 2z$ $x_2 = x$	$x < y$ $3z < y$	$x > 3y$ или $z > y$
	$-x^2 - y^2 + 27z^2$	$-27x^2 - 27y^2 + z^2$	$y_1 = 26y - 135z,$ $z_1 = 5y - 26z,$ $x_1 = x,$ $x_2 = 3x + 10y - 54z$ $y_2 = 10x + 24y - 135z$ $z_2 = 2x + 5y - 28z$ $x_3 = 10x + 12y - 81z,$ $y_3 = 12x + 17y - 108z$ $z_3 = 3x + 4y - 26z$	$y < 5z$ $2x + 5y < 27z$ $3x + 4y < 25z$ $x < y$	$5y > 27z$ или $2x + 5y > 29z$ или $3x + 4y > 27z$
28	$-x^2 - y^2 + 28z^2$	$-28x^2 - 28y^2 + z^2$	$x_1 = 2x + 5y - 28z,$ $y_1 = 5x + 26y - 140z,$ $z_1 = x + 5y - 27z,$ $x_2 = 7x + 20y - 112z$ $y_2 = 20x + 49y - 280z$ $z_2 = 4x + 10y - 57z$ $x_3 = 8x + 7y - 56z,$ $y_3 = 7x + 8y - 56z$ $z_3 = 2x + 2y - 15z$	$x + 5y < 26z$ $2x + 5y < 28z$ $x + y < 7z$ $x < y$	$x + 5y > 28z$ или $2x + 5y > 29z$ или $x + y > 8z$

	$-x^2 - 2y^2 + 14z^2$	$-28x^2 - 14y^2 + 2z^2 \equiv 0 \pmod{2}$	$x_1 = 7x + 4y - 28z, x_2 = 5x + 8y - 28z$ $y_1 = 2x - 7z, y_2 = 4x + 9y - 28z$ $z_1 = 2x + y - 8z, z_2 = 2x + 4y - 13z$ $x_3 = x, y_3 = 8y - 21z, z_3 = 3y - 8z$	$2x + y < 7z$ $x + 2y < 6z$ $3y < 7z$	$2x + y > 9z$ или $x + 2y > 7z$ или $y > 3z$
28	$-2x^2 - 2y^2 - 2xz - 2yz + 6z^2 \equiv 0 \pmod{2}$ $= 2 \left\{ -u^2 - v^2 + 14w^2 \right\}$ $u = x + \frac{z}{2}, v = y + \frac{z}{2}, w = \frac{z}{2}$	$-13x^2 + 2xy - 13y^2 - 4xz - 4yz + 4z^2$	$2u_1 = 3u + 3v - 14w$ $2v_1 = 3u + 11v - 42w$ $2w_1 = u + 3v - 12w$	$u + 3v < 10w$ $u < v$	$u + 3v > 1w$
29	$-x^2 - 2y^2 - 2yz + 14z^2$ $= \frac{1}{2} \{ -2x^2 - u^2 + 29z^2 \}$ $u = 2y + z$	$-29x^2 - 14y^2 - 2yz + 2z^2$	$2u_1 = 27u - 145z, x_2 = 3x + 5u - 29z$ $2z_1 = 5u - 27z, 2u_2 = 20x + 23u - 145z$ $x_1 = x, 2z_2 = 4x + 5u - 31z$ $x_3 = 19x + 9u - 87z, x_4 = 15x + 2u - 58z$ $u_3 = 18x + 10u - 87z, 2u_4 = 8x - u - 29z$ $z_3 = 6x + 3u - 28z, 2z_4 = 8x + u - 31z$	$u < 5z$ $4x + 5u < 29z$ $2x + u < 9z$ $8x + u < 29z$	$5u > 29z$ или $4x + 5u > 33z$ или $6x + 3u > 29z$ или $8x + u > 33z$
	$-x^2 - y^2 + 30z^2$	$-30x^2 - 30y^2 + z^2 \equiv p^2 \pmod{3}, \equiv p^2 \pmod{5}$	$x_1 = 11x - 60z, 2x_2 = 7x + 15y - 90z$ $z_1 = 2x - 11z, 2y_2 = 15x + 23y - 150z$ $y_1 = y, 2z_2 = 3x + 5y - 32z$	$y < 5z$ $3x + 5y < 30z$ $x < y$	$y > 6z$ или $3x + 5y > 34z$
30	$-x^2 - 2y^2 + 15z^2$	$-30x^2 - 15y^2 + 2z^2 \equiv -p^2 \pmod{3}, \equiv 2p^2 \pmod{5}$	$x_1 = 4x - 15z, 2x_2 = 11x + 6y - 45z$ $z_1 = x - 4z, 2y_2 = 3x + 4y - 15z$ $y_1 = y, 2z_2 = 3x + 2y - 13z$ $2x_3 = -x + 6y - 15z, 2y_3 = 3x + 16y - 45z$ $2z_3 = x + 6y - 17z$	$x < 3z$ $3x + 2y < 11z$ $x + 6y < 15z$	$x > 5z$ или $3x + 2y > 15z$ или $x + 6y > 19z$

D	Формы	Союзные	Подстановки	Приведенные представления	
				для положительных чисел	для отрицательных чисел
30	$-x^2 + 2y^2 - 15z^2$	$-30x^2 + 15y^2 - 2z^2$ $\equiv p^2 \pmod{3}, \equiv 2p^2 \pmod{5}$	$x_1 = 3x - 4y, \quad y_1 = 11y - 30z$ $y_1 = 2x - 3y, \quad z_1 = 4y - 11z$ $z_1 = z, \quad x_1 = x$ $x_3 = 2x - 6y + 15z, y_3 = 3x - 7y + 15z$ $z_3 = x - 2y + 4z$	$x < y$ $3z < y$ $x + 5z < 2y$	$x > 2y$ или $5z > 2y$ или $3x + 15z > 8y$
	$-2x^2 - 2xy - 2y^2 + 10z^2$ $\equiv 0 \pmod{2}$ $= -\frac{1}{2} \{u^2 + 3y^2 - 5v^2\}$ $u = 2x + y, v = 2z$	$-20^2 + 20xy - 20y^2 + 3z^2$	$u_1 = 9u - 20v, \quad y_1 = 4y - 5v$ $v_1 = 4u - 9v, \quad v_1 = 3y - 4v$ $y_1 = y, \quad u_1 = u$ $u_3 = 3u + 6y - 10v, y_3 = 2u + 2y - 5v$ $v_3 = 2u + 3y - 6v$	$u < 2v$ $y < v$ $2u + 3y < 5v$	$2u > 5v$ или $3y > 5v$ или $2u + 3y > 7v$
31	$-x^2 - y^2 + 31z^2$	$-31x^2 - 31y^2 + z^2$	$x_1 = 122x + 11y - 682z, x_2 = 26x + 10y - 155z$ $y_1 = 11x + 2y - 62z, y_2 = 10x + 5y - 62z$ $z_1 = 22x + 2y - 123z, z_2 = 5x + 2y - 30z$ $x_3 = 32x + 31y - 248z, y_3 = 31x + 32y - 248z$ $z_3 = 8x + 8y - 63z$	$11x + y < 61z$ $5x + 2y < 29z$ $4x + 4y < 31z$ $x > y$	$11x + y > 62z$ или $5x + 2y > 31z$ или $x + y > 8z$

32	Форм нет				
	$x^2 - 3y^2 - 11z^2$ Не представляет — 1	$33x^2 - 11y^2 - 3z^2$ $\equiv p^2 \pmod{3}, \equiv -p^2 \pmod{11}$	$x_1 = 2x - 3y, \quad x_2 = 15x - 12y - 44z$ $y_1 = x - 2y, \quad y_2 = 4x - 4y - 11z$ $z_1 = z, \quad z_2 = 4x - 3y - 12z$ $x_3 = 10x - 33z, \quad z_3 = 3x - 10z, y_3 = y$	$3y < x$ $6y + 22z < 7x$ $11z < 3x$	$y > x$ или $3y + 11z > 4x$ или $3z > x$
33	$x^2 - 6y^2 - 6yz - 7z^2$ $\equiv x^2 - 6u^2 - 22v^2$ $u = y + \frac{z}{2}, v = \frac{z}{2}$ Не представляет — 1	$33x^2 - 7y^2 + 6yz - 6z^2$ $\equiv -p^2 \pmod{3}, \equiv p^2 \pmod{11}$	$x_1 = 5x - 12u, \quad x_2 = 8x - 9u - 33v$ $u_1 = 2x - 5u, \quad 2u_2 = 3x - 5u - 11v$ $v_1 = v, \quad 2v_2 = 3x - 3u - 13v$	$3u < x$ $9u + 33v < 7x$	$2u > x$ или $3u + 11v > 3x$
	$-x^2 - y^2 + 33z^2$	$-33x^2 - 33y^2 + z^2$ $\equiv p^2 \pmod{3}, \equiv p^2 \pmod{11}$	$y_1 = 23y - 132z, \quad x_3 = 17x + 30y - 198z$ $z_1 = 4y - 23z, \quad y_3 = 30x + 49y - 330z$ $x_1 = x, \quad z_2 = 6x + 10y - 67z$ $x_2 = 10x + 33y - 198z, x_4 = 33x + 32y - 264z$ $y_2 = 33x + 98y - 594z, y_4 = 32x + 33y - 264z$ $z_2 = 6x + 18y - 109z, z_4 = 8x + 8y - 65z$	$2y < 11z$ $x + 3y < 18z$ $3x + 5y < 33z$ $x + y < 8z$ $x < y$	$y > 6z$ или $3x + 9y > 55z$ или $3x + 5y > 34z$ или $4x + 4y > 33z$
34	$-x^2 - 3y^2 - 2yz - 11z^2$ $\equiv u^2 - 5v^2 - 2vw - 7w^2$ $u = 3x + 2y + 12z$ $v = -x - 3z$ $w = x + y + 4z$	$-34x^2 - 11y^2 - 2yz + 3z^2$	$2u_1 = 3u - 5v - w, \quad u_2 = 8u + 3v + 21w$ $2v_1 = u - 3v - w, \quad w_2 = 3u + v + 8w$ $w_1 = w, \quad v_2 = v$ $u_3 = 19u - 24v + 36w, v_3 = -6u + 7v - 12w$ $w_2 = 6u - 8v + 11w$	$(5v + w) < u$ $3(v + 7w) < 7u$ $2(2v - 3w) < 3u$	$(5v + w) > 5u$ или $(v + 7w) > 3u$ или $3(2v - 3w) > 5u$

D	Формы	Союзы	Подстановки	Приведенные представления	
				для положительных чисел	для отрицательных чисел
	$-x^2 - y^2 + 35z^2$	$-35x^2 - 35y^2 + z^2$ $\equiv p^2 \pmod{5}, \quad p^2 \pmod{7}$	$y_1 = 6y - 35z,$ $z_1 = y - 6z,$ $x_1 = x,$ $x_2 = 19x + 30y - 210z, \quad y_2 = 30x + 44y - 315z$ $z_2 = 6x + 9y - 64z$	$y < 5z$ $2x + 3y < 21z$ $2x + 3y < 25z$ $x < y$	$y > 7z$ или $6x + 9y > 65z$ или $5x + 5y > 42z$
	$-x^2 - 2y^2 - 2yz + 17z^2$ $\equiv -x^2 + 5y^2 - 7w^2$ $v = y + 4z$ $w = y + 3z$	$-35x^2 - 17y^2 - 2yz + 2z^2$ $\equiv 2p^2 \pmod{5}, \quad p^2 \pmod{7}$	$v_1 = 71v - 84w,$ $w_1 = 60v - 71w,$ $x_1 = x,$ $x_2 = 9x - 120v + 140w,$ $v_2 = 24x - 289v + 336w,$ $w_2 = 20x - 240v + 279w, \quad w_6 = 16x - 60v + 57w$ $x_3 = 27x - 210v + 238w, \quad x_7 = 63x - 200v + 168w$ $v_3 = 42x - 316v + 357w, \quad v_7 = 40x - 126v + 105w$ $w_3 = 34x - 255v + 298w, \quad w_7 = 24x - 75v + 62w$ $x_4 = 63x - 360v + 392w, \quad x_8 = 27x - 70v + 42w$ $v_4 = 72x - 406v + 441w, \quad v_8 = 14x - 36v + 21w$ $w_4 = 56x - 315v + 342w, \quad w_8 = 6x - 15v + 8w$ • $x_9 = 9x - 20v, \quad v_9 = 4x - 9v, \quad w_9 = w$	$6w < 5v$ $14w + x < 12v$ $17w + 2x < 15v$ $49w + 8x < 45v$ $84w + 16x < 79v$ $21w + 6x < 22v$ $21w + 8x < 25v$ $3w + 2x < 5v$ $x < 2v$	$7w > 6v$ или $168w + 12x > 145v$ или $357w + 42x > 317v$ или $441w + 72x > 407v$ или $21w + 4x > 20v$ или $14w + 4x > 15v$ или $40x + 105w > 127v$ или $21w + 14x > 37v$ или $2x > 5v$

$-x^2 + 2y^2 + 2yz - 17z^2$ $\equiv -x^2 - 5v^2 + 7w^2$ $v \equiv y + 4z$ $w \equiv y + 3z$	$-35x^2 + 17y^2 + 2yz - 2z^2$ $\equiv 2p^2 \pmod{5}, \equiv -p^2 \pmod{7}$	$x_1 \equiv 8x - 21w,$ $w_1 \equiv 3x - 8w,$ $v_1 \equiv v,$ $x_2 \equiv 24x + 25v - 70w,$ $v_2 \equiv 5x + 4v - 14w,$ $w_2 \equiv 10x + 10v - 29w,$ $v_3 \equiv 6v - 7w,$	$x_3 \equiv 39x + 80v - 140w$ $v_3 \equiv 16x + 31v - 56w$ $w_3 \equiv 20x + 40v - 71w$ $x_4 \equiv 3x + 10v - 14w$ $y_4 \equiv 2x + 11v - 14w$ $w_4 \equiv 2x + 10v - 13w$ $w_5 \equiv 5v - 6w,$	$3x < 7w$ $5x + 5v < 14w$ $2x + 4v < 7w$ $x + 5v < 6w$ $v < w$	$x > 3w$ или $x + v > 3w$ или $5x + 10v > 18w$ или $x + 5v > 7w$ или $5v > 7w$
--	---	--	---	--	--

$x^2 - 6y^2 - 6z^2$ Не представляет — 1	$36x^2 - 6y^2 - 6z^2$ $\equiv 0 \pmod{7}$	$x_1 \equiv 5x - 12y,$ $y_1 \equiv 2x - 5y,$ $z_1 \equiv z,$	$x_2 \equiv 11x - 24y - 12z$ $y_2 \equiv 4x - 9y - 4z$ $z_2 \equiv 2x - 4y - 3z$	$3y < x$ $12y + 6z < 5x$ $y > z$	$2y > x$ или $2y + z > x$
$x^2 - 3y^2 - 12z^2$ Не представляет — 1	$36x^2 - 12y^2 - 3z^2$	$x_1 \equiv 2x - 3y,$ $y_1 \equiv x - 2y,$ $z_1 \equiv z,$	$x_2 \equiv 2x - 6z$ $2z_2 \equiv x - 4z$ $y_2 \equiv y$	$3y < x$ $6z < x$	$y > x$ или $2z > x$
$-2x^2 - 2xy - 2y^2 + 12z^2$ $\equiv 0 \pmod{2}$	$-24x^2 + 24xy - 24y^2 + 3z^2$	$x_1 \equiv 3x - 8z,$ $y_1 \equiv -x + y + 4z,$ $z_1 \equiv x - 3z,$	$x_2 \equiv 5x + 2y - 12z$ $y_2 \equiv y$ $z_2 \equiv 2x + y - 5z$	$(x) < 2z$ $(2x + y) < 4z$ $(y) < (x)$	$(x) > 4z$ или $(2x + y) > 6z$

<i>D</i>	Формы	Характеристические свойства	Союзы	Характеристические свойства
37	$-x^2 - 2y^2 - 2yz + 18z^2$	—	$-37x^2 - 18y^2 - 2yz + 2z^2$	—
38	$-x^2 - y^2 + 38z^2$	—	$-38x^2 - 38y^2 + z^2$	—
39	$-x^2 - y^2 + 39z^2$	—	$-39x^2 - 39y^2 + z^2$	$\equiv p^2 \pmod{3}, \quad p^2 \pmod{13}$
	$-x^2 - 2y^2 - 2yz + 19z^2$	—	$-39x^2 - 19y^2 - 2yz + 2z^2$	$\equiv -p^2 \pmod{3}, \equiv 2p^2 \pmod{13}$
	$-x^2 + 2y^2 + 2yz - 19z^2$	—	$-39x^2 + 19y^2 + 2yz - 2z^2$	$\equiv p^2 \pmod{3}, \quad 2p^2 \pmod{13}$
40	$x^2 - 7y^2 - 6yz - 7z^2$	Не представляет — 1	$40x^2 - 7y^2 + 6yz - 7z^2$	—
	$-x^2 - 3y^2 - 2yz + 13z^2$	—	$-40x^2 - 13y^2 - 2yz + 3z^2$	$\equiv 3z^2 \pmod{8}$
	$-x^2 + 3y^2 + 2yz - 13z^2$	—	$-40x^2 + 13y^2 + 2yz - 3z^2$	$\equiv -3z^2 \pmod{8}$
	$-x^2 - 2y^2 + 20z^2$	—	$-40x^2 - 20y^2 + 2z^2$	$\equiv 0 \pmod{2}$
	$-2x^2 - 4y^2 - 4yz + 4z^2$	$\equiv 0 \pmod{2}$	$-20x^2 - 8y^2 - 8yz + 8z^2$	—

41	$x^2 - 3y^2 - 2yz - 14z^2$	Не представляет — 1	$41x^2 - 14y^2 + 2yz - 3z^2$	—
42	$-x^2 - y^2 + 42z^2$	—	$-42x^2 - 42y^2 + z^2$	$\equiv -p^2 \pmod{3}, \equiv p^2 \pmod{7}$
	$-x^2 - 2y^2 + 21z^2$	—	$-42x^2 - 21y^2 + 2z^2$	$\equiv -p^2 \pmod{3}, \equiv p^2 \pmod{7}$
	$-x^2 + 2y^2 - 21z^2$	—	$-42x^2 + 21y^2 - 2z^2$	$\equiv p^2 \pmod{3}, \equiv p^2 \pmod{7}$
	$-2x^2 - 2y^2 - 2yz + 10z^2$	$\equiv 0 \pmod{2}$	$-21x^2 - 20y^2 - 4yz + 4z^2$	—
44	$-x^2 - y^2 + 44z^2$	—	$-44x^2 - 44y^2 + z^2$	—
	$-x^2 + 2y^2 - 22z^2$	—	$-44x^2 + 22y^2 - 2z^2$	$\equiv 0 \pmod{2}$
	$-2x^2 - 2y^2 - 2xz - 2yz + 10z^2$	$\equiv 0 \pmod{2}$	$-21x^2 + 2xy - 21y^2 - 4xz - 4yz + 4z^2$	—
	$x^2 - 3y^2 - 15z^2$	Не представляет — 1	$45x^2 - 15y^2 - 3z^2$	—
	$-x^2 - 2y^2 - 2yz + 22z^2$	—	$-45x^2 - 22y^2 - 2yz + 2z^2$	$\equiv -p^2 \pmod{3}, \equiv 2p^2 \pmod{5}$
	$-x^2 + 2y^2 + 2yz - 22z^2$	—	$-45x^2 + 22y^2 + 2yz - 2z^2$	$\equiv p^2 \pmod{3}, \equiv 2p^2 \pmod{5}$
	$-x^2 - 3y^2 + 15z^2$	—	$-45x^2 - 15y^2 + 3z^2$	$\equiv 0 \pmod{3}, \equiv 2p^2 \pmod{5}$
	$-x^2 - 6y^2 - 6yz + 6z^2$	—	$-45x^2 - 6y^2 - 6yz + 6z^2$	$\equiv 0 \pmod{3}, \equiv p^2 \pmod{5}$
46	$-x^2 - y^2 + 46z^2$	—	$-46x^2 - 46y^2 + z^2$	—
47	$-x^2 - y^2 + 47z^2$	—	$-47x^2 - 47y^2 + z^2$	—

D	Формы	Характеристические свойства	Союзные	Характеристические свойства
48	$x^2 - 6y^2 - 8z^2$	Не представляет — 1	$48x^2 - 8y^2 - 6z^2$	—
	$x^2 - 8y^2 - 8yz - 8z^2$	Не представляет — 1	$48x^2 - 8y^2 + 8yz + 8z^2$	$\equiv 0 \pmod{8}$
	$-x^2 - y^2 + 48z^2$	—	$-48x^2 - 48y^2 + z^2$	$\equiv p^2 \pmod{8}, \equiv p^2 \pmod{3}$
	$-x^2 + 3y^2 - 16z^2$	—	$-48x^2 + 16y^2 - 3z^2$	$\equiv -3p^2 \pmod{8}, \equiv p^2 \pmod{3}$
	$-x^2 + 2y^2 - 24z^2$	—	$-48x^2 + 24y^2 - 2z^2$	$\equiv -2p^2 \pmod{8}, \equiv p^2 \pmod{3}$
	$-x^2 - 4y^2 + 12z^2$	—	$-48x^2 - 12y^2 + 4z^2$	$\equiv 4p^2 \pmod{8}, \equiv p^2 \pmod{3}$
	$-2x^2 - 2xy - 2y^2 + 16z^2$	$\equiv 0 \pmod{2}$	$-32x^2 + 32xy - 32y^2 + 3z^2$	—
	$-2x^2 - 2y^2 + 12z^2$	$\equiv 0 \pmod{2}$	$-24x^2 - 24y^2 + 4z^2$	$\equiv 0 \pmod{4}$
	$x^2 - 7y^2 - 7z^2$	Не представляет — 1	$49x^2 - 7y^2 - 7z^2$	—
	$-x^2 - 5y^2 + 10z^2$	—	$-50x^2 - 10y^2 + 5z^2$	—
49				
50				

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ
ЧИСЕЛ e И π
(НЕВОЗМОЖНОСТЬ КВАДРАТУРЫ КРУГА)

ПО СТАТЬЯМ ЭРМИТА И ЛИНДЕМАННА.
ОБРАБОТАЛ А. МАРКОВ

Предмет настоящей статьи составляют рассуждения Эрмита и Линдемманна, приводящие к доказательству трансцендентности чисел e и π .

(Hermite. Sur la fonction exponentielle Comptes rendus, T. XXVII; отдельной брошюрой в 1874 г.).

(Lindemann. Ueber die Zahl π . Matem. Annalen, V. XX).

Результаты всех этих рассуждений резюмируются в следующей теореме.

Теорема. *Каковы бы ни были алгебраические числа**

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_a$$

и

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_a,$$

равенство

$$A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + A_3 e^{\alpha_3} + \dots + A_a e^{\alpha_a} = 0 \quad (1)$$

невозможно.

Для доказательства допустим противное и покажем, что равенство (1) приводит к противуречающим результатам.

* Надо помнить, что всякое число ξ называется алгебраическим, если оно удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению

$$\xi^n + p_1 \xi^{n-1} + \dots + p_{n-1} \xi + p_n = 0$$

с рациональными коэффициентами $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$.

Напротив, число называется трансцендентным, если не удовлетворяет никакому уравнению этого вида

При этом мы предполагаем, конечно, все показатели α различными, а коэффициенты A не равными нулю.

Остановимся сначала на том случае, когда все коэффициенты A — числа целые.

§ 1. Преобразование равенства (1)

Умножая сумму

$$A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + A_3 e^{\alpha_3} + \dots + A_a e^{\alpha_a} \quad (a)$$

на другую подобную же

$$B_1 e^{\beta_1} + B_2 e^{\beta_2} + \dots + B_b e^{\beta_b}, \quad (b)$$

получим в произведении сумму

$$\sum A_i B_j e^{\alpha_i + \beta_j} \left(\begin{matrix} i=1, 2, \dots, a \\ j=1, 2, \dots, b \end{matrix} \right),$$

которая на основании равенства (1) также должна быть равна нулю.

Если теперь все числа β различны и ни одно из чисел B не нуль (о числах α и A уже сделано такое предположение), то

$$\sum A_i B_j e^{\alpha_i + \beta_j}$$

содержит по крайней мере один член

$$A_i B_j e^{\alpha_i + \beta_j},$$

у которого, во-первых, коэффициент $A_i B_j$ не нуль и, во-вторых, показатель $\alpha_i + \beta_j$ отличен от всех прочих показателей $\alpha_i + \beta_j$. *

* Возьмите из всех α_i то, вещественная часть которого имеет наибольшее значение, а если таких несколько между ними, остановитесь на том, у которого коэффициент при $\sqrt{-1}$ наибольший; так же выберите и β_j .

Поэтому, соединяя в один все члены с равными показателями $\alpha_i + \beta_j$, приведем наше произведение к виду

$$C_1 e^{\gamma_1} + C_2 e^{\gamma_2} + \dots + C_c e^{\gamma_c}, \quad (c)$$

где также все γ различны и ни одно из чисел C не нуль. Подобным же образом, перемножая сколько угодно выражений вида (с), всегда произведение их приведем к тому же виду (с), и результат наш должен быть равен нулю, если в числе множителей заключалось и (а).

Числа

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_a$$

можно рассматривать, конечно, как корни одного и того же уравнения

$$z^q + p_1 z^{q-1} + \dots + p_{q-1} z + p_q = 0$$

с неизвестною z и рациональными коэффициентами

$$p_1, \dots, p_{q-1}, p_q;$$

причем можно предполагать, что это уравнение не имеет равных корней.

Составим из корней его

$$z_1, z_2, \dots, z_q$$

все сочетания

$$z_{i'}, z_{i''}, \dots, z_{i^{(a)}}$$

по a ; число таких сочетаний, как известно, равно

$$q(q-1) \dots (q-a+1).$$

Между ними, конечно, будет и такое

$$\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_a.$$

Поэтому произведение всех выражений

$$A_1 e^{z_{i'}} + A_2 e^{z_{i''}} + \dots + A_a e^{z_{i^{(a)}}}$$

должно равняться нулю.

Составим это произведение, и в нем, считая $z_1, z_2, \dots, z_q$ неопределенными, соединим в один все члены с равными показателями при e .

Оно представится под видом суммы

$$\sum C e^{h_1 z_{i'}} + h_2 z_{i''} + \dots + h_q z_{i^{(q)}},$$

где

$$i', i'', \dots, i^{(q)}$$

— какое-нибудь размещение значков

$$1, 2, 3, \dots, q,$$

а C и $h_1, h_2, \dots, h_q$ — числа целые (надо помнить, что коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_a$ мы предполагаем числами целыми).

Различным значениям

$$h_1, h_2, \dots, h_q$$

могут соответствовать различные C , но для всех выражений

$$h_1 z_{i'} + h_2 z_{i''} + \dots + h_q z_{i^{(q)}},$$

которые отличаются друг от друга только порядком значков при z , коэффициент C при

$$e^{h_1 z_{i'} + h_2 z_{i''} + \dots + h_q z_{i^{(q)}}}$$

должен иметь, конечно, одно и то же значение, так как от перестановки корней

$$z_1, z_2, \dots, z_q$$

изменяется только порядок множителей

$$A_1 e^{z_{i'}} + A_2 e^{z_{i''}} + \dots + A_a e^{z_{i^{(a)}}},$$

но ни в каком случае не произведение их.

А все выражения

$$h_1 z_{i'} + h_2 z_{i''} + \dots + h_q z_{i^{(q)}},$$

выводимые друг из друга посредством перестановки значков при z , удовлетворяют одному и тому же алгебраическому уравнению

$$X(z) = z^r + s_1 z^{r-1} + \dots + s_{r-1} z + s_r = 0$$

с неизвестной z и рациональными коэффициентами $s_1, s_2, \dots, s_r$. $X(z)$ равно произведению всех различных между собой по виду (т. е. при неопределенных значениях $z_1, z_2, \dots, z_q$) выражений

$$z - h_1 z_{i'} - h_2 z_{i''} - \dots - h_q z_{i^{(q)}},$$

которые можно получить из одного, переставляя значки $i', i'', \dots, i^{(q)}$.

Таким образом из равенства (1) мы выводим

$$\begin{aligned} & C_1 (e^{\gamma_{1,1}} + e^{\gamma_{2,1}} + \dots + e^{\gamma_{r_1,1}}) + \\ & + C_2 (e^{\gamma_{1,2}} + e^{\gamma_{2,2}} + \dots + e^{\gamma_{r_2,2}}) + \\ & + \dots + \\ & + C_t (e^{\gamma_{1,t}} + e^{\gamma_{2,t}} + \dots + e^{\gamma_{r_t,t}}) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где вообще

$$\gamma_{1,i}, \gamma_{2,i}, \dots, \gamma_{r_i,i}$$

означают все корни некоторого алгебраического уравнения

$$X_i(z) = 0$$

r_i -й степени с неизвестной z и рациональными коэффициентами (при этом двукратные корни повторяются дважды, трехкратные трижды, и т. д.).

Разложим теперь все наши уравнения

$$X_1(z) = 0, X_2(z) = 0, \dots, X_t(z) = 0$$

на неприводимые

$$Y_1(z) = 0, Y_2(z) = 0, \dots, Y_l(z) = 0. \quad (3)$$

Коэффициенты при различных степенях z в Y мы предполагаем также все числами рациональными.

Соответственно этому разложению равенство (2) можно переписать в следующем виде:

$$D_1 \Sigma e^{\delta_1} + D_2 \Sigma e^{\delta_2} + \dots + D_l \Sigma e^{\delta_l} = 0, \quad (4)$$

где

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l$$

означают, соответственно, все корни неприводимых уравнений (3).

Если

$$X_1 = Y_1^{q_{1,1}} Y_2^{q_{1,2}} \dots Y_l^{q_{1,l}},$$

$$X_2 = Y_1^{q_{2,1}} Y_2^{q_{2,2}} \dots Y_l^{q_{2,l}},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$X_t = Y_1^{q_{t,1}} Y_2^{q_{t,2}} \dots Y_l^{q_{t,l}},$$

то

$$D_1 = q_{1,1} C_1 + q_{2,1} C_2 + \dots + q_{t,1} C_t,$$

$$D_2 = q_{1,2} C_1 + q_{2,2} C_2 + \dots + q_{t,2} C_t,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$D_t = q_{1,t} C_1 + q_{2,t} C_2 + \dots + q_{t,t} C_t.$$

Согласно замечанию, сделанному в начале этих рассуждений, числа

$$D_1, D_2, \dots, D_l$$

не могут все вместе обратиться в нуль.

Чтобы не иметь дело с дробными числами, умножим все δ на некоторое целое положительное число σ , причем произведение $\sigma\delta$ обозначим одной буквой ξ .

Тогда будем иметь

$$D_1 \Sigma e^{\frac{\xi_1}{\sigma}} + D_2 \Sigma e^{\frac{\xi_2}{\sigma}} + \dots + D_l \Sigma e^{\frac{\xi_l}{\sigma}} = 0, \quad (5)$$

и целым числом σ можем распорядиться так, что все ξ будут

целыми алгебраическими числами, т. е. они будут удовлетворять таким неприводимым уравнениям

$$F_1(z)=0, F_2(z)=0, \dots, F_l(z)=0, \quad (6)$$

в которых коэффициент при высшей степени z — единица, а при прочих степенях z все коэффициенты числа целые.

Надо помнить, что

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$$

означают, соответственно, все корни уравнений (6) и равных между ними нет.

§ 2. Преобразование равенства (5)

Для краткости положим

$$F_1(z) \cdot F_2(z) \cdots F_l(z) = F(z). \quad (7)$$

Кроме того, введем в наше рассмотрение следующее выражение:

$$\Omega_m(\xi, y) = \frac{1}{m!} \int_a^\xi e^{-\frac{x}{\sigma}} \frac{F(x) - F(y)}{x - y} \{F(x)\} dx. \quad (8)$$

Здесь m означает какое угодно целое положительное число; $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1) \cdot m$; нижний предел интегрирования a — число данное (например нуль); верхний предел ξ — один из корней уравнения

$$F(z) = 0, \quad (9)$$

наконец y — число переменное, не зависящее от x .

Путь интегрирования на значение выражения $\Omega_m(\xi, y)$ не влияет.

Для определенности можно принять этот путь прямолинейным.

Тогда, полагая

$$x = a + (\xi - a)t,$$

будем иметь

$$\Omega_m(\xi, y) = \frac{\xi - a}{m!} \int_0^1 e^{-\frac{a + (\xi - a)t}{\sigma}} \frac{F(a + (\xi - a)t - F(y))}{a - y + (\xi - a)t} \times \\ \times \{F(a + (\xi - a)t)\}^m dt, \quad (10)$$

где t получает только вещественные значения от 0 до 1.

Впрочем, для наших целей удобнее $\Omega_m(\xi, y)$ оставить под видом (8).

Интеграл, который здесь встречается, взять нетрудно. А именно неопределенный интеграл

$$\frac{1}{m!} \int e^{-\frac{x}{\sigma}} \frac{F(x) - F(y)}{x - y} \{F(x)\}^m dx$$

можно принять равным произведению $e^{-\frac{x}{\sigma}}$ на некоторую вполне определенную целую функцию $\Phi_m(x, y)$ от x ; коэффициенты при различных степенях x в $\Phi_m(x, y)$ — сами целые функции от y .*

Соответственно этому

$$\Omega_m(\xi, y) = e^{-\frac{\xi}{\sigma}} \Phi_m(\xi, y) - e^{-\frac{a}{\sigma}} \Phi_m(a, y).$$

Полагая ξ последовательно равным всем корням уравнений (6), получаем

$$\sum e^{\frac{\xi_1}{\sigma}} \Omega_m(\xi_1, y) = \sum \Phi_m(\xi_1, y) - e^{-\frac{a}{\sigma}} \Phi_m(a, y) \cdot \sum e^{\frac{\xi_1}{\sigma}},$$

* Полагая

$$\frac{1}{m!} \cdot \frac{F(x) - F(y)}{x - y} \cdot \{F(x)\}^m = \Psi_m(x, y),$$

можем написать следующее равенство:

$$\Phi_m(x, y) = -\sigma \left\{ \Psi_m(x, y) + \sigma \frac{d\Psi_m(x, y)}{dx} + \sigma^2 \frac{d^2\Psi_m(x, y)}{dx^2} + \dots \right\}.$$

откуда затем на основании равенства (5) выводим

$$\left| \begin{array}{l} D_1 \Sigma e^{\frac{\xi_1}{\sigma}} \Omega_m(\xi_1, y) + \dots \\ \dots + D_l \Sigma e^{\frac{\xi_l}{\sigma}} \Omega_m(\xi_l, y) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} D_1 \Sigma \Phi_m(\xi_1, y) + \dots \\ \dots + D_l \Sigma \Phi_m(\xi_l, y) \end{array} \right|. \quad (11)$$

Надо помнить, что $D_1, D_2, \dots, D_l$ — данные целые числа, m — произвольное целое положительное число, а y — совершенно произвольное число.

**§ 3. О первой части равенства (11),
т. е. о сумме**

$$D_1 \Sigma e^{\frac{\xi_1}{\sigma}} \Omega_m(\xi_1, y) + \dots + D_l \Sigma e^{\frac{\xi_l}{\sigma}} \Omega_m(\xi_l, y).$$

Дадим u какое-нибудь определенное значение.

За ξ примем также какой-нибудь определенный корень
нашего уравнения

$$F(z) = 0. \quad (9)$$

Кроме того, обозначим буквой ρ модуль разности $\xi - a$, а буквами K и L — соответственно наибольшие значения модулей

$$e^{-\frac{a + (\xi - a)t}{\sigma}} \frac{F(a + (\xi - a)t) - F(y)}{a - y + (\xi - a)t} \quad \text{и} \quad F[a + (\xi - a)t]$$

для всех вещественных значений t между 0 и 1.

Тогда на основании формулы (10) можем написать модуль

$$\Omega_m(\xi, y) < \frac{\rho K L^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \cdot *$$

А выражение

$$\frac{\rho K L^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}$$

при возрастании m до бесконечности стремится к пределу, равному нулю.

Отсюда, принимая во внимание неравенство *

$$\begin{aligned} \text{мод.} \left\{ D_1 \Sigma e^{\frac{\xi_1}{\sigma}} \Omega_m(\xi_1, y) + \right. \\ \left. + \dots + D_l \Sigma e^{\frac{\xi_l}{\sigma}} \Omega_m(\xi_l, y) \right\} < \\ < \left\{ \Sigma \text{мод.} \left(D_1 e^{\frac{\xi_1}{\sigma}} \right) \cdot \text{мод.} \Omega_m(\xi_1, y) + \right. \\ \left. + \dots + \Sigma \text{мод.} \left(D_l e^{\frac{\xi_l}{\sigma}} \right) \cdot \text{мод.} \Omega_m(\xi_l, y) \right\}, \end{aligned}$$

заключаем, что, каково бы ни было данное число y , при достаточно больших значениях m модуль первой части равенства (11) будет сколь угодно мал.

§ 4. О второй части равенства (11), т. е. о сумме

$$D_1 \Sigma \Phi_m(\xi_1, y) + \dots + D_l \Sigma \Phi_m(\xi_l, y)$$

Основная лемма. Пусть будет

$$f(x, y) = \theta_0 x^s + \theta_1 x^{s-1} + \theta_2 x^{s-2} + \dots + \theta_{s-1} x + \theta_s$$

какая-нибудь целая функция от x .

Коэффициенты ее

$$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{s-1}, \theta_s$$

* Модуль суммы меньше суммы модулей и модуль интеграла меньше интеграла от модуля.

мы предполагаем целыми функциями другой буквы y , не зависящей от x .

Всегда можно подобрать целую функцию от x

$$g(x, y) = \zeta_0 x^s + \zeta_1 x^{s-1} + \zeta_2 x^{s-2} + \dots + \zeta_{s-1} x + \zeta_s,$$

где

$$\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{s-1}, \zeta_s$$

— тоже целые функции от y , таким образом, что будет иметь место равенство

$$\begin{aligned} \int e^{-\frac{x}{\sigma}} f(x, y) \cdot \{F(x)\}^m dx = & -e^{-\frac{x}{\sigma}} g(x, y) \cdot \{F(x)\}^m + \\ & + m \sum g(\xi, y) \cdot \int e^{-\frac{x}{\sigma}} \frac{F(x)}{x - \xi} \{F(x)\}^{m-1} dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь суммирование Σ распространяется на все корни ξ уравнения

$$F(z) = 0. \quad (9)$$

Доказательство. При $s = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int e^{-\frac{x}{\sigma}} f(x, y) \cdot \{F(x)\}^m dx &= \int e^{-\frac{x}{\sigma}} \theta_0 \{F(x)\}^m dx = \\ &= -e^{-\frac{x}{\sigma}} \sigma \theta_0 \{F(x)\}^m + m \sigma \theta_0 \int e^{-\frac{x}{\sigma}} F'(x) \{F(x)\}^{m-1} dx^* = \\ &= -e^{-\frac{x}{\sigma}} \sigma \theta \{F(x)\}^m + m \sum \sigma \theta_0 \int e^{-\frac{x}{\sigma}} \frac{F(x)}{x - \xi} \{F(x)\}^{m-1} dx,^{**} \end{aligned}$$

и равенство (12) будет удовлетворено, если положим

$$g(x, y) = \sigma \theta_0 = \sigma f(x, y).$$

* Интегрирование по частям

** $F'(x) = \sum \frac{F(x)}{x - \xi}$.

Переходя к случаю $s=1$, замечаем, что

$$\begin{aligned}\int e^{-\frac{x}{\sigma}} f(x, y) dx &= \int e^{-\frac{x}{\sigma}} (\theta_0 + \theta_1) dx = \\ &= -e^{-\frac{x}{\sigma}} (\theta_0 \sigma x + \theta_1 \sigma + \theta_0 \sigma^2)\end{aligned}$$

и затем посредством интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned}\int e^{-\frac{x}{\sigma}} (\theta_0 x + \theta_1) \cdot \{F(x)\}^m dx &= -e^{-\frac{x}{\sigma}} (\theta_0 \sigma x + \theta_1 \sigma + \theta_0 \sigma^2) \times \\ &\times \{F(x)\}^m + m \int e^{-\frac{x}{\sigma}} (\theta_0 \sigma x + \theta_1 \sigma + \theta_0 \sigma^2) \cdot F'(x) \{F(x)\}^{m-1} dx.\end{aligned}$$

Но

$$(\theta_0 \sigma x + \theta_1 \sigma + \theta_0 \sigma^2) F'(x) = n \theta_0 \sigma F(x) + \omega_1(x, y),$$

причем

$$\frac{\omega_1(x, y)}{F(x)} = \sum \frac{\omega_1(\xi, y)}{F'(\xi)(x-\xi)} = \sum \frac{\theta_0 \sigma \xi + \theta_1 \sigma + \theta_0 \sigma^2}{x-\xi}.$$

Здесь и впредь буквой n мы обозначаем степень полинома $F(x)$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}\int e^{-\frac{x}{\sigma}} (\theta_0 x + \theta_1) \{F(x)\}^m dx &= -e^{-\frac{x}{\sigma}} (\theta_0 \sigma x + \theta_1 \sigma + \theta_0 \sigma^2) + \\ &+ mn \theta_0 \sigma \int e^{-\frac{x}{\sigma}} \{F(x)\}^m dx + \\ &+ m \sum (\theta_0 \sigma \xi + \theta_1 \sigma + \theta_0 \sigma^2) \cdot \int e^{-\frac{x}{\sigma}} \frac{F(x)}{x-\xi} \{F(x)\}^{m-1} dx.\end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание уже доказанное нами равенство (случай $s=0$)

$$\begin{aligned}\int e^{-\frac{x}{\sigma}} \{F(x)\}^m dx &= -e^{-\frac{x}{\sigma}} \sigma \{F(x)\}^m + \\ &+ m \sum \sigma \int e^{-\frac{x}{\sigma}} \frac{F(x)}{x-\xi} \{F(x)\}^{m-1} dx,\end{aligned}$$

закключаем, что при $s=1$ равенство (12) будет удовлетворено, коль скоро положим

$$g(x, y) = \theta_0 \sigma x + \theta_1 \sigma + \theta_0 \sigma^2 + mn\theta_0 \sigma^2.$$

Проверивши таким образом нашу лемму для случаев $s=0$ и $s=1$, не трудно распространить ее последовательно и на все значения показателя s .

Для этой цели, конечно, достаточно показать, что она должна иметь место при $s=s'$, коль скоро справедлива при $s=s'-1$.

Буква s' означает у нас какое угодно целое положительное число.

Итак, пусть $s=s'$.

Кроме того, для краткости

$$\begin{aligned} \int e^{-\frac{x}{\sigma}} f(x, y) dx = & -\sigma e^{-\frac{x}{\sigma}} \left\{ f(x, y) + \sigma \frac{df(x, y)}{dx} + \right. \\ & \left. + \dots + \sigma^s \frac{d^s f(x, y)}{dx^s} \right\} \end{aligned}$$

обозначим через

$$-e^{-\frac{x}{\sigma}} \mu(x, y).$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int e^{-\frac{x}{\sigma}} f(x, y) \{F(x)\}^m dx = & -e^{-\frac{x}{\sigma}} \mu(x, y) \{F(x)\}^m + \\ & + m \int e^{-\frac{x}{\sigma}} \mu(x, y) F'(x) \{F(x)\}^{m-1} dx. \end{aligned}$$

Перемножим $\mu(x, y)$ и $F'(x)$ и произведение их будем делить на $F(x)$ до тех пор, пока не дойдем до остатка $\omega_1(x, y)$ низшей степени относительно x , чем $F(x)$.

В частном мы получим некоторую целую функцию $f_1(x, y)$ от x такого же характера, как и $f(x, y)$, только степень этой новой функции будет уже не s' , а $s' - 1$; так что

$$\mu(x, y) F'(x) = f_1(x, y) F(x) + \omega_1(x, y)$$

и

$$\frac{\omega_1(x, y)}{F(x)} = \sum \frac{\omega_1(\xi, y)}{F'(\xi)(x - \xi)} = \sum \frac{\mu(\xi, y)}{x - \xi}.$$

Следовательно, во-первых,

$$\begin{aligned} \int e^{-\frac{x}{\sigma}} f(x, y) \{F(x)\}^m dx = & -e^{-\frac{x}{\sigma}} \mu(x, y) \{F(x)\}^m + \\ & + m \int e^{-\frac{x}{\sigma}} f_1(x, y) \{F(x)\}^m dx + \\ & + m \sum \mu(\xi, y) \int e^{-\frac{x}{\sigma}} \frac{F(x)}{x - \xi} \{F(x)\}^{m-1} dx \end{aligned}$$

и, во-вторых, допуская нашу лемму для $s = s' - 1$, можем написать

$$\begin{aligned} \int e^{-\frac{x}{\sigma}} f_1(x, y) \{F(x)\}^m dx = & -e^{-\frac{x}{\sigma}} \nu(x, y) \{F(x)\}^m + \\ & + m \sum \nu(\xi, y) \int e^{-\frac{x}{\sigma}} \frac{F(x)}{x - \xi} \{F(x)\}^{m-1} dx, \end{aligned}$$

а отсюда видно, что равенство (12) удовлетворяется при

$$g(x, y) = \mu(x, y) + m\nu(x, y).$$

Таким образом, основную лемму можно считать доказанной вполне.

Примечание 1. Равенство (12) можно переписать еще в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} \int e^{-\frac{x}{\sigma}} f(x, y) \{F(x)\}^m dx = & -e^{-\frac{x}{\sigma}} g(x, y) \frac{\{F(x)\}^m}{m!} + \\ & + \frac{1}{(m-1)!} \int e^{-\frac{x}{\sigma}} \omega(x, y) \{F(x)\}^{m-1} dx, \end{aligned}$$

где

$$\omega(x, y) = \sum g(\xi, y) \frac{F(x)}{x - \xi}$$

не что иное, как остаток от деления на $F(x)$ произведения $g(x, y) \cdot F'(x)$.

Примечание 2. Если $f(x, y)$ — целая функция от x и y с целыми коэффициентами, то $g(x, y)$ и $\omega(x, y)$ также не могут содержать членов с дробными коэффициентами.

Действительно, ни употребляемое нами интегрирование по частям, ни деление на $F(x)$, где коэффициент при высшей степени x — единица, не могут ввести никаких дробей.

Следствие. Если $f(x, y)$ относительно x и y — целая функция с целыми коэффициентами, то, применяя нашу лемму $m-1$ раз, получим

$$\begin{aligned} & \frac{e^{\frac{x}{\sigma}}}{m!} \int e^{-\frac{x}{\sigma}} f(x, y) \{F(x)\}^m dx = \\ & = - \left[g(x, y) \frac{F(x)^m}{m!} + g_1(x, y) \frac{F(x)^{m-1}}{(m-1)!} + \right. \\ & \quad \left. + \dots + g_{m-1}(x, y) F(x) + g_m(x, y) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$g(x, y), g_1(x, y), \dots, g_{m-1}(x, y), g_m(x, y)$$

— некоторые целые функции от x и y также с целыми коэффициентами.

Притом относительно x все эти функции, за исключением $g(x, y)$ не выше, как $n-1$ -й степени; так что $g_m(x, y)$ означает остаток от деления выражения, стоящего в скобках [], на $F(x)$.

Примечание 3. Если степени

$$\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{s-1}, \theta_s$$

относительно y соответственно равны

$$0, 1, \dots, s-1, s,$$

то степени

$$\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{s-1}, \zeta_s$$

соответственно равны тем же числам.

Мало того, коэффициент при y^λ в ζ_λ равен произведению σ на коэффициент при той же степени y , т. е. при y^λ в θ_λ .

Другими словами, если $f(x, y)$ — целая функция s -й степени относительно x и y вместе, то относительно тех же букв $g(x, y)$ — также целая функция s -й степени и, каково бы ни было λ , коэффициент при $y^\lambda x^{s-\lambda}$ в $g(x, y)$ равен произведению σ на коэффициент при том же выражении $x^\lambda x^{s-\lambda}$ в $f(x, y)$.

Это примечание нетрудно оправдать, полагая s последовательно равным

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

В случае $s=0$ оно проверяется непосредственно, так как тогда

$$f(x, y) = \theta_0, \quad \text{а} \quad g(x, y) = \sigma \theta_0.$$

А затем формулы

$$\mu(x, y) = \sigma f(x, y) + \sigma^2 \frac{df(x, y)}{dx} + \dots + \sigma^{s+1} \frac{d^s f(x, y)}{dx^s}$$

и

$$g(x, y) = \mu(x, y) + m\nu(x, y)$$

показывают, что оно должно быть справедливо при $s=s'$, коль скоро имеет место при $s=s'-1$; так как

$$\frac{df(x, y)}{dx}, \frac{d^2 f(x, y)}{dx^2}, \dots, \frac{d^s f(x, y)}{dx^s} \text{ и } f_1(x, y)$$

относительно x и y вместе только $s-1$ -й степени и $v(x, y)$ для $f_1(x, y)$ играет ту же роль, как $g(x, y)$ для $f(x, y)$.*

Приложение общих результатов к

$$\Phi_m(x, y) = \frac{e^{\frac{x}{\sigma}}}{m!} \int e^{-\frac{x}{\sigma}} \frac{F(x) - F(y)}{x - y} \{F(x)\}^m dx$$

1. $\frac{F(x) - F(y)}{x - y}$ — целая функция от x и y с целыми коэффициентами. Поэтому остаток от деления $\Phi_m(x, y)$ на $F(x)$ — также целая функция от x и y с целыми коэффициентами [см. формулу (13)].

Что же касается сумм

$$\Sigma \Phi_m(\xi_1, y), \Sigma \Phi_m(\xi_2, y), \dots, \Sigma \Phi_m(\xi_l, y),$$

то они, будучи симметричны относительно корней уравнений

$$F_1(z) = 0, F_2(z) = 0, \dots, F_l(z) = 0,$$

* Основную лемму со всеми примечаниями к ней нетрудно оправдать и непосредственно при всяком s , как это делает в своей статье „Sur la fonction exponentielle“ Эрмит.

Все сводится к определению коэффициентов

$$\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{s-1}, \zeta_s$$

под условием, чтобы в целой функции от x

$$\begin{aligned} m\omega(x, y) &= \frac{e^{\frac{x}{\sigma}}}{\{F(x)\}^{m-1}} \cdot \frac{d}{dx} \left[\int e^{-\frac{x}{\sigma}} f(x, y) \{F(x)\}^m dx + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{x}{\sigma}} g(x, y) \cdot \{F(x)\}^m \right] = \\ &= \left\{ f(x, y) - \frac{1}{\sigma} g(x, y) + \frac{dg(x, y)}{dx} \right\} F(x) + mg(x, y) \cdot F'(x) \end{aligned}$$

исчезли все степени x выше $n-1$. А такое требование дает систему уравнений первой степени, из которых неизвестные

$$\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_s$$

легко находятся последовательно одно за другим.

приведутся к целым функциям от одного y с целыми коэффициентами.

А вместе с ними, конечно, — и выражение

$$D_1 \sum \Phi_m(\xi_1, y) + D_2 \sum \Phi_m(\xi_2, y) + \dots + D_l \sum \Phi_m(\xi_l, y).$$

Это последнее для краткости обозначим через $\chi(y)$.

II. Пусть будут

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n-1}, z_n$$

— все корни уравнения

$$F(z) = 0$$

в каком-нибудь произвольном порядке.

Произведение всех разностей

$$(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) \dots (z_1 - z_n)(z_2 - z_3) \dots (z_2 - z_n) \dots (z_{n-1} - z_n)$$

обозначим одной буквой Δ .

Пусть, далее,

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, y_n$$

будут какие-нибудь различные между собой числа.

Произведение всех разностей

$$(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \dots (y_1 - y_n)(y_2 - y_3) \dots (y_2 - y_n) \dots (y_{n-1} - y_n)$$

обозначим буквой Δ' .

Наконец, определитель

$$\begin{vmatrix} \Phi_m(z_1, y_1) & \Phi_m(z_2, y_1) & \dots & \Phi_m(z_n, y_1) \\ \Phi_m(z_1, y_2) & \Phi_m(z_2, y_2) & \dots & \Phi_m(z_n, y_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_m(z_1, y_n) & \Phi_m(z_2, y_n) & \dots & \Phi_m(z_n, y_n) \end{vmatrix}$$

обозначим через

$$\Pi_m \begin{pmatrix} z_1, z_2, \dots, z_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{pmatrix}.$$

Мы имеем в виду доказать следующее равенство:

$$P_m \left(\begin{matrix} z_1, z_2, \dots, z_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{matrix} \right) = (-1)^n \left[(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \sigma^n \right]^{m+1} \Delta^4 \Delta^{2m-1}. \quad (14)$$

Для этой цели заметим, что

$$\frac{F(x) - F(y)}{x - y} = x^{n-1} + (y + \dots) x^{n-2} + (y^2 + \dots) x^{n-3} + \dots + \\ + (y^{n-2} + \dots) x + y^{n-1} + \dots,$$

и потому на основании нашей леммы и примечания 3 к ней можем написать

$$\Phi_m(x, y) = - \left\{ \sigma x^{n-1} + (\sigma y + \dots) x^{n-2} + (\sigma y^2 + \dots) x^{n-3} + \dots \right. \\ \left. + \dots + (\sigma y^{n-2} + \dots) x + \sigma y^{n-1} + \dots \right\} \times \\ \times \frac{\{F(x)\}_m}{1 \cdot 2 \dots m} + \sum \left\{ \sigma z_i^{n-1} + (\sigma y + \dots) z_i^{n-2} + \dots + \right. \\ \left. + (\sigma y^{n-2} + \dots) z_i + \sigma y^{n-1} + \dots \right\} \Phi_{m-1}(x, z_i), \quad (15)$$

где для составления суммы Σ надо полагать i последовательно равным

$$1, 2, \dots, n.$$

Здесь и далее во всякой целой функции от y мы указываем для краткости только тот ее член, где y входит в высшей степени.

Заменяя в (15) x корнями

$$z_1, z_2, \dots, z_n$$

нашего уравнения

$$F(z) = 0,$$

получаем n равенств такого вида:

$$\Phi_m(z_k, y) = \sum \left\{ \sigma z_i^{n-1} + (\sigma y + \dots) z_i^{n-2} + (\sigma y^2 + \dots) z_i^{n-3} + \dots \right. \\ \left. + \dots + (\sigma y^{n-2} + \dots) z_i + \sigma y^{n-1} + \dots \right\} \times \\ \times \Phi_{m-1}(z_k, z_i).$$

$$\begin{array}{l} D' \Phi_m(z_1, y_1) + D'' \Phi_m(z_2, y_1) + \dots + D^{(n)} \Phi_m(z_n, y_1), \\ D' \Phi_m(z_1, y_2) + D'' \Phi_m(z_2, y_2) + \dots + D^{(n)} \Phi_m(z_n, y_2), \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ D' \Phi_m(z_1, y_n) + D'' \Phi_m(z_2, y_n) + \dots + D^{(n)} \Phi_m(z_n, y_n) \end{array}$$

Заключение. Полагая

закключаем, что

— числа целые и, по крайней мере, одно из них не нуль.

Рассматривая первую часть равенства (11), мы убедились, что при достаточно больших значениях t все выражения

будут по численной величине сколь угодно малы.

А рассматривая вторую часть того же равенства, мы пришли к совершенно противоположному результату: численное значение одного, по крайней мере, из выражений

не менее единицы.

Такое противуречие результатов служит достаточным доказательством невозможности равенства (1), по крайней мере в том случае, когда все коэффициенты

$$A_1, A_2, \dots, A_a$$

— числа целые.

Линдемани рассуждает несколько иначе. А именно он полагает

$$y_1 = z_1, y_2 = z_2, \dots, y_n = z_n.$$

Тогда также между числами

$$\chi(z_1), \chi(z_2), \dots, \chi(z_n)$$

должны быть не равные нулю.

Выделим их. Пусть это будут

$$\chi(z_1), \chi(z_2), \dots, \chi(z_{n'});$$

напротив,

$$\chi(z_{n'+1}), \chi(z_{n'+2}), \dots, \chi(z_n)$$

мы предполагаем равными нулю.

Произведение

$$\chi(z_1), \chi(z_2) \dots \chi(z_{n'})$$

— число целое, так как оно не что иное как коэффициент при $y^{n-n'}$ в многочлене

$$y^n - (\chi(z_1) + \chi(z_2) + \dots + \chi(z_n)) y^{n-1} + \dots + \\ + (-1)^n \chi(z_1) \chi(z_2) \dots \chi(z_n),$$

равном произведению

$$\{y - \chi(z_1)\} \cdot \{y - \chi(z_2)\} \cdots \{y - \chi(z_{n'})\} \{y - \chi(z_{n'+1})\} \cdots \{y - \chi(z_n)\}$$

и потому симметричном относительно всех корней уравнения

$$F(z) = 0.$$

А отсюда заключаем, что модуль по крайней мере одного из чисел

$$\chi(z_1), \chi(z_2), \dots, \chi(z_n)$$

не меньше единицы, и затем приходим к прежнему противоречию.

§ 6. Дополнения, приводящие к доказательству невозможности равенства (1) во всех случаях

Случай дробных коэффициентов

$$A_1, A_2, \dots, A_a$$

не трудно свести к случаю целых, умножая выражение

$$A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \dots + A_a e^{\alpha_a}$$

на некоторое целое число.

А случай алгебраических коэффициентов

$$A_1, A_2, \dots, A_a$$

не трудно свести на случай рациональных, умножая выражение

$$A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \dots + A_a e^{\alpha_a}$$

на другие подобные же.

Нужно только, чтобы все корни тех алгебраических уравнений (с рациональными коэффициентами), которым удовлетворяют

$$A_1, A_2, \dots, A_a,$$

вошли симметрично в результат.

Вдаваться в более подробные рассуждения по поводу последнего преобразования мы считаем лишним; тем более, что главное значение имеет случай целых коэффициентов.

Таким образом теорема, высказанная в начале этой статьи, доказана вполне.

§ 7. Трансцендентность чисел e и π

Каковы бы ни были целое положительное число n и рациональные числа

$$p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n,$$

равенство

$$e^n + p_1 e^{n-1} + p_2 e^{n-2} + \dots + p_{n-1} e + p_n = 0^*$$

невозможно, так как оно представляет частный случай (1).

Таким образом мы убеждаемся в трансцендентности числа e .

Число π также должно быть трансцендентным, потому что в противном случае равенство

$$e^{\pi i} + 1 = 0,^*$$

представляя частный случай (1), не могло бы иметь места.

Подобным же образом равенство

$$e^{\log A} = A^*$$

служит достаточным доказательством трансцендентности Нэперовых логарифмов всех алгебраических чисел.

Исключение представляет только один из логарифмов единицы и именно нуль.

Трансцендентность e в первый раз была доказана Эрмитом, а трансцендентность π и вообще Нэперовых логарифмов всех алгебраических чисел — Линдеманном.

А именно Эрмит предположил в выражении

$$A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \dots + A_a e^{\alpha_a}$$

коэффициенты

$$A_1, A_2, \dots, A_a$$

и показатели

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_a$$

числами целыми.

* $e^0 = 1$.

Тогда равенство (1) прямо представляется под видом (5), и потому преобразования, о которых говорится в §§ 1 и 6 нашей статьи, излишни.

Допуская это равенство и затем рассуждая, как указано у нас в §§ 2, 3 и 4, Эрмит пришел к противуречию § 5.

Линдеманн же обобщил рассуждения Эрмита на все случаи, когда

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_a, A_1, A_2, \dots, A_a$$

— числа алгебраические.

Вся суть работы Линдеманна, можно сказать, заключается в §§ 1 и 6 нашей статьи.

Невозможность квадратуры круга. Из доказанного, между прочим, следует, что квадратура круга в общепринятом смысле невозможна. Другими словами, по данному радиусу круга нельзя построить сторону квадрата, площадь которого равна площади нашего круга, если пользоваться только циркулем и линейкой.

Действительно, какие бы ни были произведены построения циркулем и линейкой, они могут дать только такие прямые, отношения которых к данной, т. е. к радиусу (других данных нет), выражаются числами алгебраическими,* между тем как отношение стороны искомого квадрата к радиусу, равное $\sqrt{\pi}$, — число трансцендентное.

Совершенно так же нетрудно убедиться в невозможности спрямления окружности круга, т. е. в том, что по данному радиусу круга циркулем и линейкой нельзя построить прямую, длина которой была бы равна окружности нашего круга.

Таким образом дан окончательный ответ на один из вопросов, завещанных нам древними.

* Wantzel. Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. Journ. de Mathem. pures et appliquées, 1 série, T. II, 1837.

Заметим здесь кстати, что еще раньше был решен другой вопрос древних.

А именно после упомянутой работы Вантцеля можно считать доказанной невозможность трисекции углов вообще и в частности, невозможность трисекции угла в 60° .

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

(ИЗВЛЕЧЕНИЕ ИЗ ПИСЕМ А. А. МАРКОВА К А. В. ВАСИЛЬЕВУ)

23 сент. 1898 г.

Мемуар Чебышева „О двух теоремах относительно вероятностей“^[1] имеет важное значение. К сожалению, это значение сильно затемняется двумя обстоятельствами:

- 1) сложностью выводов,
- 2) недостаточною строгостью суждений.

Теорема, которую доказывает Чебышев в упомянутом мемуаре, давно считается верною, но установлена она при помощи крайне нестрогих приемов. Я не говорю доказана, так как нестрогих доказательств я не признаю, если не усматриваю возможности сделать их строгими.

Итак, цель Чебышева состояла не в том, чтобы установить теорему хотя бы и не строго, а в том, чтобы доказать ее. Известный вывод теоремы, о которой идет речь, не строг, но прост. Вывод Чебышева, напротив, очень сложен, так как он основан на предварительных исследованиях. Поэтому преимущество вывода Чебышева перед прежним может заключаться только в строгости суждений.

А между тем вывод Чебышева изложен так, что в строгости его можно сомневаться.

Ввиду этого возникает вопрос, отличается ли вывод Чебышева от прежнего только излишнею сложностью, по существу же дела аналогичен прежнему, или этот вывод можно сделать строгим.

Ваш очерк трудов Чебышева укрепил мое давнишнее желание упростить и вместе с тем сделать вполне строгим анализ Чебышева.

Для начала беру теорему о математических ожиданиях, которая составляет главное содержание мемуара „О двух теоремах относительно вероятностей“.

Ее можно формулировать так.

Если математические ожидания независимых величин

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

равны нулю, а математическое ожидание степени

$$(x_n)^k,$$

для всякого целого положительного числа k остается числом конечным, когда n возрастает беспредельно, то при беспредельном возрастании числа n приближается к пределу нуль каждая из разностей

$$\text{м. о.} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt{n}} \right)^m - A_m \left\{ \text{м. о.} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt{n}} \right)^2 \right\}^{\frac{m}{2}},$$

где m — целое положительное число и ^[2]

$$A_m = \frac{2^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^2} dt.$$

Я приведу элементарное доказательство* этого предложения.

Согласно известному обобщению формулы Ньютона, имеем

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt{n}} \right)^m = \sum \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_i!} \frac{S^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i}}{(\sqrt{n})^m},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ — целые положительные числа (не нули), удовлетворяющие условию

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i = m$$

* Это доказательство найдено мною давно, но до сих пор не опубликовано.

и $S^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i}$ означает симметричную функцию чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

для определения которой может служить один ее член

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_i^{\alpha_i}.$$

Число членов указанного вида этой симметричной функции не больше произведения

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1);$$

оно равно этому произведению в том случае, когда все числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ различны между собой, в остальных же случаях составляет часть указанного произведения

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1).$$

Обращаясь к математическим ожиданиям, находим, что математическое ожидание выражения

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt{n}} \right)^m$$

равно сумме

$$\sum \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_i!} \cdot \frac{\text{м. о. } S^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i}}{(\sqrt{n})^m}.$$

В последней сумме исчезают, согласно одному из условий теоремы, все те члены, где какое-нибудь из чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$$

равно единице.

Следовательно, остаются только те слагаемые ее, для которых каждое из чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$$

не меньше 2.

Полагая соответственно этому

$$\alpha_1 \geq 2, \alpha_2 \geq 2, \dots, \alpha_i \geq 2,$$

из равенства

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i = m$$

заключаем, что в остающихся членах наибольшим значением i будет $\frac{m-1}{2}$, если m нечетное, и $\frac{m}{2}$, если m число четное.

Важно заметить также, что при m четном рассматриваемое нами число i достигает своей наибольшей величины $\frac{m}{2}$ только в том случае, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_i = 2;$$

в других же случаях это число i меньше $\frac{m}{2}$.

С другой стороны, в силу одного из условий теоремы отношение

$$\frac{\text{м. о. } S^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i}}{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}$$

должно оставаться числом конечным, когда возрастает бес-
предельно. Поэтому при $i < \frac{m}{2}$ каждое из отношений

$$\frac{\text{м. о. } S^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i}}{(\sqrt{n})^m}$$

должно стремиться к пределу нуль, когда n возрастает бес-
предельно. Отсюда тотчас заключаем, что при беспредельном
возрастании числа n математическое ожидание выражения

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt{n}} \right)^m$$

должно приближаться к пределу нуль, если m число не чет-
ное.

Если же m четное, то к пределу нуль должна приближаться разность

$$\text{м. о.} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt{n}} \right)^m - \frac{m!}{2^{\frac{m}{2}}} \frac{\text{м. о. } S^{2, 2, 2, \dots, 2}}{n^{\frac{m}{2}}}$$

при том же, конечно, предположении, что n возрастает бесконечно.

Сравним теперь

$$\frac{\text{м. о. } S^{2, 2, 2, \dots, 2}}{n^{\frac{m}{2}}}$$

с

$$\left\{ \text{м. о.} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt{n}} \right)^2 \right\}^{\frac{m}{2}}.$$

Положив для краткости

$$\text{м. о. } x_i^2 = c_i,$$

имеем

$$\text{м. о.} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt{n}} \right)^2 = \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n}.$$

Математическое же ожидание $S^{2, 2, 2, \dots, 2}$ равно симметрической функции чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$, которая определяется одним ее членом $c_1 c_2 \dots c_m$.

Применяя затем обобщенную формулу Ньютона к степени

$$\left(\frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} \right)^{\frac{m}{2}},$$

получаем

$$\left(\frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} \right)^{\frac{m}{2}} = \sum \frac{\left(\frac{m}{2} \right)!}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_j!} \frac{C^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j}}{n^{\frac{m}{2}}},$$

где $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j$ — целые положительные числа (не нули), удовлетворяющие условию

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_j = \frac{m}{2},$$

и $C^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j}$ означает симметрическую функцию чисел

$$c_1, c_2, \dots, c_n,$$

для определения которой может служить один ее член

$$c_1^{\mu_1} c_2^{\mu_2} \dots c_j^{\mu_j}.$$

Из условия

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_j = \frac{m}{2}$$

видно, что число j меньше $\frac{m}{2}$ для всех рассматриваемых нами выражений

$$C^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j},$$

кроме одного

$$C^{1, 1, 1, \dots, 1},$$

которое совпадает с

$$\text{м. о. } S^{2, 2, 2, \dots, 2}.$$

Поэтому при беспредельном возрастании числа n все слагаемые суммы

$$\sum \frac{\left(\frac{m}{2}\right)!}{\mu_1! \mu_2! \dots \mu_j!} \cdot \frac{C^{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j}}{n^{\frac{m}{2}}},$$

кроме одного

$$1 \cdot 2 \dots \frac{m}{2} \cdot \frac{C^{1, 1, 1, \dots, 1}}{n^{\frac{m}{2}}},$$

которое равно

$$1 \cdot 2 \cdots \frac{m}{2} \cdot \frac{\text{м. о. } S^{2, 2, \dots, 2}}{n^{\frac{m}{2}}},$$

приближаются к пределу нуль.

Следовательно, разность

$$\left(\frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} \right)^{\frac{m}{2}} - 1 \cdot 2 \cdots \frac{m}{2} \cdot \frac{\text{м. о. } S^{2, 2, \dots, 2}}{n^{\frac{m}{2}}}$$

приближается к пределу нуль, когда n возрастает беспрестанно.

Сопоставляя этот результат с найденным выше, заключаем, что при беспрестанном возрастании числа n должна приближаться к пределу нуль разность

$$\begin{aligned} & \text{м. о. } \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt{n}} \right)^m - \\ & - A_m \left\{ \text{м. о. } \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt{n}} \right)^2 \right\}^{\frac{m}{2}}, \end{aligned}$$

где

$$A_m = \frac{m!}{2^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{m}{2}!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (m-1) = \frac{2^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^m dt.$$

Здесь m означает любое данное четное положительное число.

Таким образом теорема доказана при m четном.

Для нечетных же m она доказана уже раньше, так как при m нечетном имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^m dt = 0$$

и

$$\text{предел м. о. } \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt{n}} \right)_{n=\infty}^m = 0.*$$

5 октября

Чтобы притти, в конце концов, к известному предельному выражению вероятности в виде определенного интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

мы должны преобразовать теорему первого письма в следующую:

Теорема. При беспредельном возрастании числа n каждая разность

$$\text{м. о. } \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt{2 \text{ м. о. } (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}} \right)^m - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^2} dt$$

приближается к пределу нуль.

Это преобразование не представляет никаких затруднений, но требует нового условия; именно: мы должны предположить, что

$$\text{м. о. } (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

возрастает беспредельно вместе с n и притом так, что отношение

$$\frac{\text{м. о. } (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{n}$$

не стремится к пределу нуль или, лучше сказать, не может быть произвольно малым. Указанное условие играет важную роль и в давно известном выводе приближенного выражения вероятности [3].

* Аналогичные рассуждения можно найти на стр. 168—186 сочинения: Poincaré. Calcul des probabilités.

На частном примере я покажу, что при нарушении этого условия интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t'} e^{-t^2} dt$$

не представляет не только приближенной величины вероятности, но и предела вероятности.

Пусть вообще значениями x_k будут

$$-\frac{1}{N_k} \text{ и } 1,$$

которым соответствуют вероятности

$$\frac{N_k}{N_k + 1} \text{ и } \frac{1}{N_k + 1}.$$

Пусть далее

$$\frac{1}{N_1}, \frac{1}{N_2}, \frac{1}{N_3}, \dots$$

представляет сходящийся ряд положительных чисел и сумма его меньше 1.

При таких условиях легко выразить вероятность, что сумма

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

число отрицательное.

Действительно, эта сумма будет числом отрицательным, если все слагаемые ее

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

будут числами отрицательными, и будет числом положительным, если какое-нибудь из ее слагаемых окажется числом положительным, т. е. единицей. Поэтому, согласно теореме об умножении вероятностей, искомая нами вероятность, что сумма $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ — число отрицательное, выражается произведением

$$\frac{N_1}{N_1 + 1} \cdot \frac{N_2}{N_2 + 1} \cdots \frac{N_n}{N_n + 1},$$

которое равно

$$\left(1 - \frac{1}{N_1 + 1}\right) \left(1 - \frac{1}{N_2 + 1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{N_n + 1}\right)$$

и

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{N_1}\right) \left(1 + \frac{1}{N_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{N_n}\right)}.$$

Следовательно, рассматриваемая нами вероятность больше

$$1 - \frac{1}{N_1 + 1} - \frac{1}{N_2 + 1} - \cdots - \frac{1}{N_n + 1},$$

но меньше

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \cdots + \frac{1}{N_n}}.$$

Числа $N_1, N_2, \dots, N_n$ были до сих пор ограничены одним условием

$$1 \geq \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_3} + \cdots$$

К этому условию мы можем присоединить такое:

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{N_1 + 1} + \frac{1}{N_2 + 1} + \cdots$$

Тогда окажется, что при беспредельном возрастании числа n рассматриваемая нами вероятность суммы $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ быть числом отрицательным приближается к пределу, большему $\frac{1}{2}$.

Напротив, этот предел будет меньше половины, если назначим числа $N_1, N_2, \dots$ так, чтобы было

$$1 = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_3} + \cdots$$

Например, если

$$N_k = (k+1)(k+2) - 1,$$

то

$$\frac{1}{N_1+1} + \frac{1}{N_2+1} + \dots = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots = \frac{1}{2},$$

и рассматриваемая вероятность имеет пределом число, большее $\frac{1}{2}$; если же

$$N_k = k(k+1),$$

то предел вероятности меньше $\frac{1}{2}$.

Этот результат показывает неприменимость к данному случаю теоремы Чебышева, так как согласно ей предел вероятности сумме $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ быть числом отрицательным должен быть равен половине.

Обращаясь затем к

$$\text{м. о. } (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2,$$

видим, что это математическое ожидание равно

$$\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_n}$$

и остается числом конечным, когда n беспрестанно возрастает.

В этом и состоит причина неприменимости теоремы Чебышева к данному случаю.

9 октября

Для лучшего выяснения дела мне кажется полезным остановиться еще на видоизменении моего примера.

Я предполагал прежде положительные и отрицательные значения каждого числа x_k не равными по числовой величине и не равновероятными.

О погрешностях же наблюдений обыкновенно предполагают, что погрешности, отличающиеся только знаком, равновероятны.

Сообразно этому предположению я и видоизменяю пример.

Пусть значениями x_k будут

$$-1, -\frac{1}{N_k}, +\frac{1}{N_k}, +1,$$

которым соответствуют такие вероятности:

$$\frac{1}{2(N_k+1)}, \frac{N_k}{2(N_k+1)}, \frac{N_k}{2(N_k+1)}, \frac{1}{2(N_k+1)}.$$

Тогда математическое ожидание x_n^2 будет попрежнему равно

$$\frac{1}{N_k+1} \left(1 + \frac{1}{N_k}\right) = \frac{1}{N_k}.$$

Сумму ряда

$$\frac{1}{N_1}, \frac{1}{N_2}, \dots, \frac{1}{N_k}, \dots,$$

который мы предполагаем сходящимся, обозначим через $2t^2$ и будем рассматривать вероятность, что сумма

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

заклучается в пределах

$$\pm t \sqrt{2 \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_n} \right)}.$$

Легко показать, что интеграл $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx$ не будет пре-

делом этой вероятности, если мы распорядимся надлежащим образом рядом чисел $N_1, N_2, N_3, \dots$

Действительно, рассматриваемая нами вероятность больше вероятности, что сумма $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ заключается в пределах

$$\pm \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \dots + \frac{1}{N_n} \right).$$

Последняя же вероятность больше вероятности того, что ни одно из чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ не равно ± 1 , т. е. больше указанного раньше произведения

$$\frac{N_1}{N_1 + 1} \cdot \frac{N_2}{N_2 + 1} \cdots \frac{N_n}{N_n + 1}.$$

Установив это, положим

$$N_1 = 2 \cdot 3, \quad N_2 = 3 \cdot 4, \quad N_3 = 4 \cdot 5, \quad N_4 = 5 \cdot 6, \text{ и т. д.}$$

Тогда сумма

$$\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_3} + \dots$$

равна $\frac{1}{2}$; следовательно $t = \frac{1}{2}$ и

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx < 0.53.$$

Произведение же

$$\frac{N_1}{N_1 + 1} \cdot \frac{N_2}{N_2 + 1} \cdots \frac{N_n}{N_n + 1},$$

представляющее величину, меньшую рассматриваемой вероятности, оказывается больше $\frac{6}{7} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{7} = 0.57\dots$, так, как

$$\frac{N_2}{N_2 + 1} \cdot \frac{N_3}{N_3 + 1} \cdots \frac{N_n}{N_n + 1} > 1 - \frac{1}{N_2} - \frac{1}{N_3} - \dots$$

Отсюда ясно, что интеграл

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx$$

не представляет приближенной величины вероятности и не может служить ее пределом при возрастании n до ∞^* [4].

Обращаюсь, согласно выраженному Вами в Вашем письме желанию, к способу наименьших квадратов. Не допуская определенного закона распределения погрешностей отдельных наблюдений, мы можем притти к способу наименьших квадратов, исходя из следующих положений: 1) мы рассматриваем только такие приближенные равенства, которые, по нашим предположениям, не содержат постоянной погрешности; 2) каждому приближенному равенству мы приписываем определенный вес, причем веса различных приближенных равенств мы считаем обратно пропорциональными математическим ожиданиям квадратов погрешностей; 3) достоинство каждого приближенного равенства мы оцениваем его весом и соответственно этому для каждого неизвестного отыскиваем такое приближенное равенство, вес которого наибольший.

Только этот вывод способа наименьших квадратов я считаю рациональным; он указан Гауссом.

Рациональным я считаю этот способ главным образом потому, что он не заменяет условность способа наименьших квадратов.

Придерживаясь такого вывода, мы не приписываем способу наименьших квадратов способности давать наивероятнейшие или наиболее надежные результаты, а рассматриваем его только как общий прием, дающий приближенные величины неизвестных с условною оценкою результатов [5].

Астрономы любят другой вывод, по которому способ наименьших квадратов представляется дающим наивероятнейшие значения неизвестных.

* Интересный, но более сложный пример можно найти в известном сочинении: Poisson. Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile. Можно составить и такие примеры, где математические ожидания квадратов представляют расходящиеся ряды.

Так как этот другой вывод заимствован также от Гаусса, то я считаю полезным привести мнение самого Гаусса, взятое из письма Гаусса к Бесселю.

Вот что пишет Гаусс (взято мною из книги: C z u b e r. Theorie der Beobachtungsfehler, стр. 289):

„Dass ich übrigens die in der Theoria Motus corp. coel. angewandte Metaphysik für die Methode der kleinsten Quadrate späterhin habe fallen lassen, ist vorzugsweise auch aus einem Grunde geschehen, den ich selbst öffentlich nicht erwähnt habe. Ich müsse es nämlich in alle Wege für weniger wichtig halten, denjenigen Wert einer unbekannten Grösse auszumitteln, dessen Wahrscheinlichkeit die grösste ist, die ja doch immer nur unendlich klein bleibt, als vielmehr denjenigen, an welchen sich haltend man das am wenigsten nachteilige Spiel hat; oder wenn $f(a)$ die Wahrscheinlichkeit des Wertes a für die Unbekannte x bezeichnet, so ist weniger daran gelegen, dass $f(a)$ ein Maximum werde, als daran dass $\int f(x)F(x-a)dx$ ausgedehnt durch alle möglichen Werte des x ein Minimum werde, indem für F eine Funktion gewählt wird, die immer positiv und für grössere Argumente auf eine schickliche Art immer grösser wird. Dass man dafür das Quadrat wählt ist rein willkürlich, und diese Willkürlichkeit liegt in der Natur der Sache. Ohne die bekannten ausserordentliche grossen Vorteile, die die Wahl des Quadrats gewährt, könnte man jede andere jeden Bedingungen entsprechende Function wählen...“ [6].

Нужно быть очень упрямым, чтобы, несмотря на приведенные мною слова Гаусса, продолжать держаться рассмотрения наивероятнейших гипотез.

Возвращаясь к тому выводу, который я считаю единственно рациональным.

По моему мнению, он дает все, что нужно для практики; но он не дает нам вероятной ошибки [7].

Я полагаю, что эта сомнительная величина не нужна; если же необходимо ее иметь во что бы то ни стало, то сле-

дует допустить известное выражение для вероятности в виде интеграла $\int e^{-t^2} dt$ для каждой ошибки в отдельности, независимо от того, выведена ли она из одного или из нескольких наблюдений.

При такой постановке вопроса, конечно, нам нет уже необходимости искать предел вероятности или доказывать какие-нибудь неравенства относительно вероятностей.

Можно только спросить, существуют ли резонные основания допускать упомянутую формулу для каждого наблюдения в отдельности.

Одно из известных мне оснований состоит в том, будто бы это допущение согласно с указанием практики; это согласие, однако, трудно установить.

Другое состоит в том, будто бы ошибку каждого наблюдения можно рассматривать как совокупность многих ошибок, независящих друг от друга.

Затем остается сослаться на теорему о пределе вероятности, и мы придем к желаемой формуле.

Такое рассуждение приведено, например, в книге Пуанкаре „Calcul des probabilités“, на стр. 181.

Но, во-первых, теорема о пределе вероятностей может быть установлена только со многими ограничениями, и, во-вторых, представление ошибки в виде суммы многих независимых ошибок следует отнести, как я полагаю, к области фантазии.

Перейдем к выводу способа наименьших квадратов, основанному на теореме, по которой предел вероятности выражается известным интегралом.

Рассматривая известную формулу как предельную и не допуская ее для одного наблюдения, мы не имеем права допустить эту формулу ни для 2, ни для 10, ни для 100 и вообще ни для какого данного числа наблюдений.

В действительности же мы имеем дело всегда с данным числом наблюдений и можем говорить о пределе, только придумав искусственно продолжение этих наблюдений.

Мы занимаемся не предельным выводом, к которому придем, когда продолжим наши наблюдения до бесконечности, а выводом из данного числа наблюдений. Теорема, по которой предел вероятности выражается известным интегралом, не указывает, насколько в каждом данном случае вероятность уклоняется от этого интеграла.

Вопрос о размере уклонений остается открытым; они могут быть весьма значительными и, главное, различными в различных случаях.

Поэтому, считая известный интеграл за приближенную величину вероятности и делая его наибольшим, мы, однако, не можем утверждать, что вместе с тем достигает наибольшей величины и сама вероятность. Если же мы сохраняем неизменною величину интеграла, то не можем утверждать, что остается неизменною и сама вероятность.

Вот почему теорема о пределе вероятности не может служить доказательством, будто бы способ наименьших квадратов дает наиболее надежные результаты, т. е. такие результаты, в которых тем же пределам погрешности соответствует наибольшая вероятность или той же вероятности соответствуют теснейшие пределы погрешности.

В русской литературе по теории вероятностей встречаются также попытки вывести основания способа наименьших квадратов из теорем, доказанных Чебышевым в мемуаре „О средних величинах“.

Одну из таких попыток, весьма смутную по существу дела, можно усмотреть в известном сочинении „Изложение способа наименьших квадратов“ Н. Маиевского.* В §§ 31 и 32 этого сочинения говорится о каком-то „начале арифметической середины“.

* Я привожу это сочинение только для определенности, но аналогичные рассуждения можно встретить и в других книгах.

В § 31 автор занимается выводом этого начала для весьма большого числа наблюдений, не установив, в чем собственно состоит оно.

И только из § 32 можно догадаться, что это начало состоит в известном предположении Гаусса, что среднее арифметическое из наблюденных величин представляет наименее вероятнейшее значение неизвестной измеряемой величины [8].

Рассматривая же рассуждения § 31, мы убеждаемся, что из них не вытекает ничего подобного, так как все время говорится только об арифметическом среднем и никаких сравнений этого среднего с другими не сделано.

Заключение § 31 состоит в том, что с увеличением числа наблюдений до ∞ приводится к единице вероятность, что среднее арифметическое наблюденных величин разнится от истинного значения неизвестного менее чем на какую-нибудь данную величину.

Отсюда, однако, ничего не следует, так как с увеличением числа наблюденных величин до ∞ приводится к единице и вероятность, что другие средние (линейного вида) из наблюденных величин разнятся от истинного значения неизвестного менее чем на какую-нибудь данную величину.

Наконец, мне известно, что некоторые русские математики пытались вывести способ наименьших квадратов посредством неправильного применения теорем Чебышева о том, что вероятность больше некоторой величины.

Имея в виду этот результат Чебышева, они требовали от вероятности, чтобы она была больше заданного наперед числа, и при том же неравенстве для вероятности искали теснейшие пределы погрешности.

При этом забывалось, что одному и тому же неравенству удовлетворяет бесчисленное множество различных чисел и что вероятность может быть больше некоторого данного числа и в то время, когда неравенство Чебышева этого не обнаруживает.

Других выводов способа наименьших квадратов я в настоящую минуту не могу припомнить.

Повидимому, я пересмотрел все и могу только повторить свое мнение, что единственно рациональный вывод основан на прямом рассмотрении математического ожидания квадрата погрешности. Этого вывода я и держусь на своих лекциях.

О КОРНЯХ УРАВНЕНИЯ $e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$

Представлена 4 ноября 1898 г.

Теорема 1. Все корни уравнения

$$e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$$

содержатся между

$$-\frac{m}{\sqrt{\log m}} \quad \text{и} \quad +\frac{m}{\sqrt{\log m}}.$$

Доказательство. Заменяя в равенстве

$$\begin{aligned} (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} &= (2x)^m - \frac{m(m-1)}{1} (2x)^{m-2} + \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2} (2x)^{m-4} - \dots \end{aligned}$$

произведения

$$\begin{aligned} &m(m-1)(m-2)(m-3), \\ &m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5), \dots \end{aligned}$$

соответственно через

$$m^4 - 6m^3, \quad m^6 + 15m^5, \quad m^8 - 28m^7, \quad m^{10} + 45m^9, \dots,$$

мы получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{e^{x^2} d^m e^{-x^2}}{(-2x)^m dx^m} &> 1 - t + \frac{t^2}{1 \cdot 2} - \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \\ \dots - \frac{3}{m} t^2 &\left\{ 1 + \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 6} t + \frac{7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6} t^2 + \frac{9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} t^3 + \dots \right\}, \end{aligned}$$

где t означает $\frac{m^2}{4x^2}$.

Сумма

$$1 - t + \frac{t^2}{1 \cdot 2} - \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

равна e^{-t} , а значение суммы

$$1 + \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 6} t + \frac{7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6} t^2 + \frac{9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} t^3 + \dots$$

меньше, чем e^t .

Таким образом, из предыдущего неравенства следует более простое неравенство

$$\frac{e^{x^2}}{(-2x)^m} \cdot \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} > e^{-t} \left(1 - \frac{3}{m} t^2 e^{2t} \right).$$

С другой стороны, если

$$t \leq \frac{\log m}{4},$$

то

$$\frac{3}{m} t^2 e^{2t} \leq \frac{3}{16} \frac{(\log m)^2}{\sqrt{m}} < 1.$$

Поэтому выражение

$$\frac{e^{x^2}}{(-x)^m} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}$$

имеет положительное значение для всех значений x , удовлетворяющих неравенству

$$\frac{m^2}{4x^2} \leq \frac{\log m}{4},$$

или

$$|x| \geq \frac{m}{\sqrt{\log m}},$$

откуда немедленно вытекает теорема 1.

Теорема 2. При достаточно больших значениях m уравнение

$$e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}$$

имеет корни в любом заданном интервале.

Доказательство. Пусть a и b — два заданных положительных числа.

Мы предполагаем эти числа положительными только для упрощения выкладок; легко видеть, что это ограничение не влияет на общность наших выводов.

Обозначив через c наибольший корень уравнения

$$e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m},$$

положим

$$(c + a)(c + b) = d, \quad (x - a)(b - x) = z$$

и

$$\Omega(x) = \left\{ \cos \mu \arccos \frac{2z + d}{d} \right\}^2,$$

где μ — целое число, равное $\frac{m-1}{2}$ или $\frac{m-2}{2}$.

Известно, что функции

$$e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}$$

можно рассматривать как знаменатели подходящих дробей непрерывной дроби, соответствующей интегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{x - t} dt.$$

Поэтому, если обозначить через

$$x_1, x_2, \dots, x_m$$

все корни уравнения

$$e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}$$

и определить соответствующие коэффициенты

$$A_1, A_2, \dots, A_m$$

по формулам

$$A_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2} \varphi(t)}{(t - x_i) \varphi^1(x_i)} dt,$$

где

$$\varphi(x) = e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m},$$

то, по известному свойству непрерывных дробей, мы будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \Omega(x) dx = \sum A_i \Omega(x_i),$$

ибо степень полинома $\Omega(x)$ меньше, чем $2m$.

Коэффициенты A_i суть положительные числа, и

$$A_1 + A_2 + \dots + A_m = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Предположим теперь, что уравнение

$$e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}$$

не имеет корней в интервале (a, b) . Тогда все числа x_i удовлетворяют неравенствам

$$b < x_i < c \quad \text{или} \quad -c < x_i < a,$$

и все числа

$$z_i = (x_i - a)(b - x_i)$$

заключены между 0 и $-d$, откуда следуют неравенства

$$-1 < \frac{2z_i + d}{d} < +1, \quad \Omega(x_i) < 1,$$

и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \Omega(x) dx = \sum A_i \Omega(x_i) < \sum A_i = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

В то же время легко видеть, что функция $\Omega(x)$ будет положительной для всех значений x и удовлетворяет неравенству

$$\Omega(x) > 4\mu(\mu-1) \frac{(x-a)(b-x)}{(c+a)(c+b)}$$

для значений x , заключенных между a и b .

В самом деле, равенство, определяющее $\Omega(x)$, сводится к следующему:

$$\Omega(x) = \left\{ \frac{\left(\frac{2z+d}{d} + \sqrt{\left(\frac{2z+d}{d} \right)^2 - 1} \right)^\mu + \left(\frac{2z+d}{d} - \sqrt{\left(\frac{2z+d}{d} \right)^2 - 1} \right)^\mu}{2} \right\}^2,$$

если

$$a < x < b,$$

то

$$\frac{2z+d}{d} > 1, \quad \sqrt{\left(\frac{2z+d}{d} \right)^2 - 1} > 2\sqrt{\frac{z}{d}}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Omega(x) &> \left\{ \frac{\left(1 + 2\sqrt{\frac{z}{d}} \right)^\mu + \left(1 - 2\sqrt{\frac{z}{d}} \right)^\mu}{2} \right\} > \\ &> \left[1 + 2\mu(\mu-1) \frac{z}{d} \right]^2 > 4\mu(\mu-1) \frac{z}{d}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \Omega(x) dx > \frac{4\mu(\mu-1)}{(c+a)(c+b)} \int_a^b e^{-x^2} (x-a)(b-x) dx.$$

Сравнивая это неравенство с предыдущим неравенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \Omega(x) dx < \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

мы найдем, что отношение

$$\frac{(c+a)(c+b)}{4\mu(\mu-1)}$$

больше, чем отношение

$$\frac{\int_a^b e^{-x^2} (x-a)(b-x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx}.$$

Но, в силу теоремы 1, отношение

$$\frac{(c+a)(c+b)}{4\mu(\mu-1)}$$

должно стремиться к нулю, когда m неорганично возрастает.

Следовательно, наше предположение, что уравнение

$$e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}$$

не имеет корней в интервале (a, b) , не может выполняться для достаточно больших значений m ; теорема, таким образом, доказана.

Теорема 3. Положим

$$\varphi(x) = e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} \quad \text{и} \quad \psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t-x} e^{-t^2} dt.$$

Сумма

$$\sum_{\alpha}^{\beta} \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)},$$

распространенная на все корни x_i уравнения $\varphi(x)=0$, заключенные в данном интервале (α, β) , при неограниченном возрастании m стремится к пределу, равному

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2} dx.$$

Доказательство. Обозначая через ξ' и ξ'' два корня уравнения $\varphi(x)=0$, удовлетворяющих неравенствам $\xi' < \alpha < \xi''$ и наиболее близких к α , и через η' и η'' два корня того же уравнения, удовлетворяющих неравенствам $\eta' < \beta < \eta''$ и наиболее близких к β , мы, как известно, будем иметь неравенства

$$\int_{\xi''}^{\eta'} e^{-x^2} dx < \sum_{\alpha}^{\beta} \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)} < \int_{\xi'}^{\eta''} e^{-x^2} dx.$$

Но в силу предыдущей теоремы при $m \rightarrow \infty$ числа ξ' и ξ'' должны стремиться к α , а числа η' и η'' — к β .

Следовательно, интегралы

$$\int_{\xi''}^{\eta'} e^{-x^2} dx \quad \text{и} \quad \int_{\xi'}^{\eta''} e^{-x^2} dx$$

и сумма

$$\sum_{\alpha}^{\beta} \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)},$$

заклученная между ними, при неограниченном возрастании m стремятся к пределу

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2} dx.$$

Примечание. Предел

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2} dx$$

суммы

$$\sum_{\alpha}^{\beta} \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}$$

не изменится, если к ней добавить или от нее отнять какое-либо число членов

$$\frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)},$$

соответствующих корням x_i уравнения

$$\varphi(x) = 0,$$

наиболее близким к α и β .

Например, сумма

$$\sum \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)} (\xi'' < x_i < \eta'),$$

распространенная на корни x_i , удовлетворяющие неравенствам

$$\xi'' < x_i < \eta',$$

и сумма

$$\sum \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)} (\xi' \leq x_i \leq \eta''),$$

распространенная на корни x_i , удовлетворяющие неравенствам

$$\xi' \leq x_i \leq \eta'',$$

стремится к тому же пределу

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2} dx,$$

когда m неограниченно возрастает.

Это примечание не требует специального доказательства. Доказанные нами теоремы о корнях уравнения

$$e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}$$

могут служить для простого доказательства следующего предложения, которое отличается от теоремы Чебышева только второстепенными деталями.

Теорема 4. Если все функции $f_n(x)$ последовательности

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$$

удовлетворяют неравенству

$$f_n(x) \geq 0,$$

а суммы

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(x), \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x), \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n(x), \dots$$

стремятся, соответственно, к пределам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx, \dots$$

когда n неограниченно возрастает, то сумма

$$\sum_{\alpha}^{\beta} f_n(x),$$

распространенная на все значения x , заключенные в заданном интервале (α, β) , стремится при неограниченном возрастании n к пределу

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2} dx.$$

Доказательство. Чтобы доказать эту теорему, необходимо и достаточно показать, что для достаточно больших значений n разность

$$\sum_{\alpha}^{\beta} f_n(x) - \int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2} dx$$

будет по абсолютной величине меньше сколь угодно малого положительного числа.

Сохраняя наши обозначения, введенные в теореме 3 и в примечании, и обозначая через ε данное положительное число, предположим, что n приняло значение настолько большое, что разности между интегралом

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2} dx$$

и суммами

$$\sum \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)} (\xi'' < x_i < \eta') \quad \text{и} \quad \sum \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)} (\xi' \leq x_i \leq \eta'')$$

по абсолютному значению стали меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$; по теореме 3 это возможно.

После этого рассмотрим подходящие дроби для непрерывной дроби, соответствующей сумме

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_n(t)}{x-t},$$

т. е. ряду

$$\frac{1}{x} \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) + \frac{1}{x^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x) + \frac{1}{x^3} \sum_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n(x) + \dots;$$

обозначим через

$$\frac{\bar{\psi}(x)}{\bar{\varphi}(x)}$$

одну из этих подходящих дробей, определяя ее требованием, чтобы степень $\bar{\varphi}(x)$ была равна m .

Коэффициенты дроби

$$\frac{\bar{\psi}(x)}{\bar{\varphi}(x)}$$

являются рациональными функциями от количеств

$$\alpha_0 = \sum f_n(x), \quad \alpha_1 = \sum x f_n(x), \quad \dots, \quad \alpha_{2m-1} = \sum x^{2m-1} f_n(x)$$

и, следовательно, корни уравнения

$$\bar{\varphi}(x) = 0$$

являются алгебраическими функциями от этих количеств.

Но количества

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m-1}$$

стремятся, соответственно, к пределам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx, \quad \dots, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} e^{-x^2} dx,$$

когда n неограниченно возрастает.

Отсюда следует, что корни

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m,$$

уравнения

$$\bar{\varphi}(x) = 0$$

отличаются от соответствующих корней

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

уравнения

$$\varphi(x) = 0$$

на величины сколь угодно малые, когда n достаточно велико; $\bar{x}_i$ и x_i являются соответствующими корнями уравнений

$$\bar{\varphi}(x) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(x) = 0$$

если положить

$$\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \dots < \bar{x}_m \text{ и } \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \dots < x_m.$$

По той же причине разность

$$\frac{\bar{\psi}(\bar{x}_i)}{\bar{\varphi}'(\bar{x}_i)} - \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}$$

стремится к нулю для каждой пары соответствующих корней $\bar{x}_i$ и x_i , когда n неограниченно возрастает.

Следовательно, для достаточно больших значений n разность между

$$\sum \frac{\bar{\psi}(\bar{x}_i)}{\bar{\varphi}'(\bar{x}_i)} (\bar{\xi}'' < \bar{x}_i < \bar{\eta}') \text{ и } \sum \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)} (\xi'' < x_i < \eta')$$

и разность между

$$\sum \frac{\bar{\psi}(\bar{x}_i)}{\bar{\varphi}'(\bar{x}_i)} (\bar{\xi}' \leq \bar{x}_i \leq \bar{\eta}'') \text{ и } \sum \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)} (\xi' \leq x_i \leq \eta'')$$

будут по абсолютной величине меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$; здесь $\bar{\xi}'$, $\bar{\xi}''$, $\bar{\eta}'$, $\bar{\eta}''$ — корни уравнения

$$\bar{\varphi}(x) = 0,$$

соответствующие корням ξ' , ξ'' , η' , η'' уравнения $\varphi(x) = 0$.

С другой стороны, по известным свойствам подходящих к непрерывной дроби, для суммы

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_n(t)}{x-t}$$

должны иметь место неравенства

$$\sum_{\alpha}^{\beta} f_n(x) > \sum \frac{\bar{\psi}(\bar{x}_i)}{\bar{\varphi}'(\bar{x}_i)} (\bar{\xi}'' < \bar{x}_i < \bar{\eta}')$$

и

$$\sum_{\alpha}^{\beta} f_n(x) < \sum \frac{\bar{\psi}(x_i)}{\bar{\varphi}'(\bar{x}_i)} (\bar{\xi}' \leq \bar{x}_i \leq \bar{\eta}'').$$

Отсюда следует, что для достаточно больших значений
сумма $\sum_{\alpha}^{\beta} f_n(x)$ больше, чем

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2} dx - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2},$$

и меньше, чем

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2} dx + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

После того как теорема 4 доказана, как заметил Чебышев,* почти немедленно получается следующее важное предложение теории вероятностей.

Вероятность, что сумма

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

независимых величин

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

содержится между

$$\alpha \sqrt{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)} \text{ и } \beta \sqrt{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — математические ожидания величин

$$u_1^2, u_2^2, \dots, u_n^2$$

и α и β — две какие-либо заданные величины, стремится при неограниченном возрастании n к пределу, равному

* П. Чебышев. О двух теоремах относительно вероятностей. Приложение № 6 к LV тому „Записок имп. Академии Наук“. [1].

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-x^2} dx,$$

если бесконечная последовательность независимых величин

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

удовлетворяет следующим условиям:

1) математические ожидания величин

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

равны нулю;

2) математические ожидания величин

$$u_k^2, u_k^3, u_k^4, \dots$$

остаются конечными для конечных значений k в случае, когда k неограниченно возрастает;

3) математическое ожидание величины

$$u_k^2$$

не делается бесконечно малым, когда k неограниченно возрастает.

В самом деле, чтобы доказать это предложение, достаточно, в силу теоремы 4, доказать, что математические ожидания величин

$$\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{\sqrt{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}}, \left(\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{\sqrt{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}} \right)^2, \\ \left(\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{\sqrt{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}} \right)^3, \left(\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{\sqrt{2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}} \right)^4, \dots$$

стремятся, соответственно, к пределам

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx, \dots,$$

когда n неограниченно возрастает и выполняются вышеуказанные условия.

Но соображения, с помощью которых Чебышев доказал это свойство математических ожиданий, могут быть заменены другими, более простыми и в то же время строгими, как я показал в своих письмах к г-ну М. Васильеву, профессору Казанского университета.*

Заканчивая, я должен заметить, что до исследования Чебышева предложение о пределе вероятности было доказано только для самых простых частных случаев.

* Изв. Физ.-матем. общ. при Казанск. унив., 1898, т. VIII. См. также: Poincaré. Calcul des Probabilités, pp. 169—186.

НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА И ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

(ИЗВЛЕЧЕНИЕ ИЗ КНИГИ „ИСЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ“)

§ 54. Для приложения метода Бьенэме—Чебышева (метода моментов) к доказательству второй предельной теоремы исчисления вероятностей мы должны рассматривать непрерывные дроби вида

$$\frac{a_1}{z + b_1} - \frac{a_2}{z + b_2} - \frac{a_3}{z + b_3} - \dots$$

в связи с рядами вида

$$S_0 \frac{1}{z} + S_1 \frac{1}{z^2} + S_2 \frac{1}{z^3} + S_3 \frac{1}{z^4} + \dots,$$

где число z переменное, а остальные буквы означают числа постоянные или переменные, не зависящие от z . Как ряд, так и непрерывная дробь будут у нас бесконечными, но мы не имеем надобности предполагать их сходящимися, ибо ряд служит нам только для образования конечных сумм

$$S_0 \frac{1}{z} + S_1 \frac{1}{z^2} + S_2 \frac{1}{z^3} + \dots + S_{k-1} \frac{1}{z^k}$$

с произвольным числом слагаемых, а непрерывная дробь нужна только ради ее подходящих дробей

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)} = \frac{a_1}{z + b_1} - \frac{a_2}{z + b_2} + \dots - \frac{a_m}{z + b_m},$$

причем целые функции

$$\psi_1(z), \psi_2(z), \psi_3(z), \dots$$

и

$$\omega_1(z), \omega_2(z), \omega_3(z), \dots$$

последовательно определяются формулами

$$\begin{aligned} \psi_1(z) &= a_1, & \psi_2(z) &= a_1(z + b_2); \\ \omega_1(z) &= z + b_1, & \omega_2(z) &= (z + b_1)(z + b_2) - a_2; \\ \psi_m(z) &= (z + b_m)\psi_{m-1}(z) - a_m\psi_{m-2}(z); \\ \omega_m(z) &= (z + b_m)\omega_{m-1}(z) - a_m\omega_{m-2}(z). \end{aligned}$$

Числа

$$S_0, S_1, S_2, S_3, \dots$$

мы должны ограничить условием, что среди определителей

$$S_0, \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}, \dots$$

нет равных нулю. Такое условие необходимо и достаточно, чтобы можно было связать ряд с непрерывной дробью общим равенством

$$\begin{aligned} \omega_m(z) \left\{ S_0 \frac{1}{z} + S_1 \frac{1}{z^2} + S_2 \frac{1}{z^3} + \dots \right\} - \psi_m(z) &= \\ &= \frac{\alpha}{z^{m+1}} + \frac{\beta}{z^{m+2}} + \dots, \end{aligned}$$

Обозначая затем для любой целой функции

$$\varphi(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_k z^k$$

символом

$$[\varphi(x)]$$

сумму

$$S_0 C_0 + S_1 C_1 + S_2 C_2 + \dots + S_k C_k,$$

мы можем представить вышеприведенную систему уравнений так:

$$[\omega_m(x)] = 0, [x\omega_m(x)] = 0, \dots, [x^{m-1}\omega_m(x)] = 0,$$

и можем заменить ее даже одним равенством

$$[\theta(x)\omega_m(x)] = 0,$$

если под $\theta(z)$ будем подразумевать все целые функции $m-1$ -й степени.

Введенный нами символ $[\varphi(x)]$ удовлетворяет, очевидно, простой теореме сложения

$$[\varphi(x)] + [\chi(x)] = [\varphi(x) + \chi(x)].$$

На этом основании не трудно проверить, что функции

$$\omega_m(z), \quad \omega_{m-1}(z), \quad \omega_{m-2}(z)$$

связаны между собой уравнением вида

$$\omega_m(z) = (z + b_m)\omega_{m-1}(z) - a_m\omega_{m-2}(z).$$

В самом деле, каковы бы ни были постоянное число b_m и целая функция $\theta(z)$ $m-3$ -й степени, имеем

$$[\theta(x)\omega_m(x)] = 0 \quad \text{и} \quad [(x + b_m)\omega_{m-1}(x)\theta(x)] = 0,$$

и потому разность

$$\omega_m(z) - (z + b_m)\omega_{m-1}(z),$$

согласно вышеприведенной теореме сложения, должна удовлетворять уравнению

$$[\theta(x) \{\omega_m(x) - (x + b_m) \omega_{m-1}(x)\}] = 0,$$

где $\theta(z)$ — также произвольная целая функция $m-3$ -й степени; а при некотором определенном значении коэффициента b_m эта разность приводится к целой функции $m-2$ -й степени, и тогда она может отличаться только постоянным множителем от функции $\omega_{m-2}(z)$, которая как раз определяется уравнением

$$[\theta(x) \omega_{m-2}(x)] = 0,$$

где степень произвольной целой функции $\theta(z)$ равна $m-3$.

Что касается целой функции $\psi_m(z)$, то при помощи введенного нами символа она может быть определена формулой

$$\psi_m(z) = \left[\frac{\omega_m(x) - \omega_m(z)}{x - z} \right].$$

Последняя формула представляет сокращенное выражение следующей:

$$\begin{aligned} \psi_m(z) = & S_0 z^{m-1} + (S_0 L_{m-1} + S_1) z^{m-2} + \\ & + (S_0 L_{m-2} + S_1 L_{m-1} + S_2) z^{m-3} + \dots \end{aligned}$$

Следует заметить также, что неравенство определителя

$$\begin{vmatrix} S_0, & S_1, & \dots, & S_{m-1} \\ S_1, & S_2, & \dots, & S_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{m-1}, & S_m, & \dots, & S_{2m-2} \end{vmatrix}$$

нулю указывает на невозможность удовлетворить системе уравнений

$$[\varphi(x)] = 0, [x\varphi(x)] = 0, \dots, [x^{m-1}\varphi(x)] = 0$$

никакой целой функцией $\varphi(z)$, которая не равна тождественно нулю и имеет степень, меньшую m . И, наоборот, если только что приведенной системе уравнений нельзя удовлетворить целой функцией $\varphi(z)$ степени ниже m , не приравнивая всех ее коэффициентов нулю, то наш определитель

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{m-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{m-1} & S_m & \dots & S_{2m-2} \end{vmatrix}$$

не равен нулю.

На этом основании мы можем для тех рядов

$$S_0 \frac{1}{z} + S_1 \frac{1}{z^2} + S_2 \frac{1}{z^3} + \dots,$$

которыми специально будем заниматься, заключать о существовании соответствующей непрерывной дроби

$$\frac{a_1}{z + b_1} - \frac{a_2}{z + b_2} - \frac{a_2}{z + b_3} - \dots$$

без вычисления определителей^[2]

$$S_0, \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}, \dots$$

Не делая пока никаких особых предположений, обратим внимание на то, что коэффициенты целых функций

$$\omega_m(z) \quad \text{и} \quad \psi_m(z)$$

представляют некоторые рациональные функции чисел

$$S_0, S_1, S_2, S_3, \dots, S_{2m-1}.$$

Следовательно, корни уравнения

$$\omega_m(z) = 0$$

алгебраические функции тех же чисел, и потому при непрерывном изменении последних они также должны изменяться непрерывно.

Если же для некоторой совокупности чисел

$$S_0, S_1, \dots, S_{2m-2}, S_{2m-1}$$

все эти корни различны, то мы можем установить равенство

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)} = \sum_{\xi} \frac{\rho}{z - \xi},$$

где суммирование, обозначенное символом $\sum_{\xi}$, распространяется на все корни уравнения

$$\omega_m(\xi) = 0,$$

а значения ρ определяются формулой

$$\rho = \frac{\psi_m(\xi)}{\omega'_m(\xi)},$$

и обе формулы

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)} = \sum_{\xi} \frac{\rho}{z - \xi} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{\psi_m(\xi)}{\omega'_m(\xi)}$$

сохраняют свою силу при достаточно малых изменениях чисел

$$S_0, S_1, S_2, \dots, S_{2m-2}, S_{2m-1},$$

непрерывными функциями которых будут все ρ подобно ξ .

Положим теперь, что мы имеем некоторую совокупность вещественных чисел, общий член которой обозначим буквою

x ; положим также, что каждому из этих x соответствует свое определенное число p .

Наконец, положим, что имеют смысл суммы

$$\sum_x p, \quad \sum_x px, \quad \sum_x px^2, \quad \sum_x px^3, \quad \dots$$

распространенные на всю нашу совокупность чисел x , и этим суммам приравняем, соответственным образом, коэффициенты вышеприведенного ряда

$$S_0 \frac{1}{z} + S_1 \frac{1}{z^2} + S_2 \frac{1}{z^3} + \dots,$$

так что, вообще, будет

$$S_k = \sum_x px^k.$$

При таких предположениях, на которых мы специально остановимся, введенный нами символ

$$[\varphi(x)]$$

обращается в сумму

$$\sum_x p\varphi(x).$$

А система уравнений, которой подчинены коэффициенты функции $\omega_m(z)$, может быть выражена равенством

$$\sum_x p^{\theta(x)} \omega_m(x) = 0,$$

где $\theta(z)$ попрежнему произвольная целая функция $m-1$ -й степени.

Вместе с тем нетрудно видеть, что сумма

$$\sum_x p\varphi(x)\varphi(x)$$

может быть нулем только для таких вещественных целых функций $\varphi(z)$, которые сами обращаются в нуль, коль скоро z равняется любому из чисел x нашей совокупности [3]. А отсюда следует, что требованию, выражаемому равенством

$$\sum_x p^\theta(x) \varphi(x) = 0,$$

где $\theta(z)$ — произвольная целая функция $m-1$ -й степени, не может удовлетворить никакая целая функция $\varphi(z)$ $m-1$ -й степени, если совокупность x содержит более $m-1$ чисел.

Поэтому, если наша совокупность x содержит более $m-1$ чисел, то существование вышеуказанных дробей

$$\frac{\psi_1(z)}{\omega_1(z)}, \frac{\psi_2(z)}{\omega_2(z)}, \dots, \frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)},$$

определяемых первыми $2m$ членами ряда

$$S_0 \frac{1}{z} + S_1 \frac{1}{z^2} + S_2 \frac{1}{z^3} + \dots,$$

не подлежит сомнению [4]. При том же предположении не трудно убедиться, что число вещественных различных корней уравнения

$$\omega_m(z) = 0$$

должно быть равным m , а не меньше m .

В самом деле, если различными вещественными корнями, нечетной кратности, для уравнения

$$\omega_m(z) = 0$$

будут k и только k чисел

$$c_1, c_2, \dots, c_k,$$

то произведение

$$(z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_k) \omega_m(z)$$

при всех вещественных значениях z будет числом положительным и будет нулем только вместе с $\omega_m(z)$, и потому, если $k < m$, то сумма

$$\sum_x p(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_k) \omega_m(x),$$

содержащая не менее m слагаемых и среди них не более^[5]

$$k + \frac{m-k}{2} = m - \frac{m-k}{2}$$

нулей, не может быть нулем, между тем как она при $k < m$ должна быть нулем, в силу общего равенства

$$\sum p^\theta(x) \omega_m(x) = 0,$$

определяющего функцию $\omega_m(z)$.

Итак, $k = m$, и соответственно этому $\omega_m(z)$, должна разлагаться на m различных вещественных множителей первой степени

$$\omega_m(z) = (z - \xi_1)(z - \xi_2) \dots (z - \xi_m).$$

Таким образом, мы приходим к следующим выводам, на которых будут основаны дальнейшие наши заключения.

Если совокупность вещественных чисел x содержит не менее μ членов и если соответствующие им числа p положительны, то для

$$m = 1, 2, 3, \dots, \mu$$

существует целая функция $\omega_m(z)$ m -ой степени, определяемая системой уравнений

$$\begin{aligned} \sum_x p \omega_m(x) &= 0, \quad \sum_x p x \omega_m(x) = 0, \quad \dots, \\ \sum_x p x^{m-1} \omega_m(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

и условием, что у ней коэффициент при z^m равен единице.

Эта функция разлагается на m различных вещественных множителей первой степени

$$\omega_m(z) = (z - \xi_1)(z - \xi_2) \dots (z - \xi_m). \quad (2)$$

Полагая затем

$$\psi_m(z) = \sum_x p \frac{\omega_m(z) - \omega_m(x)}{z - x}, \quad (3)$$

имеем, при тех же условиях насчет x и p , установить формулы

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)} = \sum_{\xi} \frac{\rho}{z - \xi}, \quad (4)$$

$$\rho = \frac{\psi_m(\xi)}{\omega'_m(\xi)},$$

где

$$\xi = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$$

и общее равенство

$$\sum_{\xi} \rho \Omega(\xi) = \sum_x p \Omega(x) \quad (5)$$

для любой целой функции $\Omega(z)$, степень которой не выше $2m - 1$.

В самом деле, если степень целой функции $\Omega(z)$ не превосходит $2m - 1$, то мы можем установить равенства

$$\Omega(z) = \Omega_0(z) + \theta(z) \omega_m(z)$$

и

$$\Omega_0(z) = \sum_{\xi} \frac{\omega_m(z)}{(z - \xi) \omega'_m(\xi)} \Omega(\xi),$$

где степень целой функции $\theta(z)$ не превосходит $m - 1$.

Вместе с тем имеем

$$\sum_x p \theta(x) \omega_m(x) = 0 = \sum_{\xi} \rho \theta(\xi) \omega_m(\xi)$$

и

$$\begin{aligned}\sum_x p\Omega_0(x) &= \sum_{\xi} \Omega(\xi) \sum_{\xi} p \frac{\omega_m(x) - \omega_m(\xi)}{(x - \xi) \omega'_m(\xi)} = \\ &= \sum_{\xi} \frac{\psi_m(\xi)}{\omega'_m(\xi)} \Omega(\xi) = \sum_{\xi} p\Omega(\xi);\end{aligned}$$

следовательно,

$$\sum_x p\Omega(x) = \sum_x p\Omega_0(x) = \sum_{\xi} p\Omega(\xi),$$

что и выражается равенством (5).

Наконец, рассматривая два ряда целых функций

$$\omega_0(z) = 1, \quad \omega_1(z), \quad \omega_2(z), \quad \dots, \quad \omega_{\mu}(z)$$

и

$$\psi_0(z) = 0, \quad \psi_1(z), \quad \psi_2(z), \quad \dots, \quad \psi_{\mu}(z),$$

мы убеждаемся, что каждые три смежных функции этих рядов связаны между собой линейными формулами

$$\begin{aligned}\omega_m(z) &= (z + b_m) \omega_{m-1}(z) - a_m \omega_{m-2}(z), \\ \psi_m(z) &= (z + b_m) \psi_{m-1}(z) - a_m \psi_{m-2}(z),\end{aligned}\tag{6}$$

коэффициенты которых a_m и b_m можно определить равенствами

$$b_m = - \frac{\sum_x p x \omega_{m-1}(x) \omega_{m-1}(x)}{\sum_x p \omega_{m-1}(x) \omega_{m-1}(x)},\tag{7}$$

и [6]

$$a_m = \frac{\sum_x p \omega_{m-1}(x) \omega_{m-1}(x)}{\sum_x p \omega_{m-2}(x) \omega_{m-2}(x)}\tag{8}$$

при $m \geq 2$.

Для полного определения функций

$$\omega_1(z), \psi_1(z), \omega_2(z), \psi_2(z), \dots, \omega_\mu(z), \psi_\mu(z)$$

следует присоединить еще четыре равенства

$$\omega_1(z) = z + b_1, \quad \psi_1(z) = a_1$$

и

$$a_1 = \sum_x p, \quad b_1 = - \frac{\sum_x px}{\sum_x p}.$$

Из формул (6) и (8) вытекает важное для нас простое равенство

$$\psi_m(z) \omega_{m-1}(z) - \psi_{m-1}(z) \omega_m(z) = \sum p \omega_{m-1}(x) \omega_{m-1}(x), \quad (9)$$

в силу которого можно заменить вторую из формул (4) такую [7].

$$\rho = \frac{\sum_x p \omega_{m-1}(x) \omega_{m-1}(x)}{\omega'_m(\xi) \omega_{m-1}(\xi)}. \quad (10)$$

Если совокупность чисел x со своими положительными числами p изменяется, но суммы

$$S_0 = \sum_x p, \quad S_1 = \sum_x px, \quad \dots, \quad S_{2m-1} = \sum_x px^{2m-1} \quad (11)$$

сохраняют неизменные величины, то функции

$$\omega_m(z) \text{ и } \psi_m(z)$$

остаются также неизменными и вместе с тем, конечно, сохраняют свои значения связанные с ними числа ξ и ρ .

Если же с изменением чисел x и p изменяются и суммы (11), то мы можем все-таки утверждать, что при достаточ-

но малом изменении этих сумм функции

$$\omega_m(z) \text{ и } \psi_m(z),$$

определяемые уравнением (1) и формулой (3), не перестанут существовать и все корни уравнения

$$\omega_m(z) = 0$$

останутся вещественными [8] и различными, равно как останутся вещественными и числа ρ , определяемые формулой (4) или равносильною ей формулою (10).

Согласно вышесказанному, эти числа ξ и ρ должны быть непрерывными функциями сумм

$$\sum_x p, \sum_x px, \dots, \sum_x px^{2m-1}.$$

§ 55. Сохраняя предположение, что числа

$$S_0, S_1, S_2, \dots, S_{2m-1}$$

задаются формулой

$$S_k = \sum_x px^k,$$

и рассматривая только такие совокупности вещественных чисел x и положительных чисел p , для которых существуют наши функции

$$\omega_m(z) \text{ и } \psi_m(z),$$

и уравнение

$$\omega_m(z) = 0$$

не имеет ни мнимых, ни кратных корней, мы установим замечательные неравенства, на которые впервые было обращено внимание Чебышевым в краткой заметке „Sur les valeurs limites des intégrales“, помещенной в журнале Лиувилля за 1874 г.

Эти неравенства мы представим в немного измененном виде; что же касается их доказательства, то оно впервые было дано в статье* моей „Доказательства некоторых неравенств П. Л. Чебышева“, откуда мы его и возьмем.

Неравенства Чебышева. Пусть α будет какое-нибудь вещественное число, а ξ' и ξ'' — два ближайших к нему корня уравнения

$$\omega_m(z) = 0,$$

так что

$$\xi' \leq \alpha \leq \xi''.$$

Если

$$\sum_{x < \alpha} p, \quad \sum_{x \leq \alpha} p, \quad \sum_{\xi < \xi'} p, \quad \sum_{\xi \leq \xi''} p$$

означают, соответственно, суммы всех значений p

$$\text{для } x < \alpha \text{ и для } x \leq \alpha$$

и суммы всех значений p

$$\text{для } \xi < \xi' \text{ и для } \xi \leq \xi'',$$

то должно быть

$$\sum_{x < \alpha} p \geq \sum_{\xi < \xi'} p \quad \text{и} \quad \sum_{x \leq \alpha} p \leq \sum_{\xi \leq \xi''} p. \quad (12)$$

Примечание. Если α не превосходит наименьшего из корней уравнения

$$\omega_m(z) = 0,$$

то первое из неравенств (12) надо заменить очевидным

$$\sum_{x < \alpha} p \geq 0.$$

Подобным же образом, если α не меньше наибольшего из корней уравнения

$$\omega_m(z) = 0,$$

* Сообщения Харьковск. матем. общ., 1883.

то второе из неравенств (12) следует заменить также очевидным^[9]

$$\sum_{x \leq \alpha} p \leq \sum_{\xi} p = \sum_x p.$$

Доказательство. Остановливаясь на доказательстве первого неравенства, образуем целую функцию $\Omega(z)$, $2m-2$ -й степени, согласно условиям:

- 1) $\Omega(\xi) = 1$ при $\xi < \xi'$,
- 2) $\Omega(\xi) = 0$ при $\xi \geq \xi'$,
- 3) $\Omega'(\xi) = 0$ при $\xi \neq \xi'$,

где ξ означает, подобно прежнему, все корни уравнения

$$\omega_m(z) = 0.$$

Для этой цели полагаем

$$\Omega(z) = \Omega_0(z) + \omega_m(z) \Omega_1(z),$$

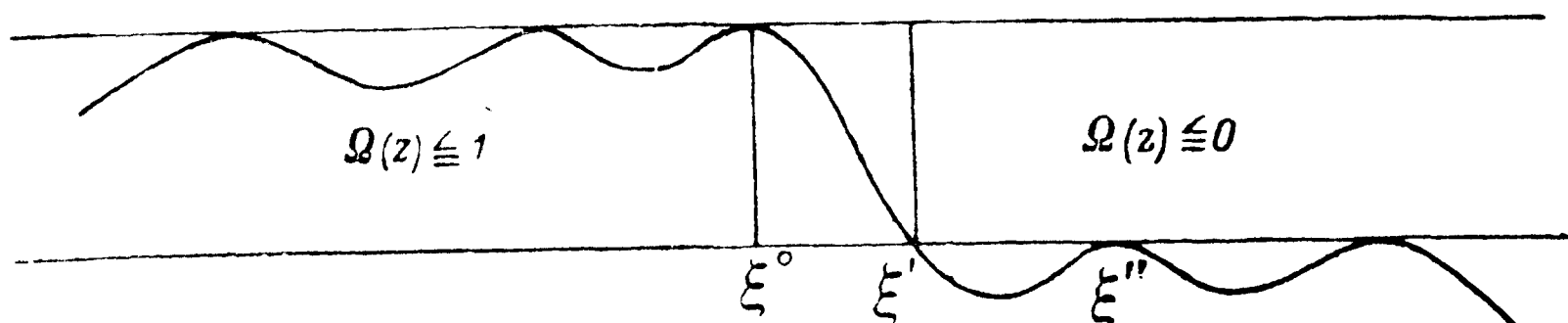
а целые функции $\Omega_0(z)$, $m-1$ -й степени, и $\Omega_1(z)$, $m-2$ -й степени, составляем, по известной формуле Лагранжа, согласно определяющим их условиям

$$\begin{aligned} \Omega_0(\xi) &= 1 \quad \text{при} \quad \xi < \xi', \\ \Omega_0(\xi) &= 0 \quad \text{при} \quad \xi \geq \xi', \\ \omega'_m(\xi) \Omega_1(\xi) &= -\Omega_0(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \neq \xi'. \end{aligned}$$

Установив существование нужной для нас функции $\Omega(z)$, замечаем, что ее производная $\Omega'(z)$ обращается в нуль $m-1$ раз при всех корнях уравнения

$$\omega_m(z) = 0,$$

за исключением ξ' , и еще $m-2$ раза во всех промежутках между смежными корнями этого уравнения, за исключением промежутка от ξ' до смежного корня, меньшего ξ' . Этот смежный с ξ' корень на нашем схематическом чертеже, показывающем ход функции $\Omega(z)$, обозначен символом ξ^0 .



А так как степень $\Omega'(z)$ равна $2m-3$, то указанными нами исчерпываются все корни уравнения

$$\Omega'(z) = 0.$$

Отсюда следует, что в промежутке от $z = \xi^0$ до $z = \xi'$ постоянно должно быть

$$\Omega'(z) < 0.$$

И затем, согласно приведенному схематическому чертежу, мы легко убеждаемся^[10] в верности неравенства

$$\Omega(z) \leq 1 \quad \text{при} \quad z < \xi'$$

и неравенства

$$\Omega(z) \leq 0 \quad \text{при} \quad z > \xi';$$

следовательно,

$$\sum_x p\Omega(x) \leq \sum_{x < \xi'} p \leq \sum_{x < \alpha} p.$$

С другой стороны, имеем

$$\sum_x p\Omega(x) = \sum_{\xi} p\Omega(\xi)$$

и

$$\sum_{\xi} p\Omega(\xi) = \sum_{\xi < \xi'} p,$$

в силу условий, определяющих функцию $\Omega(z)$, и общего равенства (5).

Остается сопоставить последние равенства с только что установленным неравенством

$$\sum_x p\Omega(x) \leq \sum_{x \leq \alpha} p,$$

и мы тотчас придем к первому из неравенств (12)

$$\sum_{x \leq \alpha} p \geq \sum_{\xi \leq \xi'} p.$$

Подобным же образом нетрудно доказать и второе неравенство. Надо только немного изменить условия, определяющие вспомогательную функцию $\Omega(z)$, а именно, теперь следует положить

- 1) $\Omega(\xi) = 1$ при $\xi \leq \xi''$,
- 2) $\Omega(\xi) = 0$ при $\xi > \xi''$,
- 3) $\Omega'(\xi) = 0$ при $\xi \neq \xi''$.

Для определенной такими равенствами целой функции $\Omega(z)$, $2m-2$ -й степени, имеем

$$\sum_x p\Omega(x) \geq \sum_{x \leq \xi''} p \geq \sum_{x \leq \alpha} p$$

и вместе с тем

$$\sum_x p\Omega(x) = \sum_{\xi} p\Omega(\xi) = \sum_{\xi \leq \xi''} p,$$

откуда тотчас вытекает второе неравенство

$$\sum_{x \leq \alpha} p \leq \sum_{\xi \leq \xi''} p.$$

§ 56. Займемся теперь применением наших общих выводов к замечательному ряду и соответствующей ему непре-

рывной дроби; мы придем таким образом к предложению, которое служит основанием для доказательства теоремы о пределе вероятности, по способу Чебышева. Предварительно, однако, сделаем еще общее замечание о возможности заменить суммы

$$\sum_x p, \quad \sum_x px, \quad \sum_x px^2, \quad \dots$$

интегралами

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b f(x) x dx, \quad \int_a^b x^2 f(x) dx, \quad \dots,$$

где a и b означают любые вещественные числа, или $-\infty$ и $+\infty$, а вещественная функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$f(x) \geq 0.$$

Нетрудно понять, что такая замена сумм интегралами не нарушает ни наших формул, ни наших заключений, если только интегралы имеют смысл^[11].

Установив это, мы возьмем ряд

$$S_0 \frac{1}{z} + S_1 \frac{1}{z^2} + S_2 \frac{1}{z^3} + \dots,$$

коэффициенты которого определяются одною формулою

$$S_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^k dx, \quad (13)$$

или, что все равно, совокупностью двух формул

$$S_{2k} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2k} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2}$$

и

$$S_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^{2k+1} dx = 0,$$

где k означает целое положительное число или нуль^[12].

Для такого ряда функции $\omega_m(z)$ определяются формулой

$$\omega_m(z) = \frac{e^{z^2}}{(-2)^m} \cdot \frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m}, \quad (14)$$

ибо из формулы (14) следует:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \theta(x) \omega_m(x) dx = \\ &= \frac{(-1)^m}{2^m \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} dx = \frac{1}{2^m \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^m \theta(x)}{dx^m} dx, \end{aligned}$$

какова бы ни была целая функция $\theta(z)$, и потому

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \theta(x) \omega_m(x) dx = 0,$$

коль скоро степень целой функции $\theta(z)$ меньше m .

Отсюда вытекает также важное для нас равенство

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \omega_m(x) \omega_m(x) dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m}{2^m},$$

в силу которого формула (10) приводится в данном случае к такой:

$$\rho = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m-1)}{2^{m-1} \omega'_m(\xi) \omega_{m-1}(\xi)}.$$

С другой стороны, из формулы (14) нетрудно вывести ряд простых соотношений

$$\begin{aligned}
 \omega'_m(z) &= \frac{2ze^{z^2}}{(-2)^m} \cdot \frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m} + \frac{e^{z^2}}{(-2)^m} \cdot \frac{d^m (-2ze^{-z^2})}{dz^m} = \\
 &= \frac{me^{z^2}}{(-2)^{m-1}} \cdot \frac{d^{m-1} e^{-z^2}}{dz^{m-1}} = m\omega_{m-1}(z), \\
 \omega_m(z) &= \frac{e^{z^2}}{(-2)^m} \cdot \frac{d^{m-1} (-2ze^{-z^2})}{dz^{m-1}} = \\
 &= \frac{ze^{z^2}}{(-2)^{m-1}} \cdot \frac{d^{m-1} e^{-z^2}}{dz^{m-1}} - \frac{(m-1)e^{z^2}}{2(-2)^{m-2}} \cdot \frac{d^{m-2} e^{-z^2}}{dz^{m-2}} = \\
 &= z\omega_{m-1}(z) - \frac{m-1}{2} \omega_{m-2}(z) = \\
 &= \frac{z}{m} \omega'_m(z) - \frac{1}{2m} \omega''_m(z).
 \end{aligned}$$

Равенством

$$\omega'_m(z) = m\omega_{m-1}(z)$$

мы воспользуемся, прежде всего, для преобразования вышеприведенного выражения ρ к следующему виду

$$\rho = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}{2^{m-1} \omega'_m(\xi) \omega'_m(\xi)}. \quad (15)$$

Последнее выражение ρ послужит нам для вывода замечательно простого неравенства, из которого вытекает важное для нас предложение:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho = 0.$$

Это неравенство и его вывод мы заимствуем из статьи академика Н. Я. Сонины „О точности определения предель-

ных величин интегралов^{*,*} не передавая, однако, буквально ее содержания.

Начнем с того, что заменим квадрат

$$\omega'_m(\xi) \omega'_m(\xi),$$

входящий в знаменатель рассматриваемого выражения ρ равною ему суммою

$$\omega'_m(\xi) \omega'_m(\xi) + B \omega_m(\xi) \omega_m(\xi),$$

подбирая вспомогательный коэффициент B так, чтобы производная по z целой функции

$$\omega'_m(z) \omega'_m(z) + B \omega_m(z) \omega_m(z)$$

делилась на квадрат

$$\omega'_m(z) \omega'_m(z).$$

На первую степень $\omega'_m(z)$ производная составленной нами целой функции, равная

$$2\omega'_m(z) \{\omega''_m(z) + B\omega_m(z)\},$$

делится при всяком B ; на квадрат же

$$\omega'_m(z) \omega'_m(z)$$

она будет делиться при

$$B = 2m,$$

ибо, согласно вышеприведенному соотношению между

$$\omega_m(z), \omega'_m(z) \text{ и } \omega''_m(z),$$

имеем

$$\omega''_m(z) + 2m\omega(z) = 2z\omega'_m(z).$$

* Зап. Акад. Наук. т. LXIX, кн. I, 1892.

Мы приходим таким образом к равенству

$$\{\omega'_m(z)\omega'_m(z) + 2m\omega_m(z)\omega_m(z)\}' = 4z\omega'_m(z)\omega'_m(z),$$

которое показывает, что сумма

$$\omega'_m(z)\omega'_m(z) + 2m\omega_m(z)\omega_m(z)$$

достигает своего наименьшего значения при $z=0$.

Отсюда тотчас выводим неравенство

$$\rho < \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}{2^{m-1} \{\omega'_m(0)\omega'_m(0) + 2m\omega_m(0)\omega_m(0)\}},$$

разбором и упрощением которого мы займемся.

Для этого обращаемся к равенствам

$$\omega_1(z) = z, \quad \omega_2(z) = z^2 - \frac{1}{2},$$

$$\omega_m(z) = z\omega_{m-1}(z) - \frac{m-1}{2}\omega_{m-2}(z),$$

которые могут служить для определения всех функций $\omega_m(z)$, и принимаем во внимание формулу

$$\omega'_m(z) = m\omega_{m-1}(z).$$

Мы видим, что при m четном $\omega'_m(0)$ приводится к нулю вместе с $\omega_{m-1}(0)$, значение же $\omega_m(0)$ определяется из ряда последовательных равенств

$$\omega_2(0) = -\frac{1}{2},$$

$$\omega_4(0) = -\frac{3}{2}\omega_2(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2},$$

$$\omega_6(0) = -\frac{5}{2}\omega_4(0) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2},$$

.

и оказывается равным

$$(-1)^{\frac{m}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (m-1)}{2^{\frac{m}{2}}}.$$

Напротив, при m нечетном

$$\omega_m(0) = 0$$

и

$$\omega'_m(0) = m\omega_{m-1}(0) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (m-2) m}{2^{\frac{m-1}{2}}}.$$

Следовательно, при m четном имеем

$$\rho < \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (m-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (m-1)},$$

а при m нечетном

$$\rho < \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (m-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots m};$$

другими словами, при

$$m = 2l + 1 \quad \text{и} \quad m = 2l + 2,$$

где l — любое целое положительное число, имеем

$$\rho < \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2l}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2l+1)}.$$

Чтобы прийти к еще более простому неравенству, замечаем, что квадрат выражения

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2l}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2l+1)}$$

можно представить в виде произведения дроби $\frac{1}{2l+1}$ на известное выражение

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2l}{2l-1} \cdot \frac{2l}{2l+1},$$

которое, при возрастании l , постоянно возрастает и, согласно формуле Валлиса, стремится к пределу $\frac{\pi}{2}$, когда l возрастает беспредельно. Это выражение, конечно, меньше своего предела. Из нашего замечания вытекает, таким образом, неравенство

$$\rho^2 < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2l+1},$$

или, что все равно,

$$\rho < \sqrt{\frac{\pi}{4l+2}}, \quad (16)$$

при

$$m = 2l + 1 \quad \text{и} \quad m = 2l + 2.$$

Немного усложняя вывод, мы могли бы заменить $4l + 2$ числом $4l + 3$, которое указано Н. Я. Сониным, но для наших заключений такая замена не имеет значения.

§ 57. Теперь уже нетрудно установить вышеупомянутое предложение, которое составляет главную цель этой статьи.

Т е о р е м а.* Если совокупность вещественных чисел x , со своими положительными числами p , изменяется так, что суммы

$$\sum_x p, \quad \sum_x px, \quad \sum_x px^2, \quad \sum_x px^3, \dots$$

* A. Markoff. Sur les racines de l'équation $e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$. (Bull. de l'Acad. de St.-Petersbourg, 1898 [13]).

приближаются, соответственно, к пределам

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x dx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^2 dx, \dots,$$

то для любого данного числа α обе суммы

$$\sum_{x < \alpha} p \quad \text{и} \quad \sum_{x \leq \alpha} p$$

приближаются к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2} dx.$$

Доказательство. Положим для наглядности, что последовательность изменений x и p определяется целым числом n , возрастающим беспредельно. При помощи этого вспомогательного числа мы можем выразить основное условие теоремы так: для любого данного положительного числа λ и для сколь угодно малого неизменного положительного числа λ должно быть такое число ν , что неравенства

$$-\lambda < \sum_x p x^k - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^k dx < \lambda$$

обязательно имеют место

$$\text{при } k = 0, 1, 2, \dots, i \quad \text{и} \quad n > \nu.$$

Нам надо доказать, что при таком условии численные значения обеих разностей

$$\sum_{x < \alpha} p - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2} dx \quad \text{и} \quad \sum_{x \leq \alpha} p - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2} dx$$

будут меньше любого данного положительного числа ε , при всех достаточно больших значениях n .

Для этой цели разбиваем число ε на два слагаемых, также положительных и определенных:

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon'', \quad \varepsilon' > 0, \quad \varepsilon'' > 0,$$

например:

$$\varepsilon' = \varepsilon'' = \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Затем берем целое число l настолько большим, чтобы было

$$\sqrt{\frac{\pi}{4l+2}} < \frac{\varepsilon'}{2}$$

и полагаем

$$m = 2l + 1 \quad \text{или} \quad 2l + 2.$$

Дальнейшие наши рассуждения, в которых l и m будут предполагаться неизменными, можно провести как при $m = 2l + 1$, так и при $m = 2l + 2$. Этою двойственностью числа m мы воспользуемся, чтобы для упрощения рассуждений устранить из рассмотрения случаи, когда уравнение

$$e^{z^2} \frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m} = 0$$

допускает корень

$$z = \alpha.$$

Возможность устранения таких случаев вытекает из того, что уравнение

$$e^{z^2} \frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m} = 0$$

не может допускать одинаковых корней при двух смежных значениях m :

$$\text{при } m = 2l + 1 \text{ и при } m = 2l + 2.$$

Итак, приравнивая m одному из двух чисел

$$2l + 1 \quad \text{и} \quad 2l + 2,$$

мы будем предполагать, что ни один из корней уравнения

$$e^{z^2} \frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m} = 0,$$

которые мы обозначим символом ξ , не совпадает с α .

Сохраняя установленные ранее обозначения

$$\omega_m(z), \xi, \rho$$

для переменной совокупности чисел x и p , мы для только что рассмотренного специального случая, который сейчас будет играть роль предельного, заменяем эти обозначения такими:

$$\bar{\omega}_m(z), \bar{\xi}, \bar{\rho}.$$

Соответственно этому и неравенство (16) мы заменим следующим:

$$\bar{\rho} < \sqrt{\frac{\pi}{4l+2}},$$

откуда выводим

$$\bar{\rho} < \frac{\varepsilon'}{2},$$

для всех рассматриваемых нами величин $\bar{\rho}$.

Пусть, далее,

$$\bar{\xi}' \text{ и } \bar{\xi}''$$

будут два смежных корня уравнения

$$\bar{\omega}_m(z) = 0,$$

т. е. уравнения

$$e^{z^2} \frac{d^m e^{-z^2}}{dz^m} = 0,$$

между которыми лежит число α , так что

$$\bar{\xi}' < \alpha < \bar{\xi}''.$$

Применяя к нашему специальному случаю неравенства Чебышева (12), находим

$$\sum_{\bar{\xi} < \bar{\xi}'} \bar{\rho} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2} dx < \sum_{\bar{\xi} \leq \bar{\xi}''} \bar{\rho}$$

и отсюда выводим неравенства

$$\sum_{\bar{\xi} < \bar{\xi}'} \bar{\rho} > \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2} dx - \epsilon'$$

и

$$\sum_{\bar{\xi} \leq \bar{\xi}''} \bar{\rho} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2} dx + \epsilon',$$

принимая во внимание, что разность

$$\sum_{\bar{\xi} \leq \bar{\xi}''} \bar{\rho} - \sum_{\bar{\xi} < \bar{\xi}'} \bar{\rho}$$

равна сумме двух значений $\bar{\rho}$, соответствующих

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}' \quad \text{и} \quad \bar{\xi} = \bar{\xi}''.$$

С другой стороны, в силу указанной нами непрерывности корней уравнения

$$\omega_m(z) = 0$$

и соответствующих им количеств ρ , можем утверждать, что коль скоро числовые величины разностей

$$\sum_x \rho x^k - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^k dx$$

при

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots, 2m - 1$$

все будут меньше некоторого достаточно малого числа λ , будут иметь место следующие обстоятельства:

1) ни одно из чисел ξ , т. е. ни один из корней уравнения

$$\omega_m(z) = 0,$$

не будет совпадать с числом α , так что среди них найдутся два смежных числа

$$\xi', \xi'',$$

удовлетворяющие неравенствам

$$\xi' < \alpha < \xi'';$$

2) числовые величины обеих разностей

$$\sum_{\xi < \xi'} \rho - \sum_{\bar{\xi} < \bar{\xi}'} \bar{\rho} \quad \text{и} \quad \sum_{\xi \leq \xi''} \rho - \sum_{\bar{\xi} \leq \bar{\xi}''} \bar{\rho}$$

будут меньше данного числа ε'' .

Пусть λ настолько мало, что указанные обстоятельства имеют место, коль скоро выполняются неравенства

$$-\lambda < \sum \rho x^k - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^k dx < \lambda$$

при

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots, 2m - 1.$$

Предполагая введенные нами числа

$$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', l, m, \lambda$$

неизменными, будем увеличивать число n .

Согласно основному условию теоремы, при достаточно больших значениях n , т. е. при всех n , превосходящих неко-

торое определенное число ν , только что приведенные неравенства обязательно будут выполняться.

И для всех этих значений n обе суммы

$$\sum_{x < a} p \quad \text{и} \quad \sum_{x \leq a} p$$

будут отличаться от

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-x^2} dx$$

менее чем на ε .

В самом деле, в силу неравенств Чебышева (12), имеем

$$\sum_{\xi < \xi'} p \leq \sum_{x < a} p \leq \sum_{x \leq a} p \leq \sum_{\xi \leq \xi''} p.$$

Вместе с тем, при

$$n > \nu$$

должно быть

$$\sum_{\xi < \xi'} p > \sum_{\bar{\xi} < \bar{\xi}'} \bar{p} - \varepsilon''$$

и

$$\sum_{\xi \leq \xi''} p < \sum_{\bar{\xi} \leq \bar{\xi}''} \bar{p} + \varepsilon''.$$

Присоединяя же к этим неравенствам установленные раньше

$$\sum_{\bar{\xi} < \bar{\xi}'} \bar{p} > \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-x^2} dx - \varepsilon'$$

и

$$\sum_{\bar{\xi} \leq \bar{\xi}''} \bar{p} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-x^2} dx + \varepsilon',$$

легко убеждаемся, что обе суммы

$$\sum_{\xi < \xi'} \rho \quad \text{и} \quad \sum_{\xi \leq \xi''} \rho,$$

при $n > \nu$, разнятся от

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2} dx$$

менее чем на

$$\varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon.$$

А отсюда тотчас следует, что и обе суммы

$$\sum_{x < \alpha} p \quad \text{и} \quad \sum_{x \leq \alpha} p,$$

лежащие между

$$\sum_{\xi < \xi'} \rho \quad \text{и} \quad \sum_{\xi \leq \xi''} \rho,$$

при выполнении указанных условий, т. е. при всех достаточно больших значениях n , будут разниться от

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2} dx$$

менее чем на ε .

Теорема наша, таким образом, доказана. А из нее вытекает следствие, которым мы будем пользоваться.

Следствие. Каковы бы ни были данные числа t_1 и t_2 , второе из которых больше первого, при соблюдении условий вышеприведенной теоремы, четыре суммы

$$\sum_{t_1 < x < t_2} p, \quad \sum_{t_1 \leq x < t_2} p, \quad \sum_{t_1 < x \leq t_2} p, \quad \sum_{t_1 \leq x \leq t_2} p,$$

распространенные на все значения x , которые удовлетворяют неравенствам

$$t_1 < x < t_2,$$

с присоединением или без присоединения значений

$$x = t_1 \quad \text{и} \quad x = t_2$$

стремятся к одному пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2} dx.$$

Рассматривая, наконец, положительные числа p как вероятности соответствующих значений x , мы можем представить это следствие в виде теоремы, относящейся к исчислению вероятностей.

Предельная теорема Чебышева.* Если совокупность всех возможных значений некоторой вещественной величины x , вместе с их вероятностями, изменяется так, что для всякого данного целого положительного числа m , не исключая нуля, математическое ожидание x^m стремится к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^m dx,$$

* Мы соединяем с этой теоремой имя Чебышева, хотя он рассматривал только неизменные совокупности x , p , точно удовлетворяющие условию

$$\text{м. о. } x^m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2} dx.$$

то вероятность выполнения неравенства

$$t_1 < x < t_2,$$

с присоединением или без присоединения крайних значений

$$x = t_1 \quad \text{и} \quad x = t_2,$$

должна стремиться к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt,$$

каковы бы ни были данные числа t_1 и $t_2 > t_1$.

Если сопоставить эту теорему с доказанной в главе III (§ 21)^[14] теоремой о математических ожиданиях, то получится теорема о пределе вероятности, при тех предположениях, которые были приняты в теореме главы III. Но мы на этом не остановимся, так как предложение, которое мы могли бы сейчас установить, представляет только частный случай того, которое будет предметом следующей статьи^[15].

§ 58. Желая придать нашему доказательству возможно большую простоту и ясность, мы воспользовались замечательным неравенством Сони́на, которое основано на особых свойствах функции $e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$, что лишает нас возможности распространить наши выводы на другие случаи, с которыми нам придется встретиться. К счастью, оно играет у нас только вспомогательную роль: мы воспользовались им для доказательства, что при беспредельном увеличении значка m функции $\bar{\omega}_m(x)$ разность

$$\sum_{\xi \leq \xi''} \bar{\rho} - \sum_{\xi \leq \xi'} \bar{\rho}$$

становится бесконечно малою. Но того же можно достигнуть иным путем, не пользуясь неравенством Сони́на.

Пересматривая наши выводы, нетрудно прийти к такому общему предложению:

Пусть совокупность вещественных чисел x со своими положительными числами p изменяется так, что суммы

$$\sum_x p, \quad \sum_x px, \quad \sum_x px^2, \quad \sum_x px^3, \dots$$

приближаются, соответственно, к пределам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx, \dots$$

или при соблюдении относительно x неравенств $a < x < b$, к пределам

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b xf(x) dx, \quad \int_a^b x^2 f(x) dx, \dots$$

Пусть при этом функция $f(x)$ непрерывна и не получает отрицательных значений.

Пусть далее

$$\frac{\psi_m(x)}{\omega_m(x)} = \frac{a}{x + b_1} - \frac{a^2}{x + b_2} \dots - \frac{a_m}{x + b_m}$$

обозначает m -ую подходящую дробь в формульном разложении в непрерывную дробь интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y) dy}{x - y} \quad \text{или} \quad \int_a^b \frac{f(y)}{x - y} dy.$$

Положим, что в соответствии с произвольным промежутком, где $f(x)$ не остается постоянно нулем, существует число m_0 такое, что при $m \geq m_0$ уравнение $\omega_m(x) = 0$ имеет корни в этом промежутке. Тогда для любого данного числа α обе суммы

$$\sum_{x < \alpha} p \quad \text{и} \quad \sum_{x \leq \alpha} p$$

приближаются к пределу

$$\int_{-\infty}^{\alpha} f(x) dx.$$

Таким образом вопрос о существовании указанного предела для сумм

$$\sum_{x < \alpha} p \quad \text{и} \quad \sum_{x \leq \alpha} p$$

сводится к вопросу о существовании корней уравнения $\omega_m(x) = 0$ в любом данном промежутке. Этот последний вопрос представляет затруднения только в случаях, когда оба предела интегралов или один из них бесконечны. Рассуждения, относящиеся к случаю бесконечных пределов, дают решение и для случая конечных пределов a и b , причем в этом случае вопрос решается утвердительно очень просто. Останавливаясь на случаях, когда оба предела интегралов бесконечны, и обозначая буквою g наибольшее из численных значений корней уравнения $\omega_m(x) = 0$, мы докажем такое предложение:

Если при беспредельном возрастании значка m отношение $\frac{g}{m}$ стремится к пределу 0, то между любыми данными числами c и d должны быть корни уравнения $\omega_m(x) = 0$,

при всех достаточно больших значениях m , или интеграл

$$\int_c^d f(x) dx$$

должен приводиться к нулю.

Для доказательства вводим новое переменное число $t = (x - c)(d - x)$ и его целую функцию.

$$\Omega(t) = \left\{ \cos \mu \arccos \frac{2t + h}{h} \right\}^2$$

при $h = (g + |c|)(g + |d|)$, где символы $|c|$ и $|d|$ означают абсолютные значения c и d , и при μ , равном целой части числа $\frac{m-1}{2}$. Степень целой функции $\Omega(t)$ относительно x равна 4μ и потому не превосходит $2m - 2$, в силу чего, согласно доказанному выше, можем установить равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Omega(x) dx = \sum A_i \Omega(\xi_i) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m),$$

где ξ_i означает все корни уравнения $\omega_m(x) = 0$ и

$$A_i = \frac{\psi_m(\xi_i)}{\omega'_m(\xi_i)}.$$

С другой стороны, не трудно убедиться, что для всех значений x , лежащих в промежутках от $-g$ до c и от d до g , со включением пределов $\mp g$, функция $\Omega(t)$, оставаясь числом положительным, не превосходит единицы; ибо при таких значениях x имеем

$$t = (x - c)(d - x) < 0, \quad -t < h, \quad \frac{2t + h}{h} < 1, \quad \frac{2t + h}{h} > -1.$$

А для значений x , лежащих между c и ∂ , получаем

$$\Omega(t) = \left\{ \frac{\left(\frac{2t+h}{h} + \sqrt{\left(\frac{2t+h}{h} \right)^2 - 1} \right)^\mu + \left(\frac{2t+h}{h} - \sqrt{\left(\frac{2t+h}{h} \right)^2 - 1} \right)^\mu}{2} \right\}^2,$$

$$t > 0, \quad \frac{2t+h}{h} \geq 1, \quad \sqrt{\left(\frac{2t+h}{h} \right)^2 - 1} > 2\sqrt{\frac{t}{h}}$$

и затем

$$\begin{aligned} \Omega(t) &> \left\{ \frac{\left(1 + 2\sqrt{\frac{t}{h}} \right)^\mu + \left(1 - 2\sqrt{\frac{t}{h}} \right)^\mu}{2} \right\}^2 > \\ &> \left(1 + 2\mu(\mu-1)\frac{t}{h} \right)^2 > 4\mu(\mu-1)\frac{t}{h}. \end{aligned}$$

Следовательно, если допустим, что между c и ∂ нет ни одного корня уравнения, то придем к таким неравенствам^[16]:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Omega(t) dx &> \int_c^\partial f(x) \Omega(t) dx > \\ &> \frac{4\mu(\mu-1)}{(g+|c|)(g+|\partial|)} \int_c^\partial (x-c)(\partial-x) f(x) dx \end{aligned}$$

и

$$\sum A_i \Omega(\xi_i) < \sum A = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx,$$

откуда вытекает следующее неравенство:

$$\int_c^\partial (x-c)(\partial-x) f(x) dx < \frac{(g+|c|)(g+|\partial|)}{4\mu(\mu-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx,$$

правая часть которого, при беспредельном возрастании m , должна стремиться к пределу 0 в силу условия

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{g}{m} = 0.$$

Итак, при соблюдении указанного условия при достаточно больших значениях m в промежутке от c до d должны быть корни уравнения $\omega_m(x) = 0$ или интеграл

$$\int_c^d (x - c)(d - x) f(x) dx$$

должен равняться нулю, что равносильно равенству

$$\int_c^d f(x) dx = 0.$$

Имея в виду вопросы исчисления вероятностей, остановимся на тесно связанных разложениях в непрерывные дроби интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2} |y|^\gamma dy}{x - y} \quad (\gamma + 1 > 0) \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \frac{e^{-y} y^\delta dy}{z - y} \quad (\delta + 1 > 0),$$

где $|y|$ означает абсолютное значение y , при $\delta = \frac{1}{2}(\gamma - 1)$ второй из них сводится к первому подстановкой x^2 на место z и y^2 на место y :

$$\begin{aligned} x \int_0^\infty \frac{e^{-y} y^\delta dy}{z - y} &= 2x \int_0^\infty \frac{e^{-y^2} y^{2\delta+1} dy}{x^2 - y^2} = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} \right\} e^{-y^2} y^\gamma dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2} |y|^\gamma dy}{x - y}, \end{aligned}$$

$$\text{при } z = x^2 \text{ и } \delta = \frac{1}{2}(\gamma - 1).$$

Нам важны только знаменатели подходящих дробей; обозначая их символами $\omega_m(x)$ и $\omega^{(m)}(z)$, мы для определения этих целых функций степени m от x и от z получаем такие общие уравнения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} |y|^\gamma \omega_m(y) \varphi(y) dy = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\delta} \omega^{(m)}(y) \varphi(y) dy = 0,$$

где $\varphi(y)$ — произвольная целая функция от y степени $m-1$.

Ввиду четности функции $e^{-y^2} |y|^\gamma$, относительно функции $\omega_m(x)$ не трудно заключить, что она должна быть четною при m четном и нечетною при m нечетном. Что же касается функции $\omega^{(m)}(z)$, то для нее нетрудно установить довольно простую формулу

$$\omega^{(m)}(z) = e^z z^{-\delta} \frac{d^m (e^{-z} z^{\delta+m})}{dz^m},$$

как доказывает следующее равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{d^m (e^{-y} y^{\delta+m})}{dy^m} \varphi(y) dy = \pm \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\delta+m} \frac{d^m \varphi(y)}{dy^m} dy.$$

Вместе с тем нетрудно убедиться, что при $z = x^2$ функция $\omega^{(m)}(z)$ совпадает с $\omega_{2m}(x)$; ибо для любой целой функции $\varphi(z)$ степени $m-1$ имеем

$$0 = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\delta} \omega^{(m)}(y) \varphi(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} |y|^{2\delta+1} \omega^{(m)}(y^2) \varphi(y^2) dy,$$

и для любой нечетной целой функции $\varphi(x)$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} |y|^{2\delta+1} \omega^{(m)}(y^2) \varphi(y) dy$$

также равен нулю.

Наконец, для получения $\omega_{2m+1}(x)$ достаточно в выражении

$$(-1)^m e^z z^{-\delta-\frac{1}{2}} \frac{d^m e^{-z} z^{\delta+m+1}}{dz^m},$$

равном произведению $\sqrt{z}$ на некоторую целую функцию $\theta_m(z)$ от z степени m , заменить z на x^2 . В самом деле, $x\theta_m(x^2)$ представляет нечетную целую функцию от x степени $2m+1$, в силу чего интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} |y|^{2\delta+1} y \theta_m(y^2) \varphi(y) dy$$

приводится к нулю для всякой четной целой функции $\varphi(y)$ и для всякой нечетной целой функции $\varphi(y)$, степень которой не превосходит $2m-1$; имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} |y|^{2\delta+1} y \theta_m(y^2) \varphi(y) dy &= \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{\delta} y \theta_m(y) \frac{\varphi(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} dy = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d^m (e^{-y} y^{\delta+m+1})}{dy^m} \cdot \frac{\varphi(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} dy = \\ &= \pm \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\delta+m+1} \frac{d^m}{dy^m} \cdot \frac{\varphi(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} dy = 0. \end{aligned}$$

Таким образом мы приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned} \omega_{2m}(x) &= (-1)^m e^z z^{-\delta} \frac{d^m e^{-z} z^{\delta+m}}{dz^m} = \\ &= x^{2m} - \frac{m(m+\delta)}{1} x^{2m-2} + \frac{m(m-1)(m+\delta)(m+\delta-1)}{1 \cdot 2} x^{2m-4} - \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{2m+1}(x) &= (-1)^m e^z z^{-\delta - \frac{1}{2}} \frac{d^m e^{-z} z^{\delta+m+1}}{dz^m} = \\
&= x^{2m+1} - \frac{m(m+\delta+1)}{1} x^{2m-1} + \\
&+ \frac{m(m-1)(m+\delta+1)(m+\delta)}{1 \cdot 2} x^{2m-3} - \dots \\
\omega_{2m+2}(x) &= (-1)^{m+1} e^z z^{-\delta} \frac{d^{m+1} e^{-z} z^{\delta+m+1}}{dz^{m+1}} = \\
&= x^{2m+2} - \frac{(m+1)(m+\delta+1)}{1} x^{2m} + \dots
\end{aligned}$$

при $z = x^2$; откуда посредством вычитания выводим

$$\begin{aligned}
\omega_{2m+2}(x) &= x\omega_{2m+1}(x) - (m+\delta+1)\omega_{2m}(x), \\
\omega_{2m+1}(x) &= x\omega_{2m}(x) - m\omega_{2m-1}(x),
\end{aligned}$$

и затем последовательным делением приходим к ряду дробей

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)} &= x - \frac{\delta+1}{x}, \quad \frac{\omega_3(x)}{\omega_2(x)} = x - \frac{1}{\omega_2(x) : \omega_1(x)}, \dots \\
\frac{\omega_{2m+1}(x)}{\omega_{2m}(x)} &= x - \frac{m}{\omega_{2m}(x) : \omega_{2m-1}(x)}, \\
\frac{\omega_{2m+2}(x)}{\omega_{2m+1}(x)} &= x - \frac{m+\delta+1}{\omega_{2m+1}(x) : \omega_{2m}(x)}, \dots
\end{aligned}$$

Желая установить высший предел числовых значений корней уравнений

$$\omega_2(x) = 0, \quad \omega_3(x) = 0, \dots, \quad \omega_{2m+1}(x) = 0, \quad \omega_{2m+2}(x) = 0, \dots,$$

мы можем ограничиться положительными значениями x ; ибо

$$\omega_{2m+1}(x) = -\omega_{2m+1}(-x), \quad \omega_{2m+2}(x) = \omega_{2m+2}(-x).$$

Мы докажем, что отношение $\frac{\omega_{2m}(x)}{\omega_{2m-1}(x)}$, равное

$$x - \frac{m + \delta}{\omega_{2m-1}(x) : \omega_{2m-2}(x)},$$

больше $\frac{1}{2}x$ при всех значениях x , превосходящих $\sqrt{4(m + \delta)}$, и отношение $\frac{\omega_{2m+1}(x)}{\omega_{2m}(x)}$ больше $\frac{1}{2}x$, если превосходит наибольшее из чисел $\sqrt{4m}$ и $\sqrt{4(m + \delta)}$, для чего последовательно будем полагать m равным 1, 2, 3, ...

При $m=1$ получаем

$$\frac{\omega_{2m}(x)}{\omega_{2m-1}(x)} = \frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)} = x - \frac{1 + \delta}{x} > x - \frac{\frac{1}{4}x^2}{x} > \frac{1}{2}x,$$

если $x^2 > 4(1 + \delta)$,

и

$$\frac{\omega_{2m+1}(x)}{\omega_{2m}(x)} = \frac{\omega_3(x)}{\omega_2(x)} = x - \frac{1}{\omega_2(x) : \omega_1(x)} > x - \frac{\frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}x,$$

если $x^2 > 4$ и $4(1 + \delta)$.

Затем остается выяснить последовательный переход от одного значения m к следующему. Допуская, что только что высказанное предложение справедливо для некоторого значения m , получаем

$$\frac{\omega_{2m+2}(x)}{\omega_{2m+1}(x)} = x - \frac{m + \delta + 1}{\omega_{2m+1}(x) : \omega_{2m}(x)} > x - \frac{\frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}x,$$

если $x^2 > 4(m + \delta + 1)$,

и

$$\frac{\omega_{2m+3}(x)}{\omega_{2m+2}(x)} = x - \frac{m + 1}{\omega_{2m+2}(x) : \omega_{2m+1}(x)} > x - \frac{\frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{2}x} > \frac{1}{2}x,$$

если $x^2 > 4(m + \delta + 1)$ и $4(m + 1)$,

и таким образом убеждаемся, что оно остается в силе и при увеличении m на единицу. Следовательно, оно справедливо при всех значениях m [17].

Отсюда следует, что числовая величина корней уравнения $\omega_{2m}(x)=0$ не превосходит $\sqrt{4(m+\delta)}$, а числовая величина корней уравнения $\omega_{2m+1}(x)=0$ не превосходит наибольшего из чисел $\sqrt{4m}$ и $\sqrt{4(m+\delta)}$. А так как оба отношения

$$\frac{\sqrt{4(m+\delta)}}{m} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{4m}}{m}$$

бесконечно малы при бесконечно больших m , то на основании вышеустановленного предложения оба уравнения

$$\omega_{2m}(x)=0 \quad \text{и} \quad \omega_{2m+1}(x)=0,$$

при достаточно больших m , должны иметь корни в любом данном промежутке. Принимая же во внимание, что корни уравнения $\omega^{(m)}(x)=0$ — квадраты корней уравнения $\omega_{2m}(x)=0$, заключаем, что при достаточно больших значениях m они также должны быть в любом данном промежутке. Ввиду доказанного можно предельной теореме придать более общий вид:

Обобщенная предельная теорема. Если совокупность всех возможных значений некоторой вещественной величины x , вместе с их вероятностями, изменяется так, что для всякого данного целого положительного числа m , не исключая нуля, математическое ожидание x^m стремится к пределу

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} |x|^{\gamma} x^m dx,$$

где

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} |x|^\gamma dx = 1,$$

или, если x получает только положительные значения, — к пределу

$$B \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\delta+m} dx,$$

где

$$B \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\delta} dx = 1,$$

то вероятность выполнения неравенства

$$t_1 < x < t_2,$$

с присоединением или без присоединения крайних значений $x=t_1$ и $x=t_2$, должна стремиться соответственно к пределу

$$A \int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2} |x|^\gamma dx$$

в первом случае, или к пределу

$$B \int_{t_1}^{t_2} e^{-x} x^{\delta} dx$$

во втором случае, каковы бы ни были данные числа t_1, t_2 , которые во втором случае должны быть, конечно, положительными.

Л и т е р а т у р а

Stieltjes T. J. Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques. Ann. de l'Ec. nor., 3 sér., I, 1884.

Possé C. Sur quelques applications des fractions continues algébriques. St.-Petersbourg, 1886.

Stieltjes T. J. Recherches sur les fractions continues. Ann. de la Fac. de Toulouse, VII, Paris, 1902.

А. Марков. Исчисление конечных разностей. 2-е изд., 1911.

**ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛЕ ВЕРОЯТНОСТИ
ДЛЯ СЛУЧАЕВ АКАДЕМИКА А. М. ЛЯПУНОВА**

ИЗВЛЕЧЕНИЕ ИЗ КНИГИ „ИСЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ“

§ 59. Приближенное выражение вероятности в виде интеграла, указанное нами в § 20^[1], было известно давно и, по справедливости, должно быть связано с именем Лапласа.

Но теорема, что этот интеграл представляет предел вероятности, была, за исключением случая Бернулли,* впервые высказана и доказана для определенных случаев Чебышевым в мемуаре** „Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités“.

В этом замечательном мемуаре, ясно показавшем значение метода математических ожиданий, оставались некоторые пробелы как в формулировке, так и в доказательстве теоремы; они пополнены мною в статьях „Закон больших чисел и способ наименьших квадратов“*** и „Sur les racines de l'équation $e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$ “.

Таким образом были установлены условия, при соблюдении которых теорема о пределе вероятности, несомненно, должна иметь место; этих условий достаточно для существования теоремы, и они являлись необходимыми, чтобы можно было прийти к ней путем известных простых рассуждений.

* Для этого случая доказательство ее, названное мною доказательством Лапласа, было уже намечено Моавром в „Miscellanea analytica“ (1730).

** Сочинения П. Л. Чебышева, т. II, 481—491 [2].

*** Изв. Физ.-мат. общ. при Казанск. унив., серия вторая, т. VIII, 1898 [3].

Впоследствии академик А. М. Ляпунов поставил себе целью прийти к теореме о пределе вероятности иным путем, дополняя надлежащим образом обычный вывод приближенной формулы, и вместе с тем установить эту теорему для возможно большего числа случаев, что и сделано им в мемуарах* „Sur une proposition de la théorie des probabilités“ и „Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité“.

Общность выводов в последней работе А. М. Ляпунова далеко превзошла ту, которая была достигнута методом математических ожиданий. Достигнуть столь общих выводов методом математических ожиданий казалось даже невозможным, ибо он основан на рассмотрении таких математических ожиданий, в неограниченном числе, существование которых в случаях А. М. Ляпунова не предполагается^[5].

Для восстановления поколебленного таким образом значения метода математических ожиданий необходимо было выяснить, что вышеупомянутыми работами он далеко не исчерпан до конца. Об этой задаче я думал довольно долго, и мне удалось решить ее, можно сказать, в двух направлениях. С одной стороны, я нашел, как надо дополнить метод математических ожиданий, чтобы охватить все случаи А. М. Ляпунова; а, с другой стороны, ряд моих работ показал, что тот же метод дает довольно легкое средство для распространения предельной теоремы на связанные величины. Из последних работ я изложу здесь, в измененном виде, только одну; но сначала мы займемся доказательством предельной теоремы для случаев А. М. Ляпунова.

Пусть будет

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dots, Z_n, \dots$$

— неограниченный ряд независимых величин; пусть, вместе с тем, при всяком k существуют

$$a_k = \text{м. о. } Z_k, \quad b_k = \text{м. о. } (Z_k - a_k)^2$$

* Bull. de l'Acad. des sci. de St.-Petersb., V série, t. XIII. — Mem. de l'Acad. de St.-Petersb., VIII série, t. XI [4].

и

$$b_k^{(2+\delta)} = \text{м. о. } |z_k - a_k|^{2+\delta},$$

где δ — некоторое положительное число, а символ $|V|$ для любого количества V означает абсолютную его величину.

Положим, наконец, что отношение

$$\frac{b_1^{(2+\delta)} + b_2^{(2+\delta)} + \dots + b_n^{(2+\delta)}}{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^{1 + \frac{\delta}{2}}}$$

приближается к пределу нуль, когда n беспрестанно возрастает.

Таковы условия А. М. Ляпунова. Нам надо доказать, что при соблюдении их оправдывается теорема о пределе вероятности: для любых данных чисел t_1 и t_2 , из которых второе больше первого, вероятность неравенства

$$t_1 < \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n - a_1 - a_2 - \dots - a_n}{\sqrt{2(b_1 + b_2 + \dots + b_n)}} < t_2$$

стремится к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt,$$

когда n возрастает беспрестанно.

Для этой цели введем вспомогательное число N , которое будем увеличивать беспрестанно вместе с n , и совокупность всех возможных значений каждой разности

$$Z_k - a_k$$

разобьем на две совокупности, одну из которых пусть составят числа X_k , лежащие между $-N$ и $+N$, а другую — числа Y_k , лежащие вне этих пределов. Предполагая, что

$$Y_k = 0 \text{ при } -N \leq Z_k - a_k \leq +N$$

и

$$X_k = 0 \text{ при } Z_k - a_k < -N \text{ и при } Z_k - a_k > N,$$

мы можем положить

$$Z_k - a_k = X_k + Y_k;$$

вместе с тем нетрудно установить равенства [6]

$$\text{м. о. } (Z_k - a_k) = 0 = \text{м. о. } X_k + \text{м. о. } Y_k,$$

$$b_k = \text{м. о. } X_k^2 + \text{м. о. } Y_k^2,$$

$$b_k^{(2+\delta)} = \text{м. о. } |X_k|^{2+\delta} + \text{м. о. } |Y_k|^{2+\delta}.$$

Математических ожиданий других степеней

$$Z_k - a_k, |Z_k - a_k|, Y_k \text{ и } |Y_k|,$$

при условиях А. М. Ляпунова, мы не должны рассматривать. Но как бы велико ни было введенное нами число N , мы можем рассматривать математические ожидания любых положительных степеней X_k и $|X_k|$. Введем следующие обозначения:

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = B_n,$$

$$b_1^{(2+\delta)} + b_2^{(2+\delta)} + \dots + b_n^{(2+\delta)} = B'_n,$$

$$|\text{м. о. } X_k| = |\text{м. о. } Y_k| = c_k^{(1)}, |\text{м. о. } X_k^\alpha| = c_k^{(\alpha)}$$

при $\alpha = 2, 3, 4, \dots$. Вместе с тем обозначим символом p_k вероятность равенства

$$Z_k - a_k = X_k,$$

равносильного неравенствам

$$-N \leq Z_k - a_k \leq N,$$

и символом q_k вероятность противоположного равенства

$$Z_k - a_k = Y_k, \text{ при } Y_k \neq 0,$$

иначе сказать, вероятность неравенства

$$(Z_k - a_k)^2 > N^2;$$

так что

$$p_k + q_k = 1.$$

Вспомогательное число N , возрастающее беспредельно вместе с n , мы подчиним двум условиям. И прежде всего постараемся распорядиться числом N так, чтобы разность между вероятностью неравенств

$$t_1 < \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{2B_n}} < t_2$$

и вероятностью неравенств

$$t_1 < \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n - a_1 - a_2 - \dots - a_n}{\sqrt{2B_n}} < t_2$$

приближалась к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$:

Так как первые неравенства равносильны вторым во всех случаях, когда

$$Y_1 = Y_2 = \dots = Y_n = 0,$$

то числовая величина разности между вероятностями их не может превзойти вероятности нарушения, по крайней мере, одного из равенств

$$Y_1 = 0, Y_2 = 0, \dots, Y_n = 0,$$

а эта последняя вероятность, как не трудно видеть, не больше суммы

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n.$$

Обращаясь к сумме

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n$$

и принимая во внимание равенство

$$b_k^{(2+\delta)} = \text{м. о. } |X_k|^{2+\delta} + \text{м. о. } |Y_k|^{2+\delta},$$

устанавливаем неравенство

$$q_k < \frac{b_k^{(2+\delta)}}{N^{2+\delta}}$$

и отсюда выводим

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n < \frac{B'_n}{N^{2+\delta}}.$$

Сообразно этому мы подчиним число N условию, чтобы дробь

$$\frac{B'_n}{N^{2+\delta}}$$

приближалась к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$. При соблюдении такого условия разность между вероятностью неравенств

$$t_1 < \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n - a_1 - a_2 - \dots - a_n}{\sqrt{2B_n}} < t_2$$

и вероятностью неравенств

$$t_1 < \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{2B_n}} < t_2$$

должна, согласно вышеприведенным объяснениям, приближаться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$; и, следовательно, при разыскании предела вероятности первых неравенств мы можем заменить их вторыми.

Обращаясь к разысканию предела вероятности этих вторых неравенств

$$t_1 < \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{2B_n}} < t_2,$$

мы подчиним N другому условию, при соблюдении которого, вместе с первым, не трудно для всякого положительного числа m установить формулу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{м. о.} \left\{ \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{2B_n}} \right\}^m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^m dt,$$

что, в силу заключительной теоремы предыдущей статьи, немедленно приведет нас к цели.

При рассмотрении математического ожидания степени

$$\left\{ \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{2B_n}} \right\}^m$$

нам придется повторить вычисления главы III, § 21 [7].

Согласно обобщенной формуле Ньютона имеем

$$\left\{ \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{2B_n}} \right\}^m = \sum \frac{m!}{\alpha! \beta! \dots \lambda!} \cdot \frac{S^{\alpha, \beta, \dots, \lambda}}{(2B_n)^{\frac{m}{2}}},$$

где $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ — целые положительные числа (не нули), удовлетворяющие условию

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda = m$$

и $S^{\alpha, \beta, \dots, \lambda}$ означает симметрическую функцию величин

$$X_1, X_2, \dots, X_n,$$

которая определяется одним ее членом

$$X_1^\alpha, X_2^\beta, \dots, X_i^\lambda.$$

Отсюда, в силу теорем о математических ожиданиях сумм и произведений, выводим

$$\text{м. о. } \left\{ \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{2B_n}} \right\}^m = \sum \frac{m!}{\alpha! \beta! \dots \lambda!} \cdot \frac{G^{\alpha, \beta, \dots, \lambda}}{(\sqrt{2B_n})^m},$$

где $G^{\alpha, \beta, \dots, \lambda}$ означает математическое ожидание суммы $S^{\alpha, \beta, \dots, \lambda}$ и получается из нее через замену степеней величин

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

математическими ожиданиями тех же степеней.

Относительно выражения

$$\frac{G^{\alpha, \beta, \dots, \lambda}}{(\sqrt{2B_n})^m}$$

мы докажем, что при надлежащем выборе числа N оно

будет приближаться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$, для всякой возможности системы чисел $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, кроме одной

$$\alpha = \beta = \dots = \lambda = 2,$$

которая возможна только при m четном.

Для намеченной цели обратим внимание на простое неравенство

$$\frac{|G^{\alpha, \beta, \dots, \lambda}|}{B_n^{\frac{m}{2}}} < \frac{c_1^{(\alpha)} + \dots + c_n^{(\alpha)}}{B_n^{\frac{\alpha}{2}}} \dots \frac{c_1^{(\lambda)} + \dots + c_n^{(\lambda)}}{B_n^{\frac{\lambda}{2}}},$$

правая часть которого составлена из множителей вида

$$\frac{c_1^{(e)} + c_2^{(e)} + \dots + c_n^{(e)}}{B_n^{\frac{e}{2}}},$$

где e может получать значения $1, 2, 3, \dots$

В силу приведенного неравенства можно утверждать, что для всякой совокупности чисел

$$\alpha, \beta, \dots, \lambda$$

не состоящей из одних только двоек, отношение

$$\frac{|G^{\alpha, \beta, \dots, \lambda}|}{B_n^{\frac{m}{2}}}$$

будет, наверно, стремиться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$, если мы распорядимся числом N так, чтобы было

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1^{(e)} + c_2^{(e)} + \dots + c_n^{(e)}}{B_n^{\frac{e}{2}}} = 0$$

при

$$e = 1, 3, 4, 5, \dots$$

Относительно выражения

$$\frac{c_1^{(2)} + c_2^{(2)} + \dots + c_n^{(2)}}{B_n}$$

легко убедиться, что при значениях N , удовлетворяющих вышеустановленному условию, оно должно стремиться к пределу 1, когда n возрастает бесконечно. В самом деле, сопоставляя равенство

$$c_k^{(2)} + \text{м. о. } Y_k^2 = b_k$$

с неравенством

$$\text{м. о. } Y_k^2 < \frac{b_k^{(2+\delta)}}{N^\delta},$$

в справедливости которого нетрудно убедиться, находим

$$b_k > c_k^{(2)} > b_k - \frac{b_k^{(2+\delta)}}{N^\delta},$$

откуда посредством сложения выводим

$$1 > \frac{c_1^{(2)} + c_2^{(2)} + \dots + c_n^{(2)}}{B_n} > 1 - \frac{B'_n}{B_n \cdot N^\delta},$$

Что же касается выражения

$$\frac{B'_n}{B_n N^\delta},$$

то его можно представить в виде произведения двух множителей

$$\left(\frac{B'_n}{N^{2+\delta}} \right)^{\frac{\delta}{2+\delta}} \quad \text{и} \quad \left(\frac{B'_n}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}} \right)^{\frac{2}{2+\delta}},$$

которые при наших условиях оба стремятся к пределу нуля вместе с $\frac{1}{n}$.

Нетрудно также убедиться, что условия, которыми мы подчинили уже число N , достаточны для того, чтобы отношение

$$\frac{c_1^{(1)} + c_2^{(1)} + \dots + c_n^{(1)}}{B_n^{\frac{1}{2}}}$$

приближалось к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$: это вытекает из простых неравенств

$$c_k^{(1)} < \text{м. о. } |Y_k|$$

и

$$\{\Sigma \text{ м. о. } |Y|\}^2 < (q_1 + q_2 + \dots + q_n) \Sigma \text{ м. о. } Y_k^2 < B_n \Sigma q_k.$$

Обращаясь к отношениям

$$\frac{c_1^{(e)} + c_2^{(e)} + \dots + c_n^{(e)}}{B_n^{\frac{e}{2}}}$$

при $e = 3, 4, 5, \dots$, принимаем во внимание неравенство

$$c_k^{(e)} < N^{e-2} b_k$$

и на основании его находим

$$\frac{c_1^{(e)} + c_2^{(e)} + \dots + c_n^{(e)}}{B_n^{\frac{e}{2}}} < \left(\frac{N^2}{B_n} \right)^{\frac{e-2}{2}}.$$

Отсюда следует, что все рассматриваемые нами отношения

$$\frac{c_1^{(e)} + c_2^{(e)} + \dots + c_n^{(e)}}{B_n^{\frac{e}{2}}}$$

будут наверно стремиться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$, если число N мы подчиним условию, чтобы отношение

$$\frac{N^2}{B_n}$$

стремилось к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$. Это новое условие может быть выполнено одновременно с ранее установленным, которое выражается равенством

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B'_n}{N^{2+\delta}} = 0.$$

Действительно, если положим

$$N = (B_n B'_n)^{\frac{1}{4+\delta}},$$

то обе дроби

$$\frac{N^2}{B_n} \quad \text{и} \quad \frac{B'_n}{N^{2+\delta}}$$

приведутся к одному и тому же выражению

$$\left(\frac{B'_n}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}} \right)^{\frac{2}{4+\delta}},$$

которое, в силу одного из принятых нами условий А. М. Ляпунова, должно стремиться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$.

Итак, положив

$$N = (B_n B'_n)^{\frac{1}{4+\delta}},$$

мы можем утверждать, что разность между вероятностью неравенств

$$t_1 < \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n - a_1 - a_2 - \dots - a_n}{\sqrt{2B_n}} < t_2$$

и вероятностью неравенств

$$t_1 < \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{2B_n}} < t_2$$

будет приближаться к пределу вместе с $\frac{1}{n}$, что отношение

$$\frac{c_1^{(2)} + c_2^{(2)} + \dots + c_n^{(2)}}{B_n}$$

будет в то же время приближаться к пределу единица и что, наконец, в сумме

$$\sum \frac{m!}{\alpha! \beta! \dots \lambda!} \cdot \frac{G^{\alpha, \beta, \dots, \lambda}}{(2B_n)^{\frac{m}{2}}},$$

равной математическому ожиданию

$$\left\{ \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{2B_n}} \right\}^m,$$

будут стремиться к пределу нуль, вместе с $\frac{1}{n}$, все слагаемые ее, кроме одного, которое определяется равенствами

$$\alpha = \beta = \dots = \lambda = 2$$

и входит в состав этой суммы только при m четном.

Принимая же во внимание простое неравенство

$$(c_k^{(2)})^\alpha < N^{2\alpha-2} c_k^{(2)}$$

при

$$\alpha = 2, 3, 4, \dots,$$

легко можем установить неравенство

$$\frac{(c_k^{(2)})^\alpha + \dots + (c_n^{(2)})^\alpha}{B_n^\alpha} < \left(\frac{N^2}{B_n} \right)^{\alpha-1},$$

которое показывает, что при наших условиях приближаются к пределу нуль, вместе с $\frac{1}{n}$, и все отношения вида

$$\frac{(c_1^{(2)})^\alpha + \dots + (c_n^{(2)})^\alpha}{B_n^\alpha}.$$

Отсюда следует, что при указанных нами условиях математическое ожидание любой положительной нечетной степени отношения

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{2B_n}}$$

должно приближаться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$.

Если же m число четное, то к пределу нуль должны стремиться две разности: *

* Глава III, § 21 [8].

$$\text{м. о. } \left\{ \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{2B_n}} \right\}^m = \frac{m!}{2^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{G^{2, 2, \dots, 2}}{(2B_n)^{\frac{m}{2}}}$$

и

$$\left(\frac{c_1^{(2)} + c_2^{(2)} + \dots + c_n^{(2)}}{2B_n} \right)^{\frac{m}{2}} = \left(\frac{m!}{2} \right) \frac{G^{2, 2, \dots, 2}}{(2B_n)^{\frac{m}{2}}};$$

для второй разности это заключение основано на тождестве

$$\left\{ \frac{c_1^{(2)} + c_2^{(2)} + \dots + c_n^{(2)}}{2B_n} \right\}^{\frac{m}{2}} = \sum \frac{\frac{m}{2}!}{\mu! \nu! \dots \omega!} \cdot \frac{H^{\mu, \nu, \dots, \omega}}{(2B_n)^{\frac{m}{2}}}$$

и на неравенстве

$$H^{\mu, \nu, \dots, \omega} < \{ (c_1^{(2)})^\mu + \dots + (c_n^{(2)})^\mu \} \dots \{ (c_1^{(2)})^\omega + \dots + (c_n^{(2)})^\omega \},$$

где $H^{\mu, \nu, \dots, \omega}$ означает симметрическую функцию величин $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \dots, c_n^{(2)}$, которая определяется одним ее членом

$$(c_1^{(2)})^\mu (c_2^{(2)})^\nu \dots (c_n^{(2)})^\omega.$$

Итак, при m нечетном

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{м. о. } \left\{ \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{2B_n}} \right\}^m = 0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^m dt,$$

а при m четном

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{м. о. } \left\{ \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{2B_n}} \right\}^m = \frac{m!}{2^m \left(\frac{m}{2} \right)!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} t^m dt,$$

что немедленно доставляет нам вышеприведенную предельную теорему.

Подобным же способом можно установить ее и в некоторых других случаях.

Заметим, по примеру А. М. Ляпунова, что его условия выполняются, если числовые величины всех разностей $Z_k - a_k$ не превосходят одного и того же неизменного числа и, вместе с тем, сумма

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n,$$

обозначенная символом B_n , возрастает беспредельно вместе с n . Действительно, если при всех k выполняются неравенства

$$-L < Z_k - a_k < L,$$

где L — постоянное положительное число, то для любого положительного числа δ имеем

$$b_k^{(2+\delta)} = \text{м. о. } |Z_k - a_k|^{2+\delta} < L^\delta b_k$$

и потому

$$\frac{B'_n}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}} < \frac{L^\delta}{B_n^{\frac{\delta}{2}}},$$

откуда тотчас следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B'_n}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}} = 0,$$

если только B_n возрастает беспредельно вместе с n .

И не трудно видеть, что вышеизложенное доказательство теоремы о пределе вероятности, для этих последних случаев, значительно упрощается, так как исчезает надобность вводить вспомогательное число N и разбивать все значения $Z_k - a_k$ на две совокупности.

Если же числовые величины разностей

$$L_k - a_k$$

могут быть произвольно большими, то для существования теоремы о пределе вероятностей недостаточно одного бес-

предельного возрастания суммы

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n,$$

как показывает мой пример.

Пример. Пусть Z_k , при достаточно больших значениях k может иметь три значения

$$0, (\log k)^\mu, -(\log k)^\mu,$$

вероятности которых соответственно равны

$$1 - \frac{2}{k (\log k)^\nu}, \frac{1}{k (\log k)^\nu}, \frac{1}{k (\log k)^\nu},$$

где μ и ν — данные положительные числа и

$$2\mu - \nu + 1 > 0;$$

для прочих же величин k пусть $Z_k = 0$, так что в сумме

$$Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

отпадает определенное число k_0 первых членов.

В этом случае имеем:

$a_k = 0$ при всех значениях k ,

$$\text{м. о. } |Z_k|^i = 0 \text{ при } k \leq k_0,$$

$$\text{м. о. } Z_k^2 = b_k = \frac{2 (\log k)^{2\mu-\nu}}{k} \text{ при } k > k_0$$

и вообще

$$\text{м. о. } |Z_k|^i = \frac{2 (\log k)^{i\mu-\nu}}{k} \text{ при } k > k_0$$

для любого положительного числа i .

Следовательно, для нашего примера

$$B_n = \frac{2 \{\log(k_0 + 1)\}^{2\mu-\nu}}{k_0 + 1} + \dots + \frac{2 \{\log n\}^{2\mu-\nu}}{n}$$

и

$$B'_n = \frac{2 \{\log(k_0 + 1)\}^{(2+\delta)\mu-\nu}}{k_0 + 1} + \dots + \frac{2 \{\log n\}^{(2+\delta)\mu-\nu}}{n}.$$

Сравнивая последние суммы с соответствующими интегралами, легко усматриваем, что отношения

$$\frac{B_n}{(\log n)^{2\mu-\nu+1}} \quad \text{и} \quad \frac{B'_n}{(\log n)^{(2+\delta)\mu-\nu+1}}$$

не могут возрастать беспредельно и не могут становиться произвольно малыми. Поэтому и произведение

$$\frac{B'_n}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}} \cdot (\log n)^{(1-\nu)\frac{\delta}{2}},$$

равное

$$\frac{B'_n}{(\log n)^{(2+\delta)\mu-\nu+1}} : \left(\frac{B_n}{(\log n)^{2\mu-\nu+1}} \right)^{1+\frac{\delta}{2}},$$

также не может ни беспредельно возрастать, ни становиться произвольно малым.

Отсюда тотчас заключаем, что при $\nu < 1$ условие А. М. Ляпунова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{B'_n}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}} \right) = 0$$

выполнено и, следовательно, теорема о пределе вероятности имеет место.

Напротив, при $\nu \geq 1$ условие А. М. Ляпунова, очевидно, не выполняется, что, однако, не доказывает еще неприменимости к данному случаю предельной теоремы, ибо это условие установлено как достаточное, но не как необходимое.

При $\nu > 1$ и достаточно больших величинах k_0 мы легко можем обнаружить эту неприменимость, рассматривая вероятность, что сумма

$$Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

точно равна нулю. Если бы теорема о пределе вероятности в данном случае имела место, то вероятность равенства

$$Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = 0$$

приближалась бы к пределу нуль, при беспредельном возрастании n .

Между тем нетрудно видеть, что вероятность нарушения этого равенства не больше суммы вероятностей равенств

$$Z_{k_0+1} = \pm (\log(k_0 + 1))^\mu, \dots, Z_n = \pm (\log n)^\mu,$$

которая составляет часть бесконечной суммы

$$\frac{2}{(k_0 + 1) \{\log(k_0 + 1)\}^\nu} + \dots + \frac{2}{(k_0 + i) \{\log(k_0 + i)\}^\nu} \dots,$$

и потому должна оставаться меньше

$$\frac{2}{(\nu - 1) (\log k_0)^{\nu-1}},$$

как бы велико ни было число n . Поэтому, взяв k_0 настолько большим, чтобы дробь

$$\frac{2}{(\nu - 1) (\log k_0)^{\nu-1}}$$

была меньше единицы, мы можем утверждать, что вероятность равенства

$$Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = 0$$

постоянно остается больше положительного числа

$$1 - \frac{2}{(\nu - 1) (\log k_0)^{\nu-1}}$$

и, следовательно, не стремится к пределу нуль.

Например, при

$$\nu = 2 \text{ и } k_0 = 10$$

вероятность равенства

$$Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = 0$$

постоянно больше

$$1 - \frac{2}{\log 10} > \frac{1}{8}.$$

Таким образом неприменимость теоремы о пределе вероятности к указанным сейчас случаям, при $\nu > 1$, выяснена, причем в силу неравенства

$$2\nu - \nu + 1 > 0$$

сумма

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = B_n$$

возрастает у нас беспредельно вместе с n [9].

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗАКОНА
БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ НА ВЕЛИЧИНЫ,
ЗАВИСЯЩИЕ ДРУГ ОТ ДРУГА



Закон больших чисел, в силу которого, с вероятностью сколь угодно близкою к достоверности, можно утверждать, что среднее арифметическое из нескольких величин, при достаточно большом числе этих величин, будет произвольно мало отличаться от средней арифметической из их математических ожиданий, выведен Чебышевым* из рассмотрения математического ожидания квадрата разности между суммой этих величин и суммой их математических ожиданий. А именно, из рассуждений Чебышева ясно, что указанный закон больших чисел должен оправдываться во всех тех случаях, когда математическое ожидание квадрата разности между суммой величин и суммой их математических ожиданий, при беспредельном возрастании числа величин, возрастает медленнее, чем квадрат их числа, так что отношение этого математического ожидания к квадрату числа величин имеет пределом нуль.

В своих выводах Чебышев ограничился простейшим и потому наиболее интересным случаем независимых величин; в этом простейшем случае, как показал Чебышев, математическое ожидание вышеуказанного квадрата, при беспредельном возрастании числа величин, может возрасть только с такой же быстротой, как число их, если математические ожидания квадратов самих величин остаются конечными, а не возрастают беспредельно.

* Сочинения П. Л. Чебышева, т. I, о средних величинах [1].

Конечно, условия Чебышева далеко не исчерпывают всех случаев, к которым можно применить вышеуказанный закон, если даже мы ограничимся независимыми величинами. Мы не имеем, однако, в виду заниматься разысканием условий, необходимых и достаточных для применимости этого закона, а укажем только, что выводы Чебышева можно распространить и на некоторые случаи довольно общего характера, когда величины зависят друг от друга.

§ 1. На первом плане можно поставить случай, когда связь величин такова, что увеличение любой из них влечет за собой уменьшение математических ожиданий остальных.

Остановимся на этом случае; пусть рассматриваемые нами величины будут

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

а математические ожидания их соответственно равны

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots;$$

положим еще для краткости

$$x_l - a_l = z_l.$$

Рассматривая математическое ожидание квадрата

$$(z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2,$$

разлагаем его на слагаемые

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 + 2z_1z_2 + 2z_1z_3 + \dots + 2z_{n-1}z_n$$

и пользуемся известным предложением, что математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых.

Для независимых величин математические ожидания произведений вида $z_l z_k$ все равны нулю, и потому математическое ожидание $(z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2$ приводится к сумме матема-

тических ожиданий квадратов величин $z_1, z_2, \dots, z_n$. В нашем же случае математическое ожидание каждого произведения $z_l z_k$ — число отрицательное и потому

$$\text{м. о. } (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2 < \sum \text{м. о. } z_k^2 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Чтобы в этом удостовериться, положим, что совокупность чисел

$$z'_l, z''_l, \dots, z^{(\omega)}_l,$$

расположенных в возрастающем порядке, представляет все возможные значения z_l , а вероятности их соответственно равны

$$p'_l, p''_l, \dots, p^{(\omega)}_l,$$

пусть, наконец, при

$$z_l = z'_l, z''_l, \dots, z^{(\omega)}_l$$

математическое ожидание z_k соответственно равно

$$a'_k, a''_k, \dots, a^{(\omega)}_k.$$

При таких обозначениях математическое ожидание произведения $z_l z_k$ выражается суммой

$$p'_l z'_l a'_k + p''_l z''_l a''_k + \dots + p^{(\omega)}_l z^{(\omega)}_l a^{(\omega)}_k,$$

а математические ожидания самих величин z_l, z_k , равные нулю, могут быть представлены в виде сумм

$$p'_l z'_l + p''_l z''_l + \dots + p^{(\omega)}_l z^{(\omega)}_l$$

и

$$p'_l a'_k + p''_l a''_k + \dots + p^{(\omega)}_l a^{(\omega)}_k.$$

И так как для рассматриваемого нами случая, согласно предположению, должно быть

$$a'_k > a''_k > \dots > a^{(\omega)}_k,$$

то в силу известного неравенства Чебышева* имеем

$$\sum p_l^{(i)} z_l^{(i)} a_k^{(i)} < \sum p_l^{(i)} z_l^{(i)} \cdot \sum p_l^{(i)} a_k^{(i)} = 0.$$

Следовательно, к рассматриваемому нами случаю можно применить закон больших чисел, если только математическое ожидание z_n^2 остается конечным, а не возрастает беспрестанно вместе с n .

К тому же неравенству

$$\text{м. о. } (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2 < \sum \text{м. о. } z_k^2,$$

а следовательно, и к тому же заключению о применимости закона больших чисел не трудно придти и в случае, когда математическое ожидание x_k , при всяком k , уменьшается с увеличением суммы

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1};$$

для этого нужно только воспользоваться тождеством

$$(z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2 = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 + 2z_1z_2 + \\ + 2(z_1 + z_2)z_3 + 2(z_1 + z_2 + z_3)z_4 + \dots$$

Указанные условия выполняются, например, в случае, когда сумма

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

равна числу белых шаров среди n шаров, вынутых последовательно из сосуда при следующих условиях:

- 1) первоначальное число белых шаров в сосуде равно $2a$, а остальных шаров $2b$;
- 2) вынутые шары обратно в сосуд не возвращаются;

* О приближенных выражениях одних интегралов через другие. (Сочинения П. Л. Чебышева, т. II, стр. 716—719 [2]. — K o r k i n e. Sur un théoreme de M. Tchébycheff. Comptes Rendus, t. XCVI).

3) когда в сосуде остается $a + b$ шаров, в него прибавляют a белых шаров и b других шаров.

В силу закона больших чисел в данном случае, совершенно так же, как в известном случае, когда отношение числа белых шаров к числу всех шаров в сосуде сохраняет неизменную величину $\frac{a}{a+b}$, мы можем утверждать с вероятностью, сколь угодно близкою к достоверности, что отношение числа появившихся белых шаров к числу всех вынутых шаров, при достаточно большом числе их, будет отличаться от $\frac{a}{a+b}$ менее, чем на любую заданную величину.

§ 2. Повторяя, что мы даем только достаточные, но не необходимые условия, остановимся на одном из тех случаев, на которые выводы Чебышева можно распространить по той причине, что влияние величин

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

друг на друга быстро убывает по мере увеличения их взаимного расстояния. В нашем случае

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

будет представлять число появлений некоторого события A при n последовательных испытаниях, связанных таким образом, что вероятность события A при каждом испытании имеет вполне определенное значение p' , если событие A появилось при непосредственно предшествующем испытании, и другое определенное значение p'' — в противном случае, каковы бы ни были результаты прочих предшествующих ему испытаний; если же результаты всех испытаний остаются неопределенными, то вероятность события A для каждого из них равна одному и тому же числу p .

Приступая к рассмотрению этого случая, положим для краткости

$$1 - p = q, \quad 1 - p' = q', \quad 1 - p'' = q''$$

и заметим, что числа p, p', p'' связаны между собой простым равенством

$$p = pp' + qp'',$$

на основании которого по данным двум из этих чисел не трудно найти третье; оно дает

$$p = \frac{p''}{1 - p' + p''}, \quad p' = 1 + p'' - \frac{p''}{p}, \quad p'' = p \frac{1 - p'}{1 - p}.$$

Так как числа x_l, x_k соответственно означают число (0 или 1) появлений события A при испытаниях, отмеченных номерами l и k , то нетрудно установить равенства

$$a_l = a_k = p.$$

Нетрудно также убедиться, что математическое ожидание произведения $z_l z_k$, равного

$$x_l x_k - a_l x_k - a_k x_l + a_l a_k,$$

приводится к разности

$$\text{м. о. } x_l x_k - p^2.$$

Что же касается математического ожидания произведения $x_l x_k$, то оно равно вероятности появления события A при обоих испытаниях, отмеченных номерами l и k , которая, в свою очередь, в силу теоремы об умножении вероятностей может быть выражена произведением числа p , представляющего вероятность появления события при испытании с номером l , на некоторое число R_k^l , представляющее вероятность появления события A при испытании с номером k , когда известно, что событие A появилось при испытании с номером l .

Придавая таким образом к равенству

$$\text{м. о. } z_l z_k = p (R_k^l - p),$$

мы должны заняться разысканием числа R_k^l , которое зависит, как не трудно убедиться, только от разности $k - l$ и потому может быть обозначено более простым символом

$$R_{k-l}.$$

При $k - l = 1$ в силу наших условий имеем

$$R_1 = p';$$

затем нетрудно последовательно найти

$$R_2 = R_1 p' + (1 - R_1) p'' = p' p' + q' p'',$$

$$R_3 = R_2 p' + (1 - R_2) p'',$$

$$\dots$$

$$R_{m+1} = R_m p' + (1 - R_m) p'' = p'' + (p' - p'') R_m.$$

Уравнение

$$R_{m+1} = p'' + (p' - p'') R_m$$

принадлежит к числу тех, для решения которых нетрудно указать общую формулу; а именно, это уравнение дает нам

$$R_m = p + C(p' - p'')^m,$$

причем постоянное число C определяется из условия

$$R_1 = p'$$

и оказывается равным $1 - p = q$.

Итак,

$$\text{м. о. } z_l z_k = pq (p' - p'')^{k-l}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \text{м. о. } (z_1 + z_2 + \dots + z_{k-1}) z_k &= \\ &= pq [p' - p'' + (p' - p'')^2 + \dots + (p' - p'')^{k-1}]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $p' < p''$ математическое ожидание произведения

$$(z_1 + z_2 + \dots + z_{k-1}) z_k$$

— число отрицательное, и потому

$$\text{м. о. } (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2 < npq;$$

если же $p' > p''$, то математическое ожидание произведения

$$(z_1 + z_2 + \dots + z_{k-1}) z_k$$

меньше

$$\frac{pq(p' - p'')}{1 - p' + p''},$$

и потому

$$\begin{aligned} \text{м. о. } (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2 &< npq \left(1 + \frac{2(p' - p'')}{1 - p' + p''} \right) < \\ &< \frac{npq(1 + p' - p'')}{1 - p' + p''}. \end{aligned}$$

Таким образом мы пришли к неравенствам, которые ясно обнаруживают, что к данному случаю можно применить закон больших чисел.

В силу этого закона мы можем, с вероятностью сколь угодно близкою к достоверности, утверждать, что при достаточно большом числе наших испытаний отношение числа появлений события A к числу испытаний будет разниться от p на величину, меньшую любого данного числа.

§ 3. Выражение математического ожидания произведения $z_i z_k$, найденное в предыдущем параграфе, можно вывести из общих формул, которыми мы займемся и которые могут служить основанием для дальнейших исследований.

Обозначим, при предположениях предыдущего параграфа, символом $P_{m,k}$ вероятность, что в первые k испытаний событие A появится ровно m раз.

Мы можем положить

$$P_{m,k} = V_{m,k} + U_{m,k},$$

где $U_{m,k}$ и $V_{m,k}$ означают ту же вероятность, как и $P_{m,k}$, но при следующих условиях:

1) $U_{m,k}$ — при условии, что при последнем испытании событие A не имеет места;

2) $V_{m,k}$ — при условии, что при последнем испытании событие A имеет место.

В связи с величинами $P_{m,k}$, $V_{m,k}$, $U_{m,k}$ введём ещё три функции произвольного числа ξ :

$$\Phi_k = U_{0,k} + U_{1,k}\xi + U_{2,k}\xi^2 + \dots + U_{k-1,k}\xi^{k-1},$$

$$\Psi_k = V_{1,k}\xi + V_{2,k}\xi^2 + \dots + V_{k,k}\xi^k,$$

$$\Omega_k = P_{0,k} + P_{1,k}\xi + P_{2,k}\xi^2 + \dots + P_{k,k}\xi^k = \Psi_k + \Phi_k.$$

Мы покажем теперь, что функция Ω_k может быть определена как коэффициент при t^k в разложении по возрастающим степеням произвольного числа t довольно простого выражения.

Для этой цели, пользуясь теоремами сложения и умножения вероятностей, устанавливаем два равенства

$$U_{m,k} = q' V_{m,k-1} + q'' U_{m,k-1},$$

$$V_{m,k} = p' V_{m-1,k-1} + p'' U_{m-1,k-1}.$$

Применяя затем эти равенства к функциям Φ_k и Ψ_k , получаем два уравнения

$$\Phi_k = q' \Psi_{k-1} + q'' \Phi_{k-1},$$

$$\Psi_k = p' \xi \Psi_{k-1} + p'' \xi \Phi_{k-1},$$

из которых, наконец, посредством исключения одной из двух функций Φ или Ψ , выводим

$$\Phi_{k+1} - (p' \xi + q'') \Phi_k + (p' - p'') \xi \Phi_{k-1} = 0,$$

$$\Psi_{k+1} - (p' \xi + q'') \Psi_k + (p' - p'') \xi \Psi_{k-1} = 0.$$

А так как

$$\Omega_k = \Phi_k + \Psi_k,$$

то должно быть также

$$\Omega_{k+1} - (p' \xi + q'') \Omega_k + (p' - p'') \xi \Omega_{k-1} = 0.$$

Отсюда следует, что Ω_k можно определить как коэффициент при t^k в разложении, по возрастающим степеням t , дроби вида

$$\frac{A + Bt}{1 - (p' \xi + q'') t + (p' - p'') \xi t^2},$$

где A и B не зависят от t .

Для определения A и B остается рассмотреть Ω_k при двух значениях k ; при $k=1$ и $k=2$ легко находим

$$\Omega_1 = q + p\xi,$$

$$\Omega_2 = qq'' + (qp'' + pq') + pp' \xi^2,$$

откуда выводим

$$\Omega_0 = 1.$$

Разлагая же нашу дробь по возрастающим степеням t и ограничиваясь двумя первыми членами, находим

$$\begin{aligned} A + (B + p' \xi + q'') t &= \Omega_0 + \Omega_1 t = \\ &= 1 + (q + p\xi) t, \end{aligned}$$

что дает нам два равенства

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ B &= (p - p') \xi + q - q'', \end{aligned}$$

из которых последнее не трудно привести к такому виду:

$$B = (p'' - p') (q\xi + p).$$

Итак, окончательно находим

$$\begin{aligned} \frac{1 + (p'' - p') (q\xi + p) t}{1 - (p' \xi + q'') t + (p' - p'') \xi t^2} &= \\ &= \Omega_0 + \Omega_1 t + \Omega_2 t^2 + \dots \end{aligned}$$

Эта формула может служить основанием для дальнейших исследований* и, в частности, из нее нетрудно вывести

* См. в „Известиях Академии Наук“ за 1907 г. мою статью „Исследование замечательного случая зависимых испытаний“.

результаты предыдущего параграфа, на чем, однако, мы не остановимся.

§ 4. Для выяснения дела приведем еще пример, к которому нельзя применить закон больших чисел.

Пусть подобно прежнему (§ 1) сумма

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

равна числу белых шаров среди n шаров, вынутых последовательно из сосуда, только при новых условиях, которые мы установим так:

1) первоначальное число белых шаров в сосуде равно a , а остальных b ;

2) каждый вынутый из сосуда шар поступает обратно в сосуд вместе с другим шаром того же цвета.

В данном случае увеличение суммы

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1}$$

непрерывно ведет к увеличению математического ожидания x_k , и потому математическое ожидание произведения

$$(z_1 + z_2 + \dots + z_{k-1}) z_k$$

оказывается числом положительным.

Для вычисления математического ожидания квадрата

$$(z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2$$

заметим, что оно может быть выражено суммой

$$\sum \left(m - n \frac{a}{a+b} \right)^2 P_{m,n}^{a,b} (m=0, 1, 2, \dots, n),$$

где $P_{m,n}^{a,b}$ означает вероятность, что среди n вынутых шаров будет равно m белых, и определяется, как нетрудно убедиться, формулой

$$P_{m,n}^{a,b} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot a(a+1) \dots (a+m-1) b(b+1) \dots (b+n-m-1)}{1 \cdot 2 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \dots (n-m)(a+b)(a+b+1) \dots (a+b+n-1)}.$$

Из приведенной формулы вытекают следующие простые равенства:

$$mP_{m,n}^{a,b} = \frac{na}{a+b} P_{m-1,n-1}^{a+1,b},$$

$$m(m-1)P_{m,n}^{a,b} = \frac{n(n-1)a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} P_{m-2,n-2}^{a+2,b},$$

на основании которых получаем

$$\sum mP_{m,n}^{a,b} = \frac{na}{a+b},$$

$$\sum m(m-1)P_{m,n}^{a,b} = \frac{n(n-1)a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)},$$

где

$$m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Последние равенства, вместе с очевидным равенством

$$\sum P_{m,n}^{a,b} = 1,$$

дают возможность определить искомую сумму

$$\sum \left(m - n \frac{a}{a+b} \right)^2 P_{m,n}^{a,b},$$

для чего ее следует разложить на три части:

$$\begin{aligned} \sum m(m-1)P_{m,n}^{a,b} - \left(\frac{2na}{a+b} - 1 \right) \sum mP_{m,n}^{a,b} + \\ + n^2 \left(\frac{a}{a+b} \right)^2 \sum P_{m,n}^{a,b}. \end{aligned}$$

Остается произвести простые выкладки, по выполнению которых получаем

$$\sum \left(m - n \frac{a}{a+b} \right)^2 P_{m,n}^{a,b} = \frac{nab(n+a+b)}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

Основываясь на этом результате, мы можем показать, что к данному случаю закон больших чисел не применяется; так

что при достаточно малом значении ε вероятность неравенств

$$-\varepsilon \leq \frac{m}{n} - \frac{a}{a+b} \leq +\varepsilon$$

не может быть произвольно близка к единице, как бы ни было велико число n .

Для этой цели обозначим буквою β вероятность неисполнения неравенств

$$-\varepsilon \leq \frac{m}{n} - \frac{a}{a+b} \leq +\varepsilon$$

и примем во внимание, что квадрат

$$\left(\frac{m}{n} - \frac{a}{a+b} \right)^2$$

не может превосходить наибольшего из чисел

$$\left(\frac{a}{a+b} \right)^2 \text{ и } \left(\frac{b}{a+b} \right)^2,$$

которое обозначим буквою ξ .

При таких обозначениях из найденной нами формулы нетрудно вывести неравенство

$$\xi\beta > \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} - \xi^2,$$

которое показывает, что β не может быть произвольно малым, если только

$$\xi < \sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}}.$$

Интересно заметить, что в нашем примере наимвероятнейшая величина числа m , которую мы обозначим буквою μ , определяется простыми неравенствами

$$\begin{aligned} (a-1)n - b + 1 &\leq (a+b-2)\mu, \\ (a-1)n + a - 1 &\leq (a+b-2)\mu, \end{aligned}$$

и отношение $\frac{\mu}{n}$, при беспредельном возрастании n , имеет пределом

$$\text{не } \frac{a}{a+b}, \text{ а } \frac{a-1}{a+b-2};$$

но, конечно, нельзя рассчитывать, чтобы при больших значениях n отношение $\frac{m}{n}$ было произвольно близко к $\frac{a-1}{a+b-2}$, так как математическое ожидание квадрата $\left(\frac{m}{n} - g\right)^2$ достигает своей наименьшей величины при $g = \frac{a}{a+b}$ и эта наименьшая величина, как видно из найденной нами формулы, стремится, при беспредельном возрастании n , к пределу $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$, отличному от нуля.

В простейшем случае, когда

$$a=b=1,$$

неприменимость закона больших чисел очевидна; так как в этом случае все предположения

$$m=0, 1, 2, 3, \dots, n$$

имеют одну и ту же вероятность $\frac{1}{n+1}$.

16 января 1907 г.

§ 5. Выводам § 2 можно придать значительно бóльшую общность; а именно, вместо числа появления некоторого события можно рассматривать сумму величин, связанных в цепь таким образом, что, когда одна из них получает определенное значение, следующие за ней становятся независимыми от предшествующих ей. Пусть будет

$$x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots$$

— бесконечный ряд величин, связанных таким образом, что x_{k+1} при всяком k не зависит от

$$x_1, x_2, \dots, x_{k-1},$$

когда известно значение x_k .

Пусть, далее, совокупность чисел

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

представляет все возможные значения любой из наших величин, а система

$$\begin{aligned} & p_{\alpha, \alpha}, p_{\alpha, \beta}, p_{\alpha, \gamma}, \dots, \\ & p_{\beta, \alpha}, p_{\beta, \beta}, p_{\beta, \gamma}, \dots, \\ & \dots \end{aligned}$$

представляет вероятности, при данном значении x_k , величине x_{k+1} иметь определенное значение, причем первый значок у p указывает данную величину x_k , а второй — предполагаемую величину x_{k+1} ; например при

$$x_k = \beta$$

вероятность равенства

$$x_{k+1} = \gamma$$

имеет значение $p_{\beta, \gamma}$.

Эти вероятности мы предполагаем независимыми от значка k , чтобы не очень усложнять наши обозначения и рассуждения.

Пусть, наконец,

$$p_{\alpha}^{(k)}, p_{\beta}^{(k)}, p_{\gamma}^{(k)}, \dots$$

соответственно означают вероятности для x_k иметь значения

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots,$$

пока все величины

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

остаются неопределенными. Числа

$$\begin{aligned} & p_{\alpha, \alpha}, p_{\alpha, \beta}, p_{\alpha, \gamma}, \dots, \\ & p_{\beta, \alpha}, p_{\beta, \beta}, p_{\beta, \gamma}, \dots, \\ & \dots \end{aligned}$$

должны быть, конечно, положительными; кроме того, они должны удовлетворять равенствам

$$\begin{aligned} p_{\alpha, \alpha} + p_{\alpha, \beta} + p_{\alpha, \gamma} + \dots &= 1, \\ p_{\beta, \alpha} + p_{\beta, \beta} + p_{\beta, \gamma} + \dots &= 1, \\ \vdots & \end{aligned}$$

никакими другими условиями эти числа не ограничены.

Что же касается чисел

$$p_{\alpha}^{(k)}, p_{\beta}^{(k)}, p_{\gamma}^{(k)}, \dots,$$

которые, конечно, должны удовлетворять условию

$$p_{\alpha}^{(k)} + p_{\beta}^{(k)} + p_{\gamma}^{(k)} + \dots = 1,$$

то их нельзя задавать независимо для всех значений k ;
напротив, по значениям

$$p'_\alpha, p'_\beta, p'_\gamma, \dots$$

МОЖНО ВЫЧИСЛЯТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ВСЕ ВЕЛИЧИНЫ

$$p_{\alpha}^{(k)}, p_{\beta}^{(k)}, p_{\gamma}^{(k)}, \dots$$

на основании простых формул

$$\begin{aligned} p_{\alpha}^{(k+1)} &= p_{\alpha, \alpha} p_{\alpha}^{(k)} + p_{\beta, \alpha} p_{\beta}^{(k)} + \dots, \\ p_{\beta}^{(k+1)} &= p_{\alpha, \beta} p_{\alpha}^{(k)} + p_{\beta, \beta} p_{\beta}^{(k)} + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Обращаясь к математическим ожиданиям наших величин при различных данных, обозначим попрежнему символом

a_k

математическое ожидание x_k , пока все величины

$$x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$$

остаются неопределенными, а символами

$$A_{\alpha}^{(i)}, A_{\beta}^{(i)}, A_{\gamma}^{(i)}, \dots$$

математические ожидания величины

$$x_{k+i}$$

соответственно при

$$x_k = \alpha, x_k = \beta, x_k = \gamma, \dots$$

При таких обозначениях не трудно установить следующие равенства:

$$\begin{aligned} a_k &= p_{\alpha}^{(k)} \alpha + p_{\beta}^{(k)} \beta + p_{\gamma}^{(k)} \gamma + \dots, \\ a_{k+i} &= p_{\alpha}^{(k)} A_{\alpha}^{(i)} + p_{\beta}^{(k)} A_{\beta}^{(i)} + p_{\gamma}^{(k)} A_{\gamma}^{(i)} + \dots, \\ A_{\alpha}^{(i)} &= p_{\alpha, \alpha} A_{\alpha}^{(i-1)} + p_{\alpha, \beta} A_{\beta}^{(i-1)} + p_{\alpha, \gamma} A_{\gamma}^{(i-1)} + \dots, \\ A_{\beta}^{(i)} &= p_{\beta, \alpha} A_{\alpha}^{(i-1)} + p_{\beta, \beta} A_{\beta}^{(i-1)} + p_{\beta, \gamma} A_{\gamma}^{(i-1)} + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

На основании этих равенств мы докажем, что все величины

$$a_{k+i}, A_{\alpha}^{(i)}, A_{\beta}^{(i)}, A_{\gamma}^{(i)}, \dots,$$

при беспредельном возрастании числа i , приближаются к одному пределу. Для этой цели прежде всего заметим, что в силу приведенных нами равенств число a_{k+i} лежит между наибольшим и наименьшим из чисел

$$A_{\alpha}^{(i)}, A_{\beta}^{(i)}, A_{\gamma}^{(i)}, \dots$$

а эти последние числа все заключаются между наибольшим и наименьшим из чисел

$$A_{\alpha}^{(i-1)}, A_{\beta}^{(i-1)}, A_{\gamma}^{(i-1)}, \dots$$

Рассматривая затем разность

$$A_{\alpha}^{(i)} - A_{\beta}^{(i)}.$$

на основании тех же формул получаем

$$A_{\alpha}^{(i)} - A_{\beta}^{(i)} = (p_{\alpha, \alpha} - p_{\beta, \alpha}) A_{\alpha}^{(i-1)} + (p_{\alpha, \beta} - p_{\beta, \beta}) A_{\beta}^{(i-1)} + \dots,$$

и так как сумма

$$(p_{\alpha, \alpha} - p_{\beta, \alpha}) + (p_{\alpha, \beta} - p_{\beta, \beta}) + \dots$$

равна нулю, то, отделяя в системе

$$p_{\alpha, \alpha} - p_{\beta, \alpha}, p_{\alpha, \beta} - p_{\beta, \beta}, \dots$$

положительные числа от отрицательных и заменяя последние их числовыми величинами, мы получим две совокупности положительных чисел, образующих одинаковые суммы.

Важно заметить также, что эти суммы меньше единицы, ибо члены одной из них меньше

$$p_{\alpha, \alpha}, p_{\alpha, \beta}, p_{\alpha, \gamma}, \dots,$$

а члены другой меньше

$$p_{\beta, \alpha}, p_{\beta, \beta}, p_{\beta, \gamma}, \dots$$

Поэтому, заменяя одни из чисел

$$A_{\alpha}^{(i-1)}, A_{\beta}^{(i-1)}, A_{\gamma}^{(i-1)}, \dots$$

наибольшим, а другие наименьшим из них и обозначая символом

$$\Delta^{(i-1)}$$

разность между наибольшим и наименьшим из наших чисел

$$A_{\alpha}^{(i-1)}, A_{\beta}^{(i-1)}, A_{\gamma}^{(i-1)}, \dots,$$

мы можем установить неравенство

$$\text{числ. знач. } (A_{\alpha}^{(i)} - A_{\beta}^{(i)}) < h \Delta^{(i-1)},$$

где h равняется сумме всех положительных чисел системы

$$p_{\alpha, \alpha} - p_{\beta, \alpha}, p_{\alpha, \beta} - p_{\beta, \beta}, \dots,$$

и меньше единицы.

Совершенно подобное же заключение можно вывести относительно разности любых двух чисел системы

$$A_{\alpha}^{(i)}, A_{\beta}^{(i)}, A_{\gamma}^{(i)}, \dots$$

Поэтому, рассматривая вместо

$$A_{\alpha}^{(i)} - A_{\beta}^{(i)}$$

разность $\Delta^{(i)}$ между наибольшим и наименьшим из чисел

$$A_{\alpha}^{(i)}, A_{\beta}^{(i)}, A_{\gamma}^{(i)}, \dots,$$

мы можем установить неравенство

$$\Delta^{(i)} < H\Delta^{(i-1)},$$

где H означает некоторое постоянное число, лежащее между 0 и 1.

Это неравенство показывает, что $\Delta^{(i)}$ приближается к пределу нуль, когда i возрастает беспредельно.

Следовательно, при беспредельном возрастании числа i все количества

$$a_{k+1}, A_{\alpha}^{(i)}, A_{\beta}^{(i)}, A_{\gamma}^{(i)}, \dots$$

приближаются к одному пределу, от которого они отличаются на величину меньшую $\Delta^{(i)}$; вместе с тем имеем

$$\Delta^{(i)} < CH^i,$$

где C и H — числа постоянные и

$$0 < H < 1:$$

Обращаясь затем к математическому ожиданию квадрата

$$(x_1 - a_1 + x_2 - a_2 + \dots + x_n - a_n)^2,$$

мы разложим этот квадрат на такие же слагаемые, как и в § 2, полагая

$$x_k - a_k = z_k.$$

И в силу доказанного, рассуждая совершенно так же, как в § 2, мы легко приходим к неравенствам

$$\text{м. о. } z_k(z_1 + z_2 + \dots + z_{k-1}) < D(H + H^2 + \dots + H^{k-1})$$

и

$$\text{м. о. } (x_1 - a_1 + x_2 - a_2 + \dots + x_n - a_n)^2 < Gn,$$

где D и G — числа постоянные.

С другой стороны, сравнивая математическое ожидание

$$(x_1 - a_1 + x_2 - a_2 + \dots + x_n - a_n)^2$$

с математическим ожиданием

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n - na)^2,$$

где

$$a = \text{пред. } a_{k+i} (i = \infty),$$

находим, что разность математических ожиданий этих квадратов равна

$$(a_1 - a + a_2 - a + \dots + a_n - a)^2$$

и сохраняет конечное значение при беспредельном возрастании числа n . Следовательно, при беспредельном возрастании числа n математическое ожидание квадрата

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - a \right)^2$$

должно приближаться к пределу нуль.

А отсюда тотчас вытекает для данного случая закон

больших чисел; как бы малы ни были положительные числа ξ и η , вероятность выполнения неравенств

$$1 - \varepsilon < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - a < \varepsilon$$

будет больше $1 - \eta$ для всех достаточно больших значений n .

Итак, независимость величин не составляет необходимого условия для существования закона больших чисел.

25 марта 1907 г. [3].

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НА СУММУ ВЕЛИЧИН, СВЯЗАННЫХ В ЦЕПЬ

*Доложено в заседании Физико-математического отделения
5 декабря 1907 г. [1]*

В статье „Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга“, помещенной в XV томе 2-й серии „Известий Физико-математического общества при Казанском университете“ [2], я показал, что известный закон больших чисел, установленный Чебышевым для независимых величин, распространяется и на многие случаи зависимых величин.

Из этих случаев особенного внимания, по моему мнению, заслуживают случаи величин, связанных в цепь таким образом, что, когда значение одной из них становится известным, следующие за ней оказываются независимыми от предшествующих ей.

Рассматривая один из таких случаев, можно сказать простейший, в статье* „Исследование замечательного случая зависимых испытаний“, я доказал для него теорему о пределе математического ожидания, из которой вытекает предельное выражение вероятности в виде известного интеграла Лапласа.

Этот результат наводит на мысль, что теорема о пределе математического ожидания должна иметь место и в других случаях величин, связанных в цепь.

Мое доказательство было основано на одной особенности данного случая: на симметричности искомых выражений относительно p и q ; но достаточно небольших изменений, чтобы сделать его независимым от указанной особенности частного

* Изв. Акад. Наук, 1907.

случая, и станет ясной возможность перенесения подобных рассуждений и соответствующих выводов на другие случаи.

Мы не будем возвращаться к разобранным случаям, а рассмотрим другой, более общий случай и на нем выясним доказательство, имеющее общий характер.

§ 1. Пусть будет

$$x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots$$

— ряд величин, связанных в цепь.

Пусть, далее, для каждой из этих величин возможно только три значения

$$-1, 0, +1,$$

и система чисел

$$\begin{array}{ccc} p, & q, & r, \\ p', & q', & r', \\ p'', & q'', & r'' \end{array}$$

представляет соответственно: в первой строке — вероятности равенств

$$x_{k+1} = -1, \quad x_{k+1} = 0, \quad x_{k+1} = +1$$

при $x_k = -1$, во второй строке — вероятности тех же равенств при $x_k = 0$ и, наконец, в третьей строке — вероятности их при $x_k = +1$.

Эти вероятности, конечно, не могут быть числами отрицательными и должны удовлетворять условиям

$$\begin{array}{l} p + q + r = 1, \\ p' + q' + r' = 1, \\ p'' + q'' + r'' = 1. \end{array} \quad (1)$$

Мы предположим, кроме того, что ни одна из них не равна единице; такое предположение особенно важно сделать относительно

$$p, q', r'',$$

чтобы наш ряд

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

не мог оказаться простым повторением одного числа.

Наконец мы должны ввести еще три числа

$$P, Q, R,$$

соответственно равные вероятностям для x_1 иметь значения

$$-1, 0, +1.$$

При таких условиях мы займемся рассмотрением вероятностей различных предположений о величине суммы

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

для любого данного значения n , и начнем с малых значений n , а затем перейдем к большим и к возрастающим беспрерывно.

При $n=1$ наша сумма сводится к одному числу x_1 и соответственно этому может иметь только три значения

$$-1, 0, +1,$$

вероятности которых, по условию, равны

$$P, Q, R.$$

При $n=2$ имеем сумму двух чисел

$$x_1 + x_2,$$

для которой возможно пять значений

$$-2, -1, 0, +1, +2,$$

и вероятности этих значений, как не трудно видеть, соответственно равны

$$Pr, Pq + Qp', Pr + Qq' + Rp'', Qr' + Rq'', Rr''.$$

Для суммы

$$x_1 + x_2 + x_3$$

возможно уже семь значений

$$-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3,$$

и вероятностями их по порядку будут

$$\begin{aligned} &Ppp, P(pq + qp') + Qp'p, P(pr + qq' + rp'') + \\ &\quad + Q(p'q + q'p') + Rp''p, \\ &P(qr' + rq'') + Q(p'r + q'q' + r'p'') + R(p''q + q''p'), \\ &Prr'' + Q(q'r' + r'q'') + R(p''r + q''q' + r''p''), \\ &Qr'r'' + R(q''r' + r''q''), Rr''r''. \end{aligned}$$

Поступая затем подобно тому, как в упомянутой статье „Исследование замечательного случая...“ для последовательного увеличения числа n на единицу, представим вероятность равенства

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m,$$

для любых данных значений n и m , в виде суммы

$$\bar{P}_{m,n} + P_{m,n} + \bar{P}_{m,n}^+$$

обозначая символами

$$\bar{P}_{m,n}, P_{m,n}, \bar{P}_{m,n}^+$$

вероятности выполнения того же равенства и добавочного условия, которое соответственно порядку вероятностей выражается равенствами

$$x_n = -1, \quad x_n = 0, \quad x_n = +1.$$

При таких обозначениях не трудно установить следующие уравнения

$$\bar{P}_{m,n+1} = p\bar{P}_{m+1,n} + p'P_{m+1,n} + p''\bar{P}_{m+1,n}^+,$$

$$\begin{aligned} P_{m,n+1} &= q\bar{P}_{m,n} + q'P_{m,n} + q''\bar{P}_{m,n}^+, \\ \bar{P}_{m,n+1}^+ &= r\bar{P}_{m-1,n} + r'P_{m-1,n} + r''\bar{P}_{m-1,n}^+ \end{aligned} \quad (2)$$

при

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Этими уравнениями можно пользоваться для последовательного вычисления вероятностей

$$\bar{P}_{m,n}, P_{m,n}, \bar{P}_{m,n}^+$$

при

$$n = 2, 3, 4, \dots;$$

надо только принять во внимание основные равенства

$$\bar{P}_{-1,1} = P, P_{0,1} = Q, \bar{P}_{1,1}^+ = R \quad (3)$$

и заметить, что все остальные выражения

$$\bar{P}_{m,1}, P_{m,1}, \bar{P}_{m,1}^+$$

должны равняться нулю, как вероятности невозможных предположений.

Мы находим таким образом

$$\begin{aligned} \bar{P}_{-2,2} &= pP, \bar{P}_{-1,2} = p'Q, \bar{P}_{0,2} = p''R, \\ P_{-1,2} &= qP, P_{0,2} = q'Q, P_{1,2} = q''R, \\ \bar{P}_{0,2}^+ &= rP, \bar{P}_{1,2}^+ = r'Q, \bar{P}_{2,2}^+ = r''R, \end{aligned}$$

остальные же выражения

$$\bar{P}_{m,2}, P_{m,2}, \bar{P}_{m,2}^+$$

равны нулю; затем получаем

$$\begin{aligned} \bar{P}_{-3,3} &= ppP, \bar{P}_{-2,3} = pp'Q + p'qP, P_{-2,3} = pqP, \bar{P}_{-2,3}^+ = 0, \\ \bar{P}_{-2,3} + P_{-2,3} + \bar{P}_{-2,3}^+ &= P(pq + qp') + Qp'p \end{aligned}$$

и т. д.

Устраняя из наших рассмотрений случай, когда определитель

$$\begin{vmatrix} p, & p', & p'' \\ q, & q', & q'' \\ r, & r', & r'' \end{vmatrix}$$

равен нулю, мы можем ввести еще три числа

$$\bar{P}_{0,0}, P_{0,0}, \bar{P}_{0,0}^+$$

определяя их уравнениями

$$P = p\bar{P}_{0,0} + p'P_{0,0} + p''\bar{P}_{0,0}^+,$$

$$Q = q\bar{P}_{0,0} + q'P_{0,0} + q''\bar{P}_{0,0}^+,$$

$$R = r\bar{P}_{0,0} + r'P_{0,0} + r''\bar{P}_{0,0}^+,$$

в силу которых имеем

$$\bar{P}_{0,0} + P_{0,0} + \bar{P}_{0,0}^+ = 1.$$

Если вместе с тем символам

$$\bar{P}_{m,0} + P_{m,0}, \bar{P}_{m,0}^+$$

при m , отличном от нуля, мы придадим значение нуль, то можем распространить найденные нами уравнения и на случай $n=0$.

§ 2. Введя вспомогательное переменное t и его функции

$$\bar{\varphi}_n = \sum \bar{P}_{m,n} t^m, \quad \varphi_n = \sum P_{m,n} t^m, \quad \bar{\varphi}_n^+ = \sum \bar{P}_{m,n}^+ t^m, \quad (4)$$

$$\Phi_n = \bar{\varphi}_n + \varphi_n + \bar{\varphi}_n^+,$$

мы, во-первых, можем определить вероятность равенства

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$$

как коэффициент при t^m в разложении Φ_n по степеням t и, во-вторых, из уравнений (2) вывести

$$\begin{aligned} t\bar{\varphi}_{n+1} &= p\bar{\varphi}_n + p'\varphi_n + p''\varphi_n^+, \\ \varphi_{n+1} &= q\bar{\varphi}_n + q'\varphi_n + q''\varphi_n^+, \\ \frac{1}{t}\varphi_{n+1}^+ &= r\bar{\varphi}_n + r'\varphi_n + r''\varphi_n^+. \end{aligned} \quad (5)$$

А из этих последних уравнений вытекает для всех функций

$$\bar{\varphi}_n, \varphi_n, \varphi_n^+, \Phi_n$$

одно и то же линейное уравнение в конечных разностях, которое мы можем представить для функции Φ_n довольно просто в символическом виде

$$\begin{vmatrix} p - t\Phi, & p', & p'' \\ q, & q' - \Phi, & q'' \\ r, & r', & r'' - \frac{1}{t}\Phi \end{vmatrix} \Phi^n = 0, \quad (6)$$

где по выполнении указанных выкладок следует вместо

$$\Phi^{n+3}, \Phi^{n+2}, \Phi^{n+1}, \Phi^n$$

поставить

$$\Phi_{n+3}, \Phi_{n+2}, \Phi_{n+1}, \Phi_n,$$

причем

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Мы обращаем внимание на символический вид уравнения на том основании, что он ясно обнаруживает, как распространяются наши выводы на другие случаи, более общего характера, когда x_k может иметь более трех различных значений.

В обыкновенном виде уравнение (6) представится так:

$$\Phi_{n+3} - A\Phi_{n+2} + B\Phi_{n+1} - D\Phi_n = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{p}{t} + q' + r''t, \quad B = \frac{pq' - p'q}{t} + pr'' - p''r + (q'r'' - q''r')t, \\ D &= pq'r'' - pq''r' + p'q''r - p'qr'' + p''qr' - p''q'r. \end{aligned} \quad (7)$$

С другой стороны, согласно нашим обозначениям, имеем

$$\Phi_0 = 1$$

и прямое рассмотрение случаев $n=1$ и $n=2$ дает нам

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= P \frac{1}{t} + Q + Rt, \\ \Phi_2 &= Pp \frac{1}{t^2} + (Pq + Qp') \frac{1}{t} + Pr + Qq' + Rp'' + \\ &\quad + (Qr' + Rq'')t + Rr''t^2. \end{aligned}$$

По этим данным мы можем найти, на основании уравнения (6), все остальные функции Φ_n . И не трудно видеть, что все функции Φ_n можно определить как коэффициенты при z^n в разложении по возрастающим степеням нового вспомогательного переменного z некоторой рациональной его функции

$$\frac{f(t, z)}{F(t, z)},$$

знаменатель которой определяется формулой

$$F(t, z) = - \begin{vmatrix} pz - t, & p'z, & p''z \\ qz, & q'z - 1, & q''z \\ rz, & r'z & r''z - \frac{1}{t} \end{vmatrix} = 1 - Az + Bz^2 - Dz^3, \quad (8)$$

а числитель представляет целую функцию второй степени относительно z .

Функция $f(t, z)$ определяется тремя первыми членами правой части формулы

$$\frac{f(t, z)}{F(t, z)} = \Phi_0 + \Phi_1 z + \Phi_2 z^2 + \dots + \Phi_n z^n + \dots; \quad (9)$$

простое умножение ряда, стоящего в правой части формулы (9), на $F(t, z)$ дает нам

$$f(t, z) = \Phi_0 + (\Phi_1 - A\Phi_0)z + (\Phi_2 - A\Phi_1 + B\Phi_0)z^2.$$

Для нашей цели важно заметить, что при $t=1$ все функции Φ_n должны приводиться к единице, и, следовательно,

$$\frac{f(1, z)}{F(1, z)} = \frac{1}{1-z}. \quad (10)$$

§ 3. Найденные формулы мы приложим к вычислению математических ожиданий различных степеней суммы

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - na,$$

причем число a подберем таким образом, чтобы математическое ожидание первой степени этой суммы оставалось конечным при беспредельном возрастании числа n .

Так как в функции Φ_n , согласно определению ее, коэффициентом при любой данной степени t служит вероятность, что сумма

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

равна показателю этой степени, то вероятность, что сумма

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - na$$

равна данному числу, мы можем определить разложением по степеням t произведения

$$t^{-na} \Phi_n,$$

как коэффициент в этом произведении при той степени t , показатель которой равен данному числу.

Отсюда не трудно заключить, что математическое ожидание

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n - na)^i,$$

где i — любое целое положительное число, можно получить при помощи произведения

$$t^{-na} \Phi_n$$

следующим образом.

Полагаем

$$t = e^u,$$

затем составляем производную

$$\frac{d^i t^{-na} \Phi_n}{du^i}$$

и в ней приравняем u нулю; полученный таким образом результат

$$\left\{ \frac{d^i t^{-na} \Phi_n}{du^i} \right\}_{u=0}$$

даст нам искомое математическое ожидание; переход от t к e^u нам нужен для того, чтобы при дифференцировании не изменялись показатели.

Вместе с тем не трудно видеть, что ряд

$$\Phi_0 + t^{-a} \Phi_1 z + t^{-2a} \Phi_2 z^2 + \dots + t^{-na} \Phi_n z^n + \dots$$

получается из ряда

$$\Phi_0 + \Phi_1 z + \Phi_2 z^2 + \dots + \Phi_n z^n + \dots$$

посредством замены числа z произведением

$$t^{-a} z.$$

Следовательно, на основании формулы (9), имеем

$$\frac{f(t, zt^{-a})}{F(t, zt^{-a})} = \Phi_0 + t^{-a} \Phi_1 z + t^{-2a} \Phi_2 z^2 + \dots \quad (11)$$

и математическое ожидание

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n - na)^i$$

можем определить как коэффициент при z^n в разложении выражения

$$\frac{d^i}{du^i} \left(\frac{f(e^u, ze^{-au})}{F(e^u ze^{-au})} \right)_{u=0} \quad (12)$$

по возрастающим степеням z .

§ 4. Остановимся на математическом ожидании первой степени

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = na,$$

чтобы найти число a .

Это математическое ожидание, согласно нашим выводам, выражается коэффициентом при z^n в разложении по возрастающим степеням числа z такой его функции

$$\frac{f'_{u=0}(e^u, ze^{-au})}{F(1, z)} = \frac{f(1, z)}{F(1, z)} \frac{F'_{u=0}(e^u, ze^{-au})}{F(1, z)}, \quad (13)$$

где символы

$$f'_{u=0}(e^u, ze^{-au}) \quad \text{и} \quad F'_{u=0}(e^u, ze^{-au})$$

означают соответственно значения производных

$$\frac{df(e, ze^{-au})}{du} \quad \text{и} \quad \frac{dF(e^u, ze^{-au})}{du}$$

при $u = 0$.

Для исследования разложения указанной функции по возрастающим степеням z мы прежде всего займемся разложением ее на простейшие дроби, причем для нашей цели важно выделить только одну дробь со знаменателем $(1 - z)^l$.

Знаменателями искомых простейших дробей, очевидно, могут быть только простые множители целой функции $F(1, z)$.

Одним из множителей функции $F(1, z)$ служит

$$1 - z,$$

так как ее значение при $z = 1$ выражается определителем

$$= \begin{vmatrix} p-1 & p' & p'' \\ q & q'-1 & q'' \\ r & r' & r''-1 \end{vmatrix},$$

который в силу основных условий

$$p + q + r = p' + q' + r' = p'' + q'' + r'' = 1$$

равен нулю.

Обращаясь к другим простым множителям функции $F(1, z)$, положим

$$F(1, z) = (1 - z)(1 - y_1 z)(1 - y_2 z); \quad (14)$$

здесь числа

$$1, y_1, y_2$$

представляют три корня уравнения

$$\begin{vmatrix} p - y, & p', & p'' \\ q, & q' - y, & q'' \\ r, & r' & r'' - y \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Относительно этого уравнения мы докажем, что корень его единица — простой и что модули остальных его корней меньше единицы.

Для этой цели составляем производную по y от левой части уравнения (15) и полагаем $y = 1$; результат мы можем представить в виде суммы трех разностей

$$\{q'' r' - (1 - q')(1 - r'')\} + \{p'' r - (1 - p)(1 - r'')\} + \\ + \{p' q - (1 - p)(1 - q')\},$$

ни одна из которых не может быть положительным числом и которые могут все одновременно обратиться в нуль только в исключенных нами случаях, когда по крайней мере одно из чисел

$$p, q', r''$$

равно единице.

Убедившись таким образом, что единица — простой, а не кратный корень уравнения (15), переходим к другим корням

$$y_1, y_2$$

того же уравнения, отличным от единицы.

Пусть y — одно из двух чисел

$$y_1, y_2,$$

безразлично какое.

К этому числу y можно подобрать систему чисел

$$\alpha, \beta, \gamma,$$

не состоящую из одних нулей и удовлетворяющую уравнениям

$$\begin{aligned}\alpha y &= p\alpha + q\beta + r\gamma, \\ \beta y &= p'\alpha + q'\beta + r'\gamma, \\ \gamma y &= p''\alpha + q''\beta + r''\gamma.\end{aligned}$$

Разности

$$\alpha - \beta, \quad \alpha - \gamma, \quad \beta - \gamma$$

также не могут все быть равными нулю, так как при

$$\alpha = \beta = \gamma$$

из уравнений, обуславливающих значения α, β, γ , вытекает равенство

$$y = 1.$$

Остановимся на той из разностей

$$\alpha - \beta, \quad \alpha - \gamma, \quad \beta - \gamma,$$

которая имеет наибольший модуль; пусть она будет $\alpha - \beta$.

Соответственно этой разности вычитаем βy из αy , что дает нам такое равенство:

$$(\alpha - \beta)y = (p - p')\alpha + (q - q')\beta + (r - r')\gamma.$$

Здесь множители

$$p - p', \quad q - q', \quad r - r'$$

при α, β, γ по числовой величине меньше единицы и так как их сумма равна нулю, то один из них имеет знак $\pm$, противоположный знаку $\mp$ двух остальных, и по числовой величине равен их сумме.

Для определенности положим, что $p - p'$ и $q - q'$ имеют один знак, а $r - r'$ — другой.

При таком предположении, заменяя в вышеприведенном равенстве разность $r - r'$ равною ей суммою разностей

$$p' - p + q' - q,$$

получаем

$$y = (p - p') \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \beta} + (q - q') \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \beta},$$

и потому

$$\begin{aligned} \text{мод. } y &\leq \text{числ. знач. } (p - p') + \text{числ. зн. } (q - q') = \\ &= \text{числ. зн. } (r - r') < 1. \end{aligned}$$

Итак, модули коэффициентов y_1, y_2 , входящих в разложение (14) функции $F(1, z)$ на простые множители, меньше единицы.

Поэтому в известных разложениях, по возрастающим степеням z , дробей вида

$$\frac{1}{(1 - y_1 z)^l} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(1 - y_2 z)^l}$$

коэффициенты при z^n должны стремиться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$.

Что же касается разложения, по возрастающим степеням z , дробей вида

$$\frac{1}{(1 - z)^l},$$

то в силу формулы

$$E_n = \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+l-1)}{1 \cdot 2 \dots (l-1)},$$

определяющей коэффициенты этого разложения

$$\frac{1}{(1+z)^l} = 1 + E_1 z + E_2 z^2 + \dots + E_n z^n + \dots,$$

имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{n^{l-1}} = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (l-1)} \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{n^{l-1+\varepsilon}} = 0,$$

где ε означает любое данное положительное число.

Применяя наши выводы к функции (13), заключаем, что в разложении ее, по возрастающим степеням z , коэффициент при z^n , равный математическому ожиданию суммы

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - na,$$

возрастает беспредельно вместе с n в тех, и только в тех, случаях, когда дробь

$$\frac{f(1, z)}{F(1, z)} \cdot \frac{F'_{u=0}(e^u, ze^{-au})}{F(1, z)}$$

не сокращается на $1 - z$.

Желая, чтобы это математическое ожидание не возрастало беспредельно вместе с n , и принимая во внимание, что в силу установленного раньше равенства

$$\frac{f(1, z)}{F(1, z)} = \frac{1}{1 - z}$$

целая функция $f(1, z)$ не может содержать множителя $1 - z$, мы должны дать a такое значение, чтобы множитель $1 - z$ содержался в функции

$$F'_{u=0}(e^u, ze^{-au}).$$

Таким образом мы приходим к уравнению

$$F'_{u=0}(e^u, e^{-au}) = 0,$$

которое не трудно привести к следующему виду:

$$a \left\{ \frac{dF(1, z)}{dz} \right\}_{z=1} + \left\{ \frac{dF(t, 1)}{dt} \right\}_{t=1} = 0. \quad (16)$$

Коэффициенты этого уравнения, которое допускает одно и только одно решение, можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{dF(1, z)}{dz} \right\}_{z=1} &= q'' r' - (1 - q')(1 - r'') + p'' r - \\ &- (1 - p)(1 - r'') + p' q - (1 - p)(1 - q'), \\ \left\{ \frac{dF(t, 1)}{dt} \right\}_{t=1} &= (1 - q')(1 - r'') - q'' r' - (1 - p)(1 - q') + p' q. \end{aligned} \quad (17)$$

§ 5. Перейдем к рассмотрению высших степеней суммы

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - na$$

при найденной нами величине a .

По доказанному, математическое ожидание

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n - na)^i$$

можно определить как коэффициент при z^n в разложении по возрастающим степеням произвольного числа z следующей его функции

$$\frac{d^i}{du^i} \left(\frac{f(e^u, ze^{-au})}{F(e^u, ze^{-au})} \right)_{u=0}.$$

Приступая к исследованию этой функции, мы для сокращения письма положим

$$\begin{aligned} f(e^u, ze^{-au}) &= U, \quad F(e^u, ze^{-au}) = V, \\ \frac{d^i V}{du^i} &= V^{(i)}, \quad \frac{d^i U}{du^i} = U^{(i)}. \end{aligned} \quad (18)$$

При таких обозначениях по формуле для дифференцирования произведения имеем

$$\frac{d^i}{du^i} \left(\frac{U}{V} \right) = U \frac{d^i}{du^i} \left(\frac{1}{V} \right) + \frac{i}{1} U' \frac{d^{i-1}}{du^{i-1}} \left(\frac{1}{V} \right) + \dots \quad (19)$$

и по формуле дифференцирования функции от функции получаем

$$\frac{d^i}{du^i} \left(\frac{1}{V} \right) = \sum \frac{i! j!}{V^{j+1}} \cdot \frac{(-V')^\lambda}{\lambda!} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2} V'' \right)^\mu}{\mu!} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2 \cdot 3} V''' \right)^\nu}{\nu!} \dots, \quad (20)$$

где суммирование надо распространить на все возможные совокупности целых чисел

$$j, \lambda, \mu, \nu, \dots,$$

удовлетворяющие двум уравнениям

$$\begin{aligned} \lambda + \mu + \nu + \dots &= j, \\ \lambda + 2\mu + 3\nu + \dots &= i \end{aligned} \quad (21)$$

и неравенствам

$$0 < j \leq i, \quad \lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \nu \geq 0, \dots$$

Мы имеем в виду доказать, что при беспредельном возрастании числа n отношение математического ожидания

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n - na)^i$$

к $n^{\frac{i}{2}}$ стремится к пределу, равному произведению

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} C^{\frac{i}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^i e^{-t^2} dt,$$

где C означает некоторое постоянное число.

Для этой цели, в виду предыдущих выводов, надо выяснить, что знаменатель рациональной функции числа z , представляемой значением производной

$$\frac{d^i}{du^i} \left(\frac{U}{V} \right)$$

при $u=0$, может содержать множитель $1-z$, конечно после надлежащих сокращений, только в степени, не превосходящей $\frac{i+1}{2}$ для i нечетного и не превосходящей $\frac{i}{2}+1$ для i четного.

Рассматривая при $u=0$ одно из произведений

$$U^{(i)} \frac{d^{i-l}}{du^{i-l}} \left(\frac{1}{V} \right),$$

входящих в формулу (19), мы замечаем, что множитель $1 - z$ не может содержаться в знаменателе этого произведения в высшей степени, чем в знаменателе второго множителя

$$\frac{d^{i-l}}{du^{i-l}} \left(\frac{1}{V} \right)_{u=0}.$$

А об этом втором множителе мы можем сделать важные для нас заключения на основании формулы (20), заменяя в ней число i разностью $i - l$.

В самом деле, не трудно видеть, что при выбранном нами значении a общий член

$$\frac{i! j!}{V^{j+1}} \cdot \frac{(-V')^\lambda}{\lambda!} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2} V''\right)^\mu}{\mu!} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2 \cdot 3} V'''\right)^\nu}{\nu!} \dots$$

формулы (20) приводится при $u=0$ к такой несократимой дроби, знаменатель которой содержит множитель $1 - z$ в степени не больше

$$j + 1 - \lambda,$$

так как при $u=0$ функция V' содержит множитель $1 - z$, функция же V не делится на $(1 - z)^2$.

С другой стороны, из условий, ограничивающих величины

$$j, \lambda, \mu, \nu, \dots,$$

не трудно вывести неравенство

$$\lambda \geq 2j - i, \tag{22}$$

которое ограничивает значения λ при $2j > i$.

Пока $2j < i$, разность

$$j + 1 - \lambda,$$

где $\lambda \geq 0$, остается, очевидно, меньше $\frac{i}{2} + 1$; в силу неравенства (22) разность

$$j + 1 - \lambda$$

остается меньше $\frac{i}{2} + 1$ и при $2j > i$ и только при $j = \frac{i}{2}$, если такое значение возможно, и при $\lambda = 0$ она может достигнуть значения $\frac{i}{2} + 1$.

Останавливаясь на предположении

$$i = 2j, \quad \lambda = 0,$$

которое возможно только при i четном, находим, что этому предположению соответствует только один член формулы (20).

$$\frac{1 \cdot 2 \dots i}{2^{\frac{i}{2}}} \cdot \frac{(-V'')^{\frac{i}{2}}}{V^{\frac{i}{2} + 1}},$$

так как при $j = \frac{i}{2}$ и $\lambda = 0$ из уравнений (21) и присоединенных к ним неравенств следует

$$\mu = \frac{i}{2}.$$

Следовательно, при i нечетном ни одна из дробей, к которым приводятся производные

$$\frac{d^i}{du^i} \left(\frac{1}{V} \right), \quad \frac{d^{i-1}}{du^{i-1}} \left(\frac{1}{V} \right), \quad \frac{d^{i-2}}{du^{i-2}} \left(\frac{1}{V} \right), \dots,$$

когда мы полагаем $u = 0$, не может содержать в знаменателе, конечно после надлежащих сокращений, множитель $1 - z$ в степени выше $\frac{i+1}{2}$, а при i четном только первая из этих дробей, получаемая из производной

$$\frac{d^i}{du^i} \left(\frac{1}{V} \right),$$

может содержать в знаменателе множитель $1 - z$ в степени $\frac{i}{2} + 1$; если же из этой первой дроби вычесть выражение

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i}{2^{\frac{i}{2}}} \cdot \frac{(-V'')^{\frac{i}{2}}}{V^{\frac{i}{2} + 1}}$$

при $u = 0$, то разность после надлежащего сокращения приводится к такой дроби, знаменатель которой содержит множитель $1 - z$ в степени меньшей $\frac{i}{2} + 1$.

Сопоставляя этот результат с формулой (19) и принимая во внимание обозначение (18), заключаем, что при i нечетном рассматриваемое нами выражение

$$\frac{d^i}{du^i} \left(\frac{f(e^u, ze^{-au})}{F(e^u, ze^{-au})} \right)_{u=0} \quad (12)$$

приводится к такой рациональной дробной функции числа z , знаменатель которой содержит множитель $1 - z$ в степени меньшей $\frac{i}{2} + 1$.

А отсюда, в силу выводов исследований §§ 3 и 4, тотчас вытекает, что при i нечетном отношение

$$\frac{\text{м. о. } (x_1 + x_2 + \dots + x_n - na)^i}{n^{\frac{i}{2}}}$$

должно приближаться к пределу нуль, когда n возрастает беспредельно.

Не трудно также найти ту простую дробь со знаменателем $(1 - z)^{\frac{i}{2} + 1}$, которую надо выделить из выражения (12), чтобы знаменатель остатка не содержал множителя $(1 - z)^{\frac{i}{2} + 1}$, а мог содержать только низшие степени $1 - z$.

В самом деле, эта дробь должна совпадать с той, по выделении которой из выражения

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i}{2^{\frac{i}{2}}} \left(\frac{U}{V} \right)_{u=0} \left(\frac{-V''}{V} \right)_{u=0}^{\frac{i}{2}}$$

остается дробь, не содержащая в знаменателе множителя $1 - z$ в степени выше $\frac{i}{2} - 1$.

На этом основании, принимая во внимание равенство

$$\left(\frac{U}{V} \right)_{u=0} = \frac{1}{1-z}, \quad (10)$$

установленное в § 2, находим, что искомую дробь можно представить в таком виде

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i}{2^i} \cdot \frac{C^{\frac{i}{2}}}{(1-z)^{\frac{i}{2}+1}},$$

где число C определяется формулою

$$\frac{1}{2} C = \frac{F'_{u=0}(e^u, e^{-au})}{F'_{s=1}(1, z)}. \quad (23)$$

Придя к такому выводу и сопоставив его с исследованиями §§ 3 и 4, мы уже без большого труда убеждаемся, что отношение

$$\frac{\text{м. о. } (x_1 + x_2 + \dots + x_n - na)^i}{n^{\frac{i}{2}}}$$

при i четном стремится к пределу

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i}{2^i \cdot 1 \cdot 2 \dots \frac{i}{2}} C^{\frac{i}{2}},$$

когда n возрастает беспрестанно.

Остается принять во внимание, что интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^i e^{-t^2} dt$$

при i нечетном равен нулю, а при i четном равен числу

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i}{2^i \cdot 1 \cdot 2 \dots \frac{i}{2}},$$

и мы приходим к окончательному заключению.

Если число a определено уравнением (16), а число C — формулою (23), то должно быть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{м. о.} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - na}{\sqrt{n}} \right)^i = \frac{1}{\sqrt{\pi}} C^{\frac{i}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^i e^{-t^2} dt,$$

как при i нечетном, так и при i четном, и, следовательно, при беспредельном возрастании числа n вероятность выполнения неравенств

$$t_1 \sqrt{Cn} < x_1 + x_2 + \dots + x_n - na < t_2 \sqrt{Cn},$$

где t_1 и t_2 — любые данные числа, причем $t_2 > t_1$, должна приближаться к пределу, равному

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt.$$

§ 6. Рассмотрев один случай величин, связанных в цепь, и заметив, что этот случай не представляет никаких характерных особенностей, а отличается от других только простотою данных, мы можем в немногих словах перенести наши выводы и на общий случай величин, связанных в цепь, установленный в вышеупомянутой статье „Распространение закона больших чисел...“.

Придерживаясь обозначений этой статьи, положим, что различными возможными значениями чисел цепи

$$x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} \dots$$

будут

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots \quad (24)$$

и что система

$$\begin{array}{lll} p_{\alpha, \alpha}, & p_{\alpha, \beta}, & p_{\alpha, \gamma}, \dots \\ p_{\beta, \alpha}, & p_{\beta, \beta}, & p_{\beta, \gamma}, \dots \\ p_{\gamma, \alpha}, & p_{\gamma, \beta}, & p_{\gamma, \gamma}, \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \quad (25)$$

представляет вероятности, при данных значениях x_k , величине x_{k+1} иметь определенные значения, причем первый значок у p указывает данную величину x_k , а второй — предполагаемую величину x_{k+1} .

Числами (24) и (25) определяются наши окончательные заключения, но для постановки вполне определенной задачи мы должны ввести еще числа

$$p'_\alpha, p'_\beta, p'_\gamma, \dots,$$

которые, подобно числам P, Q, R частного случая, исчезают в окончательных выводах и соответственно служат вероятностями равенств

$$x_1 = \alpha, \quad x_1 = \beta, \quad x_1 = \gamma, \dots,$$

пока все величины нашей цепи

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

остаются неопределенными.

Приступая к рассмотрению различных предположений о величине суммы

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

обозначим вероятность равенства

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$$

символом $P_{m, n}$ и введем функцию Φ_n произвольного числа t , определяемую формулой

$$\Phi_n = \sum P_{m, n} t^m. \quad (26)$$

Поступая затем так же, как в частном случае, разлагаем $P_{m, n}$ на слагаемые

$$P_{m, n} = \overset{\alpha}{P}_{m, n} + \overset{\beta}{P}_{m, n} + \overset{\gamma}{P}_{m, n} + \dots \quad (27)$$

и вводим ряд функций

$$\overset{\alpha}{\Phi}_n = \sum \overset{\alpha}{P}_{m, n} t^m, \quad \overset{\beta}{\Phi}_n = \sum \overset{\beta}{P}_{m, n} t^m, \dots \quad (28)$$

подразумевая под символами

$$\overset{\alpha}{P}_{m, n}, \quad \overset{\beta}{P}_{m, n}, \quad \overset{\gamma}{P}_{m, n} \dots$$

вероятности выполнения того же равенства

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$$

и добавочного условия, которое соответственно выражается одним из равенств

$$x_n = \alpha, \quad x_n = \beta, \quad x_n = \gamma, \dots$$

При таких обозначениях не трудно, согласно условиям вопроса, установить уравнения

$$\begin{aligned} \overset{\alpha}{P}_{m, n} &= \overset{\alpha}{P}_{m-\alpha, n-1} P_{\alpha, \alpha} + \overset{\beta}{P}_{m-\alpha, n-1} P_{\beta, \alpha} + \dots, \\ \overset{\beta}{P}_{m, n} &= \overset{\alpha}{P}_{m-\beta, n-1} P_{\alpha, \beta} + \overset{\beta}{P}_{m-\beta, n-1} P_{\beta, \beta} + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

и от них перейти к уравнениям

$$\begin{aligned}\Phi_n^\alpha t^{-\alpha} &= p_{\alpha, \alpha} \Phi_{n-1}^\alpha + p_{\beta, \alpha} \Phi_{n-1}^\beta + p_{\gamma, \alpha} \Phi_{n-1}^\gamma + \dots, \\ \Phi_n^\beta t^{-\beta} &= p_{\alpha, \beta} \Phi_{n-1}^\alpha + p_{\beta, \beta} \Phi_{n-1}^\beta + p_{\gamma, \beta} \Phi_{n-1}^\gamma + \dots, \\ \Phi_n^\gamma t^{-\gamma} &= p_{\alpha, \gamma} \Phi_{n-1}^\alpha + p_{\beta, \gamma} \Phi_{n-1}^\beta + p_{\gamma, \gamma} \Phi_{n-1}^\gamma + \dots, \\ &\dots\end{aligned}\tag{29}$$

А из уравнений (29) вытекает для всех функций

$$\Phi_n^\alpha, \Phi_n^\beta, \Phi_n^\gamma, \dots$$

и для

$$\Phi_n = \Phi_n^\alpha + \Phi_n^\beta + \Phi_n^\gamma + \dots$$

одно и то же линейное однородное уравнение в конечных разностях, которое мы можем представить довольно просто в символическом виде

$$\begin{vmatrix} p_{\alpha, \alpha} - t^{-\alpha} \Phi, & p_{\beta, \alpha}, & p_{\gamma, \alpha}, & \dots \\ p_{\alpha, \beta}, & p_{\beta, \beta} - t^{-\beta} \Phi, & p_{\gamma, \beta}, & \dots \\ p_{\alpha, \gamma}, & p_{\beta, \gamma}, & p_{\gamma, \gamma} - t^{-\gamma} \Phi, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \Phi^n = 0,\tag{30}$$

где по выполнению указанных выкладок следует вместо

$$\Phi^n, \Phi^{n+1}, \Phi^{n+2}, \dots$$

поставить

$$\Phi_n, \Phi_{n+1}, \Phi_{n+2}, \dots$$

В силу этого уравнения все функции

$$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$$

можно определить как коэффициенты в разложении по возрастающим степеням второго вспомогательного числа z

некоторой рациональной его функции

$$\frac{f(t, z)}{F(t, z)},$$

знаменатель которой определяется формулой

$$F(t, z) = \begin{vmatrix} p_{\alpha, \alpha} z - t^{-\alpha}, & p_{\beta, \alpha} z, & p_{\gamma, \alpha} z, & \dots \\ p_{\alpha, \beta} z, & p_{\beta, \beta} z - t^{-\beta}, & p_{\gamma, \beta} z, & \dots \\ p_{\alpha, \gamma} z, & p_{\beta, \gamma} z, & p_{\gamma, \gamma} z - t^{-\gamma}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}. \quad (31)$$

Прежде чем перейти к дальнейшим выводам, необходимо отметить, что мы рассматриваем только такие цепи

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

где появление одних из чисел

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

не исключает окончательно возможности появления прочих. Это важное условие можно выразить при помощи определителей таким образом: определитель

$$\begin{vmatrix} u, & p_{\beta, \alpha}, & p_{\gamma, \alpha}, & \dots \\ p_{\alpha, \beta}, & v, & p_{\gamma, \beta}, & \dots \\ p_{\alpha, \gamma}, & p_{\beta, \gamma}, & w, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

с произвольными элементами

$$u, v, w, \dots$$

не приводится к произведению нескольких определителей того же типа.

Этого условия для наших целей, однако, не достаточно, и мы должны предположить,* что указанный нами опреде-

* Наши выводы можно распространить и на многие из исключенных нами случаев.

литель не приводится явным образом к произведению нескольких определителей и при

$$u = p_{\alpha, \alpha}, \quad v = p_{\beta, \beta}, \quad w = p_{\gamma, \gamma}, \dots$$

Как в частном случае, так и в общем наши выводы относятся к математическому ожиданию степени

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n - na)^i,$$

где число a мы определяем условием, чтобы при $i=1$ это математическое ожидание не могло возрасти беспредельно вместе с n .

Установив попрежнему, что рассматриваемое математическое ожидание можно выразить коэффициентом при z^n в разложении, по возрастающим степеням z , значения производной

$$\frac{d^i}{du^i} \left\{ \frac{f(e^u, ze^{-au})}{F(e^u, ze^{-au})} \right\}$$

при $u=0$, замечаем, что для перенесения заключений частного случая на общий нам надо рассматривать разложение функции $F(1, z)$ на простые множители

$$F(1, z) = \pm (1 - z)(1 - y_1 z)(1 - y_2 z) \dots$$

и доказать, что множитель $1 - z$ встречается в этом разложении только один раз и что модули чисел

$$y_1, y_2, \dots$$

меньше единицы.

Другими словами, мы должны убедиться, что единица служит простым, а не кратным корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} p_{\alpha, \alpha} - y, & p_{\beta, \alpha}, & p_{\gamma, \alpha}, & \dots \\ p_{\alpha, \beta}, & p_{\beta, \beta} - y, & p_{\gamma, \beta}, & \dots \\ p_{\alpha, \gamma}, & p_{\beta, \gamma}, & p_{\gamma, \gamma} - y, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0 \quad (32)$$

и что модули остальных корней

$$y_1, y_2, \dots$$

того же уравнения меньше единицы.

Для доказательства, что единица простой, а не кратный корень уравнения (32), может служить следующее предложение относительно определителей.

Если все элементы определителя

$$\begin{vmatrix} u, & -b_1, & -c_1, & \dots \\ -a_1, & v, & -c_2, & \dots \\ -a_2, & -b_2, & w, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

удовлетворяют неравенствам

$$a_k \geq 0, \quad b_k \geq 0, \quad c_k \geq 0, \dots \quad (*)$$

и неравенствам

$$u \geq a_1 + a_2 + \dots, \quad v \geq b_1 + b_2 + \dots, \quad w \geq c_1 + c_2 + \dots, \dots, \quad (**)$$

то он не может быть числом отрицательным и может быть нулем только в крайних случаях, когда все неравенства (**) обращаются в равенства или когда он приводится, ввиду обращения некоторых из неравенств (*) в равенства, к произведению нескольких определителей того же типа и среди этих последних находится такой определитель, для которого все неравенства, аналогичные (**), обращаются в равенства.*

Мы убеждаемся в верности этого важного для нас предложения, рассматривая $u, v, w, \dots$ как переменные числа и замечая, что производные от нашего определителя по $u, v, w, \dots$ выражаются подобными же определителями низшего порядка; такое рассмотрение дает возможность постепенно распространять теорему с определителя 2-го порядка, для

* Подобное предложение встречается также в заметке Германа Минковского: Zur Theorie der Einheiten in den algebraischen Zahlkörpern. Nach. v. d. Kön. Gesel. der Wiss. zu Göttingen a. d. J. 1900.

которого она очевидна, на определитель 3-го порядка, с определителя 3-го порядка на определитель 4-го порядка, и т. д.

Из доказанного таким образом предложения тотчас следует, что при поставленных нами условиях производная по y от левой части уравнения (32) не обращается в нуль при $y=1$, так как эта производная, по умножении на ± 1 , может быть представлена в виде суммы определителей

$$\begin{vmatrix} 1 - p_{\beta, \beta} & -p_{\gamma, \beta} & \dots \\ -p_{\beta, \gamma} & 1 - p_{\gamma, \gamma} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 - p_{\alpha, \alpha} & -p_{\gamma, \alpha} & \dots \\ -p_{\alpha, \gamma} & 1 - p_{\gamma, \gamma} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \dots,$$

удовлетворяющих условиям теоремы и не подходящих под крайний случай.

Итак, число единица, которое в силу условий

$$\begin{aligned} p_{\alpha, \alpha} + p_{\alpha, \beta} + p_{\alpha, \gamma} + \dots &= 1, \\ p_{\beta, \alpha} + p_{\beta, \beta} + p_{\beta, \gamma} + \dots &= 1, \\ \vdots & \end{aligned}$$

должно удовлетворять уравнению (32), не может быть кратным корнем этого уравнения.

Обращаясь к другим корням уравнения (32), положим, что y — любой из них.

К этому числу y можно подобрать систему чисел

$$\alpha', \beta', \gamma', \dots,$$

не состоящую из одних нулей и удовлетворяющую уравнениям

$$\begin{aligned} \alpha' y &= p_{\alpha, \alpha} \alpha' + p_{\alpha, \beta} \beta' + p_{\alpha, \gamma} \gamma' + \dots, \\ \beta' y &= p_{\beta, \alpha} \alpha' + p_{\beta, \beta} \beta' + p_{\beta, \gamma} \gamma' + \dots, \\ \gamma' y &= p_{\gamma, \alpha} \alpha' + p_{\gamma, \beta} \beta' + p_{\gamma, \gamma} \gamma' + \dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Числа $\alpha', \beta', \gamma', \dots$ не могут все иметь одно и то же значение, так как при допущении полной системы равенств

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = \dots$$

из уравнений, которым по условию удовлетворяют эти числа, тотчас следует

$$y = 1.$$

Приняв это во внимание, предположим сначала, что числа $\alpha', \beta', \gamma', \dots$ не имеют одного общего модуля. При таком предположении, ввиду поставленных нами условий, среди уравнений, которым подчинены числа $\alpha', \beta', \gamma', \dots$, должно быть, по меньшей мере, одно, где в левой части множителем при y служит какое-нибудь из чисел

$$\alpha', \beta', \gamma', \dots$$

с наибольшим модулем, а в правой части входит с коэффициентом, отличным от нуля, и такое из наших чисел

$$\alpha', \beta', \gamma', \dots,$$

модуль которого не достигает упомянутой наибольшей величины. Отсюда тотчас следует

$$\text{мод. } y < 1,$$

так как сумма коэффициентов при

$$\alpha', \beta', \gamma', \dots$$

в правой части каждого из установленных нами уравнений равна единице.

Перейдем к предположению, что все числа

$$\alpha', \beta', \gamma', \dots$$

имеют один и тот же модуль.

Мы знаем, однако, что они не все равны друг другу. Поэтому совокупность их можно по отношению к первому числу α' разбить на две группы: на группу чисел, равных α' , и на группу чисел, не равных α' , причем последние отличаются от α' величиною аргумента.

С другой стороны, ввиду одного из основных наших условий, совокупность сумм

$$\begin{aligned} p_{\alpha, \alpha} \alpha' + p_{\alpha, \beta} \beta' + p_{\alpha, \gamma} \gamma' + \dots, \\ p_{\beta, \alpha} \alpha' + p_{\beta, \beta} \beta' + p_{\beta, \gamma} \gamma' + \dots, \\ \dots \end{aligned}$$

нельзя разбить на две совокупности так, чтобы из всех чисел

$$\alpha', \beta', \gamma', \dots$$

суммы первой совокупности содержали, с коэффициентами,* отличными от нуля, только равные α' , а суммы второй совокупности только не равные α' .

Следовательно, одна из этих сумм, наверно, содержит, с коэффициентами, отличными от нуля, как числа, равные α' , так и числа, не равные α' ; и потому модуль ее, равный произведению модуля y на модуль α' , должен быть меньше модуля α' , так как для чисел различных аргументов модуль их суммы меньше суммы их модулей, а не равен ей.

Отсюда тотчас вытекает неравенство

$$\text{мод. } y < 1,$$

которое нам надо было доказать.

Доказав таким образом, что в разложении функции $F(1, z)$ на простые множители

$$F(1, z) = \pm (1 - z)(1 - y_1 z)(1 - y_2 z) \dots$$

* В статье „Распространение закона больших чисел...“ я остановился на простейшем предположении, что среди этих коэффициентов вообще нет равных нулю.

множитель $1 - z$ входит только в первой степени, а модули коэффициентов

$$y_1, y_2, \dots$$

меньше единицы, мы можем все дальнейшие рассуждения, проведенные нами для частного случая, перенести без изменения на общий случай.

Ввиду полной неизменности этих рассуждений мы не станем повторять их, а приведем только окончательный вывод.

Если при установленных нами условиях и обозначениях числа a и C мы определим равенствами

$$\alpha = \frac{F'_{t=1}(t, 1)}{F'_{z=1}(1, z)}, \quad \frac{1}{2} C = \frac{F''_{u=0}(e^u, e^{-au})}{F'_{z=1}(1, z)}, \quad (33)$$

которые не приводят ни к невозможным, ни к неопределенным результатам, то должно быть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{пред. м. о.} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - na}{\sqrt{n}} \right)^i = \frac{1}{\sqrt{\pi}} C^{\frac{i}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^i e^{-t^2} dt$$

для любого целого положительного числа i , и, следовательно, при беспредельном возрастании числа n вероятность выполнения неравенств

$$t_1 \sqrt{Cn} < x_1 + x_2 + \dots + x_n - na < t_2 \sqrt{Cn},$$

где t_1 и t_2 — любые данные числа, причем $t_2 > t_1$, должна приближаться к пределу, равному

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt.$$

Относительно чисел a и C можно заметить также, что они соответственно равны пределам, к которым стремятся

$$\text{м. о. } \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \text{ и } 2 \text{ м. о. } \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - na}{\sqrt{n}} \right)^2,$$

когда n возрастает беспредельно.

Это замечание позволяет распространить наши заключения и на те случаи, когда совокупность чисел

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

не исчерпывается конечным числом членов.

Наши выводы можно распространить также и на сложные цепи, в которых каждое число непосредственно связано не с одним, а с несколькими предшествующими ему числами.

О СВЯЗАННЫХ ВЕЛИЧИНАХ, НЕ ОБРАЗУЮЩИХ НАСТОЯЩЕЙ ЦЕПИ

*Доложено в заседании Физико-математического отделения
19 января 1911 г. [1]*

В книге Г. Брунса (H. Bruns. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre) и в статье того же автора „Das Gruppenschema für zufällige Ereignisse“ (Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1906, B. XXIX) рассматриваются замечательные случаи зависимых испытаний, не подходящие под установленное нами понятие о цепи испытаний, к которым, однако, с успехом можно применить метод математических ожиданий.

В цепи испытаний, как мы ее понимаем, все испытания связаны между собой и независимость между некоторыми испытаниями появляется только по установлении результатов известного числа промежуточных испытаний; а в случаях Брунса все испытания, достаточно удаленные друг от друга, оказываются независимыми, пока не установлены результаты промежуточных испытаний, а по установлении этих результатов могут, напротив, оказаться зависимыми друг от друга.

Для выяснения дела мы прежде всего рассмотрим один из простейших случаев Брунса.

§ 1. Пусть ряд чисел

$$w_1, w_2, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n, \dots$$

связан с рядом независимых испытаний¹ таким образом, что w_k равняется 1 или 0, смотря по тому, появилось ли событие A при k -м испытании или нет; пусть вероятность события A при каждом испытании равна α , а вероятность проти-

воположного события B мы обозначим буквою β , так что

$$\alpha + \beta = 1.$$

Пусть, наконец,

$$m = w_1 w_2 + w_2 w_3 + \dots + w_n w_{n+1}.$$

При таких условиях и обозначениях произведение

$$w_k w_{k+1}$$

равно 1 или 0, смотря по тому, появляется ли при паре испытаний с номерами

$$k \text{ и } k+1$$

комбинация AA или нет; число же m , определяемое вышеуказанной суммой, равно числу комбинаций AA во всех парах испытаний:

$$1\text{-е и } 2\text{-е, } 2\text{-е и } 3\text{-е, } 3\text{-е и } 4\text{-е, } \dots, n\text{-е и } n+1\text{-е.}$$

Наши пары испытаний образуют ряд испытаний, в котором связаны друг с другом, по отношению к комбинации AA , только смежные испытания; ибо два произведения

$$w_i w_{i+1} \text{ и } w_k w_{k+1}$$

не зависят друг от друга, если ни одно из равенств

$$i = k, \quad i = k+1, \quad i+1 = k$$

не имеет места.

Рассматривая этот ряд двойных испытаний и называя комбинацию AA событием E , мы займемся разысканием вероятности, что при определенном числе испытаний число появлений события E , т. е. число комбинаций AA , будет лежать в известных границах.

Для намеченной цели вводим ряд обозначений.

Во-первых, символом

$$P_{m, n}$$

обозначим вероятность, что при n испытаниях событие E появится равно m раз. Затем разбиваем эту вероятность на две, полагая

$$P_{m, n} = P_{m, n}^1 + P_{m, n}^0$$

и обозначая символами

$$P_{m, n}^1 \quad \text{и} \quad P_{m, n}^0$$

также вероятность событию E появиться в n испытаний равно m раз, но при добавочном условии, которое для $P_{m, n}^1$ выражается равенством

$$w_{n+1} = 1,$$

а для $P_{m, n}^0$ — равенством

$$w_{n+1} = 0,$$

и без большого труда составляем уравнения

$$P_{m, n}^1 = \alpha P_{m-1, n-1}^1 + \alpha P_{m, n-1}^0,$$

$$P_{m, n}^0 = \beta P_{m-1, n-1}^1 + \beta P_{m, n-1}^0;$$

которые преобразуем в следующие:

$$\varphi_n^{(1)} = \alpha \xi \varphi_{n-1}^{(1)} + \alpha \varphi_{n-1}^{(0)},$$

$$\varphi_n^{(0)} = \beta \varphi_{n-1}^{(1)} + \beta \varphi_{n-1}^{(0)},$$

введя вспомогательное переменное ξ и его функции

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \sum P_{m, n} \xi^m = \varphi_n^{(1)} + \varphi_n^{(0)}, \\ \varphi_n^{(1)} &= \sum P_{m, n}^1 \xi^m, \quad \varphi_n^{(0)} = \sum P_{m, n}^0 \xi^m. \end{aligned}$$

Отсюда для функции φ_n легко выводим линейное уравнение в конечных разностях второго порядка, которое в сим-

волическом виде можно представить так

$$\begin{vmatrix} \alpha\xi - \varphi, & \alpha \\ \beta & , \beta - \varphi \end{vmatrix} \varphi = 0,$$

а по устранении символизма оно будет

$$\varphi_{n+1} - (\alpha\xi + \beta) \varphi_{n+1} + \alpha\beta (\xi - 1) \varphi_n = 0.$$

Соответственно этому уравнению, введя новое вспомогательное переменное t , мы можем установить формулу

$$1 + t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + \dots + t^n\varphi_n + \dots = \frac{C + Dt}{1 - (\alpha\xi + \beta)t + \alpha\beta(\xi - 1)t^2};$$

где C и D определяются равенствами

$$C = 1, D = \varphi_1 - \alpha\xi - \beta = \alpha\beta(1 - \xi).$$

Подобную формулу мы находим у Брунса. Применяя же к данному случаю метод, выясненный нами в статьях „Исследование замечательного случая зависимых испытаний“ [2] и „Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь“ [3], приходим к заключению, что вероятность неравенств

$$t_1 \sqrt{2bn} < m - n\alpha^2 < t_2 \sqrt{2bn},$$

где t_1 и t_2 — любые данные числа, число же b определяется формулой

$$\begin{aligned} b &= -\frac{d^2}{du^2} \{ 1 - (\alpha e^u + \beta) e^{-\alpha^2 u} + \alpha\beta (e^u - 1) e^{-2\alpha^2 u} \}_{u=0} = \\ &= \alpha^2 \beta (1 + 3\alpha), \end{aligned}$$

должна приближаться к пределу, равному

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt,$$

если n возрастает беспрестанно.

Заметим, что в данном случае простые выкладки дают

$$\begin{aligned} \text{м. о. } (m - n\alpha^2)^2 &= n\alpha^2(1 - \alpha^2) + 2(n - 1)\alpha^3(1 - \alpha) = \\ &= n\alpha^2\beta(1 + 3\alpha) - 2\alpha^3\beta, \end{aligned}$$

что мы находим также у Брунса.

§ 2. Сообщая теперь нашим выводам возможно бóльшую общность при сохранении известной простоты, положим, что мы рассматриваем неограниченный ряд чисел

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_k, \dots, x_n, \dots,$$

которые, не образуя настоящей цепи, не представляют, однако, вполне независимых величин, но связаны особым образом: а именно, если числовая величина разности $k - i$ больше некоторого постоянного числа c , то

$$x_i \text{ и } x_k$$

не зависят друг от друга в смысле исчисления вероятностей, если же числовая величина разности $k - i$ не превосходит c , то

$$x_i \text{ и } x_k$$

зависят друг от друга.

Относительно чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n, \dots$$

мы предположим, что квадраты их не могут быть произвольно большими, так что существует постоянное число L , удовлетворяющее неравенству

$$x_n^2 < L^2,$$

при всех возможных значениях x_n , как бы велико ни было число n .

Это предположение, ведущее к значительному упрощению вывода, выполняется, например, когда сумма

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

выражает, известным образом, число появлений некоторого события при n испытаниях.

Введем следующие обозначения

$$\text{м. о. } x_k = a_k, \quad x_k - a_k = z_k$$

и станем рассматривать

$$\text{м. о. } (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^m,$$

при

$$m = 1, 2, 3, \dots,$$

как мы это делали в статьях „Закон больших чисел и способ наименьших квадратов“ (Изв. Физ.-мат. общ. при Казанск. унив., т. VIII [4]) и „Исследование общего случая испытаний, связанных в цепь“ (Зап. Акад. Наук, 1910 [5]).

Математическое ожидание суммы

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n,$$

очевидно, равно нулю; нетрудно также убедиться, что отношение

$$\frac{\text{м. о. } (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2}{n}$$

должно оставаться числом конечным при беспредельном возрастании числа n , а именно, легко установить неравенство

$$\frac{\text{м. о. } (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2}{n} < 4L^2(1 + 2c).$$

Подобного неравенства, как известно, достаточно для возможности распространить на данный случай закон больших чисел.

Что же касается дальнейших наших выводов, то для возможного упрощения их мы предположим, что отношение

$$\frac{\text{м. о. } (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2}{n}$$

не может становиться и произвольно малым.

§ 3. При таких предположениях мы докажем, что отношение

$$\frac{\text{м. о. } (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^m}{\{\text{м. о. } (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2\}^{\frac{m}{2}}}$$

должно приближаться к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^2} dt,$$

если n возрастает беспредельно; а отсюда вытекает известное предельное выражение вероятности.

Для намеченной цели обращаемся, как обыкновенно, к формуле Ньютона, согласно которой имеем

$$\text{м. о. } (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^m = \sum N \text{ м. о. } z_e^\gamma z_f^\delta \dots z_i^\lambda z_j^\mu z_k^\nu \dots z_s^\sigma,$$

где

$$N = \frac{1 \cdot 2 \dots m}{\gamma! \delta! \dots \lambda! \mu! \nu! \dots \sigma!}$$

и суммирование Σ должно быть распространено на все возможные значения

$$e, f, \dots, i, j, k, \dots, s$$

и

$$\gamma, \delta, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots, \sigma,$$

удовлетворяющие неравенствам

$$e < f < \dots < i < j < k < \dots < s, \\ \gamma > 0, \delta > 0, \dots, \lambda > 0, \mu > 0, \nu > 0, \dots, \sigma > 0,$$

вместе с равенством

$$\gamma + \delta + \dots + \lambda + \mu + \nu + \dots + \sigma = m.$$

Обращаясь затем к математическому ожиданию произведения

$$z_e^\gamma z_f^\delta \dots z_i^\lambda z_j^\mu z_k^\nu \dots z_s^\sigma,$$

сгруппируем в нем в особые произведения все те множители, где последовательный ряд значков дает разности, не превосходящие c , так, например, при

$$f - e \leq c$$

мы соединяем множители

$$z_e^\gamma \text{ и } z_f^\delta$$

в одно произведение, а при

$$j - i \leq c \text{ и } k - j \leq c$$

мы соединяем в одно произведение множители

$$z_i^\lambda, z_j^\mu \text{ и } z_k^\nu.$$

Такая группировка множителей в частные произведения, число которых мы обозначим буквою ω , дает возможность представить математическое ожидание произведения

$$z_e^\gamma z_f^\delta \dots z_i^\lambda z_j^\mu z_k^\nu \dots z_s^\sigma$$

в виде произведения математических ожиданий независимых величин, которые будут или отдельными множителями

$$z_e^\gamma, z_f^\delta, \dots, z_s^\sigma,$$

или произведениями нескольких множителей.

Если какая-нибудь из этих ω величин совпадает с отдельным числом

$$z_e, z_f, \dots, z_s,$$

причем соответствующий показатель

$$\gamma, \delta, \dots \sigma$$

равен единице, то математическое ожидание ее равно нулю, а вместе с тем, конечно, приводится к нулю и математическое ожидание всего произведения.

Устранив подобные произведения, мы для всех прочих произведений

$$z_e^\gamma z_f^\delta \dots z_i^\lambda z_j^\mu z_k^\nu \dots z_s^\sigma$$

без большого труда убеждаемся, что ω не больше $\frac{m}{2}$ и достигает этого значения только в тех случаях, когда наши ω множителей не представляют ничего иного, кроме квадратов отдельных членов ряда

$$z_1, z_2, \dots, z_n$$

и произведения их по два, взятых притом в первой степени.

С другой стороны, нетрудно также убедиться, что отношение числа произведений

$$z_e^\gamma z_f^\delta \dots z_s^\sigma,$$

для которых ω имеет одно и то же значение, к n^ω должно при наших условиях оставаться конечным, а не может возрастать беспредельно вместе с n .

Поэтому при рассмотрении предела отношения

$$\frac{\text{м. о. } (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^m}{\{ \text{м. о. } 2(z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2 \}^{\frac{m}{2}}}$$

мы можем в вышеуказанной сумме

$$\sum N \text{ м. о. } z_e^\gamma z_f^\delta \dots z_i^\lambda z_j^\mu z_k^\nu \dots z_s^\sigma$$

сохранить только те члены, для которых

$$\omega = \frac{m}{2}.$$

При m нечетном таких членов не оказывается, и потому мы имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{м. о. } (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^m}{\{\text{м. о. } 2(z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2\}^{\frac{m}{2}}} = 0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^m dt.$$

Случай m четного требует, конечно, дальнейшего исследования, для выполнения которого полезно ввести новые обозначения: а именно, мы положим

$$\text{м. о. } z_i^2 = a_{i,i} \quad \text{и} \quad \text{м. о. } 2z_i z_j = a_{i,j}$$

при

$$i < j \leq i + c.$$

При таких обозначениях сумму

$$\sum N \text{ м. о. } z_e^\gamma z_f^\delta \dots z_i^\lambda z_j^\mu z_k^\nu \dots z_s^\sigma,$$

распространенную только на те члены, для которых $\omega = \frac{m}{2}$, можно представить произведением

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}{2^{\frac{m}{2}}} \sum a_{e,g} a_{h,i} a_{k,l} \dots a_{r,s},$$

где

$$0 \leq g - e \leq c, \quad h - g > c, \quad 0 \leq i - h \leq c, \quad k - i > c, \dots, \\ 0 \leq s - r \leq c.$$

Принимая же во внимание, что нас интересует только отношение этой суммы к выражению

$$\{\text{м. о. } 2(z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2\}^{\frac{m}{2}},$$

которое возрастает как $n^{\frac{m}{2}}$, мы можем исключить здесь неравенства

$$h - g > c, \quad k - i > c, \dots,$$

предполагая только, для устранения многократного повторения одного и того же произведения

$$a_{e,g} a_{h,i} a_{k,l} \cdots a_{r,s},$$

что в ряду разностей

$$h - e, k - h, \dots$$

последовательных первых значков

$$e, h, k, \dots, r$$

нет отрицательных чисел и что при обращении одной из этих разностей в нуль ей соответствует, в ряду разностей вторых значков

$$i - g, l - i, \dots,$$

число положительное.

Мы вводим таким образом в нашу сумму ряд членов, отношение числа которых, а следовательно и суммы их,

к $n^{\frac{m}{2}}$ имеет пределом нуль, когда n возрастает беспрестанно.

С другой стороны, имеем

$$\text{м. о. } (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)^2 = \sum a_{i,k},$$

где

$$0 \leq k - i \leq c$$

и потому

$$\left\{ \text{м. о. } (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)^2 \right\}^{\frac{m}{2}} = \sum Q (a_{e,g})^{\xi} (a_{h,i})^{\eta} (a_{k,l})^{\zeta} \cdots (a_{r,s})^{\theta},$$

где

$$Q = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{m}{2}}{\xi! \eta! \zeta! \cdots \theta!},$$

$$\xi > 0, \eta > 0, \zeta > 0, \dots, \theta > 0, \quad \xi + \eta + \zeta + \cdots + \theta = \frac{m}{2},$$

а суммирование Σ должно быть распространено на все возможные комбинации значков

$$e, g, h, i, k, l, \dots, r, s$$

без повторения одинаковых произведений несколько раз; для устранения одинаковых произведений мы можем поставить как раз вышеприведенные условия, что среди разностей

$$h - e, k - h, \dots$$

нет отрицательных чисел и что при обращении одной из этих разностей в нуль ей соответствует, в ряду разностей

$$i - g, l - i, \dots,$$

число положительное.

В сумме же

$$\Sigma Q (a_{e, g})^{\xi} (a_{h, i})^{\eta} (a_{k, l})^{\zeta} \cdots (a_{r, s})^{\theta}$$

главную роль играют те члены, где все показатели

$$\xi, \eta, \zeta, \dots, \theta$$

равны единице, так как отношение числа прочих членов к $n^{\frac{m}{2}}$ стремится к пределу нуль, при беспредельном возрастании числа n .

Поэтому в нашем исследовании можно заменить

$$\left\{ \text{м. о. } (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2 \right\}^{\frac{m}{2}}$$

произведением

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{m}{2} \sum a_{e, g} a_{h, i} a_{k, l} \cdots a_{r, s}$$

где значки

$$e, h, k, \dots, r \text{ и } g, i, l, \dots, s$$

удовлетворяют вышеуказанным условиям. А так как, согласно вышеприведенным объяснениям, мы можем заменить

$$\text{м. о. } (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^m$$

произведением

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}{2^{\frac{m}{2}}} \sum a_{e, g} a_{h, i} a_{k, l} \dots a_{r, s},$$

где значки

$$e, h, k, \dots r \text{ и } g, i, l, \dots, s$$

удовлетворяют тем же условиям, то немедленно можем установить формулу

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{м. о. } (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^m}{\{\text{м. о. } 2(z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2\}^{\frac{m}{2}}} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}{2^m 1 \cdot 2 \dots \frac{m}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^m dt. \end{aligned}$$

А отсюда, как известно, вытекает заключение, что для любых данных чисел t_1 и t_2 вероятность неравенств

$$t_1 < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - a_1 - a_2 - \dots - a_n}{\sqrt{2 \text{ м. о. } (x_1 - a_1 + x_2 - a_2 + \dots + x_n - a_n)^2}} < t_2$$

должна приближаться к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt,$$

если n возрастает беспредельно.

§ 4. В заключение статьи остановимся на интересной комбинации случая Брунса с простой однородной цепью.

Мы придем к такой комбинации, рассматривая, как в § 1, сумму

$$w_1 w_2 + w_2 w_3 + \dots + w_n w_{n+1},$$

но предполагая при этом числа

$$w_1, w_2, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots$$

не независимыми, а связанными в цепь того типа, который был рассмотрен в статье „Исследование замечательного случая зависимых испытаний“.

Согласно этому вероятность равенства

$$w_{k+1} = 1$$

будет у нас иметь три значения

$$p, p_1, p_0,$$

первое из которых относится к случаю, когда ни одно из чисел

$$w_1, w_2, \dots, w_k, \dots$$

не установлено, второе — к случаю

$$w_k = 1$$

и третье — к случаю

$$w_k = 0.$$

Числа

$$p, p_1, p_0,$$

связаны известным равенством

$$p = pp_1 + (1 - p)p_0,$$

удовлетворяя которому, мы полагаем

$$p_1 = p + \delta q, \quad q_1 = q - \delta q, \quad p_0 = p - \delta p, \quad q_0 = q + \delta p,$$

где

$$q = 1 - p, \quad q_1 = 1 - p, \quad q_0 = 1 - p_0.$$

Вводя те же обозначения, как в § 1,

$$P_{m,n}, \quad P_{m,n}^1, \quad P_{m,n}^0,$$

$$\varphi_n = \sum P_{m,n} \xi^m = \varphi_n^{(1)} + \varphi_n^{(0)},$$

$$\varphi_n^{(1)} = \sum P_{m,n}^{(1)} \xi^m, \quad \varphi_n^{(0)} = \sum P_{m,n}^{(0)} \xi^m,$$

последовательно выводим уравнения

$$P_{m,n}^1 = p_1 P_{m-1,n-1}^1 + p_0 P_{m,n-1}^0,$$

$$P_{m,n}^0 = q_1 P_{m,n-1}^1 + q_0 P_{m,n-1}^0,$$

затем

$$\varphi_n^{(1)} = p_1 \xi \varphi_{n-1}^{(1)} + p_0 \varphi_{n-1}^{(0)},$$

$$\varphi_n^{(0)} = q_1 \varphi_{n-1}^{(1)} + q_0 \varphi_{n-1}^{(0)}$$

и, наконец,

$$\varphi_{n+2} - (p_1 \xi + q_0) \varphi_{n+1} + (p_1 q_0 \xi - p_0 q_1) \varphi_n = 0.$$

Последнее же уравнение приводит нас к формуле

$$1 + t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + t^3\varphi_3 + \dots = \frac{A + Bt}{1 - (p_1 \xi + q_0)t + (p_1 q_0 \xi - p_0 q_1)t^2},$$

где

$$A = 1, \quad B = \varphi_1 - p_1 \xi - q_0 = -p_1 q (\xi - 1) - \delta.$$

Остается применить к дроби

$$\frac{A + Bt}{1 - (p_1 \xi + q_0)t + (p_1 q_0 \xi - q_0 q_1)t^2}$$

наш метод, что никаких особых затруднений не представляет.

Таким образом, для данного случая мы приходим к заключению, что при беспредельном возрастании n должна приближаться к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt$$

вероятность неравенств

$$t_1 \sqrt{\frac{2b}{n}} < \frac{w_1 w_2 + w_2 w_3 + \dots + w_n w_{n+1}}{n} - pp_1 < t_2 \sqrt{\frac{2b}{n}},$$

где t_1 и t_2 — любые данные числа, число же b определяется формулой

$$\begin{aligned} b(1 - \delta) &= \\ &= -\frac{d^2}{du^2} \{ 1 - (p_1 e^u + q_0) e^{-pp_1 u} + (p_1 q_0 e^u - p_0 q_1) e^{-2pp_1 u} \}_{u=0} = \\ &= pqp_1 \{ 1 + \delta + (1 - \delta)(3 - \delta)p \}, \end{aligned}$$

или, что все равно, формулой

$$b = pqp_1 \left\{ \frac{1 + \delta}{1 - \delta} + (3 - \delta)p \right\}.$$

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ИСПЫТАНИЙ, СВЯЗАННЫХ В СЛОЖНУЮ ЦЕПЬ

*Доложено в заседании Физико-математического отделения
19 января 1911 г. [1]*

В конце статьи „Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь“* мною было уже указано, что предельные теоремы исчисления вероятностей можно распространить и на сложные цепи. Но с увеличением числа непосредственно связанных элементов возрастает не столько значение окончательного результата, сколько сложность его и приводящих к нему вычислений, если только мы не поставим себе специально целью разыскать такие случаи, где значительная общность соединяется с особою простотою результата.

Один из таких случаев я и предполагаю отметить в настоящей статье. При этом я имею в виду также указать на одно обстоятельство, которое для простой однородной цепи не имеет места, а для сложной цепи, которую следует охарактеризовать названием однородной, оказывается возможным. А именно, из моей статьи „Исследование замечательного случая зависимых испытаний“* видно, что для простой цепи испытаний дисперсия, определяемая выражением

$$\sqrt{2pq \frac{1+\delta}{1-\delta} n},$$

не может быть нормальной, т. е. невозможно равенство

$$\sqrt{2pq \frac{1+\delta}{1-\delta} n} = \sqrt{2pn},$$

* Зап. Акад. Наук, VIII серия, т. XXII [2].

** Изв. Акад. Наук, 1907.

если только δ не нуль, иначе сказать, если испытания, действительно, связаны друг с другом, а не являются независимыми. Для сложной же цепи испытаний дисперсия может быть нормальной.

Таким образом, предельное выражение вероятности для испытаний, связанных в однородную сложную цепь, может вполне совпадать с соответствующим выражением вероятности для простого случая Бернулли.

§ 1. Мы будем рассматривать вопрос о числе появлений некоторого события E при известном числе последовательных испытаний, связанных между собой таким образом, что выполняются следующие условия.

I. Вероятность события E при каждом испытании имеет одну и ту же величину p , пока результаты их вообще остаются неопределенными.

II. Вероятность события E при каждом испытании, если установлен только результат предшествующего испытания, имеет одно из двух значений

$$p_1, p_0,$$

смотря по тому, появилось ли E при предшествующем испытании, или, напротив, появилось противоположное событие, которое мы обозначаем буквою F .

III. Наконец, если установлен результат

$$EE, EF, FE, FF$$

двух испытаний, предшествующих рассматриваемому, то вероятность события E , при этом испытании, принимает соответственно значения

$$p_{1,1} \ p_{1,0} \ p_{0,1} \ p_{0,0};$$

эти последние величины вероятности остаются неизменными и по выяснении результатов прочих испытаний, предшествующих рассматриваемому, но не следующих за ним.

Таким образом, каждое испытание непосредственно связано с двумя предшествующими.

Введенные нами вероятности события E

$$p, p_1, p_0, p_{1,1}, p_{1,0}, p_{0,1}, p_{0,0},$$

к которым мы присоединим еще соответствующие вероятности события F

$$q = 1 - p, \quad q_1 = 1 - p_1, \quad q_0 = 1 - p_0, \\ q_{1,1} = 1 - p_{1,1}, \quad q_{1,0} = 1 - p_{1,0}, \quad q_{0,1} = 1 - p_{0,1}, \quad q_{0,0} = 1 - p_{0,0},$$

не могут быть заданы все произвольно; в силу поставленных нами условий они связаны некоторыми простыми соотношениями.

Вывод этих соотношений не представляет больших затруднений. И прежде всего не трудно установить равенство

$$p = pr_1 + qr_0,$$

с которым мы уже встречались при рассмотрении простой цепи.

Удовлетворяя ему, мы, подобно прежнему, полагаем

$$p_1 = p + \delta q, \quad q_1 = q - \delta q, \\ p_0 = p + \delta p, \quad q_0 = q + \delta p.$$

Вместе с тем важно вспомнить, что вышеуказанное равенство равносильно следующему

$$pq_1 = qr_0$$

и что при соблюдении его числа

$$p_1 \text{ и } p_0,$$

в силу основных предложений исчисления вероятностей, оказываются вероятностями события E при любом испытании, когда установлен соответствующим образом результат не

предшествующего испытания, как мы раньше предполагали, а последующего. Таким образом, намечается возможность повернуть наш ряд испытаний в обратную сторону; эта возможность вполне установится, когда мы разберем все наши условия.

Для вывода других соотношений между вышеуказанными вероятностями мы предположим, что результат одного испытания

$$E \text{ или } F$$

установлен. Тогда для обоих смежных испытаний вероятность появления события имеет одну и ту же величину

$$p_1 \text{ или } p_0.$$

С другой стороны, вероятность события E при испытании, следующем за тем, результат которого дан, мы можем вычислять при помощи чисел

$$p_{1,1}, p_{1,0}, p_{0,1}, p_{0,0}$$

на основании теорем сложения и умножения вероятностей, принимая во внимание возможные результаты предшествующего испытания и их вероятности. Мы приходим, таким образом, к двум равенствам

$$p_1 = p_1 p_{1,1} + q_1 p_{0,1},$$

$$p_0 = p_0 p_{1,0} + q_0 p_{0,0},$$

которые равносильны следующим:

$$p_1 q_{1,1} = q_1 p_{0,1} \text{ и } p_0 q_{1,0} = q_0 p_{0,0};$$

удовлетворяя им, мы вводим два новых числа

$$\epsilon \text{ и } \eta$$

и полагаем

$$q_{1,1} = q_1 (1 - \epsilon), \quad p_{0,1} = p_1 (1 - \epsilon), \quad q_{1,0} = q_0 (1 - \eta), \quad p_{0,0} = p_0 (1 - \eta), \\ p_{1,1} = p_1 + \epsilon q_1, \quad q_{0,1} = q_1 + \epsilon p_1, \quad p_{1,0} = p_0 + \eta q_0, \quad q_{0,0} = q_0 + \eta p_0.$$

По установлении этих формул наше предположение о постоянстве вероятностей

$$p, p_1, p_0$$

во всей цепи будет выполнено; не трудно также убедиться, что нашу цепь можно рассматривать в направлении, обратном принятому нами, но последнее обстоятельство не имеет значения для нашего исследования.

Итак, в дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что вероятности

$$p_1, q_1, p_0, q_0, \dots, p_{0,0}, q_{0,0}$$

определяются по числам

$$p, q = 1 - p, \delta, \epsilon, \eta$$

вышеприведенными формулами.

§ 2. Обращаясь к вопросу о вероятности различных предположений о числе появлений события E в n первых испытаний, рассматриваемых нами, мы должны ввести ряд обозначений.

Вероятность

$$P_{m,n}$$

событию E в n первых* испытаний появиться ровно m раз мы разбиваем на четыре части

$$P_{m,n}^{1,1}, P_{m,n}^{1,0}, P_{m,n}^{0,1}, P_{m,n}^{0,0}$$

каждая из которых представляет подобную же вероятность, но по присоединении требования, чтобы последние два испытания приводили, соответственно, к определенным результатам

$$EE, EF, FE, FF.$$

* Наши выводы относятся не только к n первым испытаниям, но и вообще к n последовательным испытаниям.

При таких обозначениях не трудно установить следующие формулы:

$$\begin{aligned} P_{m,n} &= P_{m,n}^{1,1} + P_{m,n}^{1,0} + P_{m,n}^{0,1} + P_{m,n}^{0,0}, \\ P_{m,n}^{1,1} &= p_{1,1} P_{m-1,n-1}^{1,1} + p_{0,1} P_{m-1,n-1}^{0,1}, \\ P_{m,n}^{1,0} &= q_{1,1} P_{m,n-1}^{1,1} + q_{1,0} P_{m,n-1}^{0,1}, \\ P_{m,n}^{0,1} &= p_{1,0} P_{m-1,n-1}^{1,0} + p_{0,0} P_{m-1,n-1}^{0,0}, \\ P_{m,n}^{0,0} &= q_{1,0} P_{m,n-1}^{1,0} + q_{0,0} P_{m,n-1}^{0,0}. \end{aligned}$$

Введя же затем вспомогательное переменное число ξ и рассматривая его функции

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \sum P_{m,n} \xi^m = \varphi_n^{1,1} + \varphi_n^{1,0} + \varphi_n^{0,1} + \varphi_n^{0,0}, \\ \varphi_n^{1,1} &= \sum P_{m,n}^{1,1} \xi^m, \quad \varphi_n^{1,0} = \sum P_{m,n}^{1,0} \xi^m, \\ \varphi_n^{0,1} &= \sum P_{m,n}^{0,1} \xi^m, \quad \varphi_n^{0,0} = \sum P_{m,n}^{0,0} \xi^m, \end{aligned}$$

мы можем из вышеприведенных формул вывести такие уравнения

$$\begin{aligned} \varphi_n^{1,1} &= p_{1,1} \xi \varphi_{n-1}^{1,1} + p_{0,1} \xi \varphi_{n-1}^{0,1}, \\ \varphi_n^{1,0} &= q_{1,1} \varphi_{n-1}^{1,1} + q_{0,1} \varphi_{n-1}^{0,1}, \\ \varphi_n^{0,1} &= p_{1,0} \xi \varphi_{n-1}^{1,0} + p_{0,0} \xi \varphi_{n-1}^{0,0}, \\ \varphi_n^{0,0} &= q_{1,0} \varphi_{n-1}^{1,0} + q_{0,0} \varphi_{n-1}^{0,0}; \end{aligned}$$

а на основании их не трудно прийти* к обыкновенному линейному уравнению в конечных разностях, которое в символическом виде можно, при помощи определителей, представить так

$$\begin{vmatrix} p_{1,1} \xi - \varphi & 0 & p_{0,1} \xi & 0 \\ q_{1,1} & -\varphi & q_{0,1} & 0 \\ 0 & p_{1,0} \xi & -\varphi & p_{0,0} \xi \\ 0 & q_{1,0} & 0 & q_{0,0} - \varphi \end{vmatrix} \varphi^n = 0.$$

Последнее же уравнение дает нам возможность определить φ_n как коэффициент при t^n в разложении некоторой

* Исчисление конечных разностей. Второе издание, отдел второй, § 28.

рациональной дробной функции нового вспомогательного переменного t , по возрастающим степеням его, причем знаменателем для этой дробной функции служит

$$F(\xi, t) = \begin{vmatrix} p_{1,1} \xi t - 1, & 0, & p_{0,1}, & 0 \\ q_{1,1} & , & -1, & q_{0,1} t, & 0 \\ 0 & , & p_{1,0} \xi t, & -1, & p_{0,0} \xi t \\ 0 & , & q_{1,0} t, & 0, & q_{0,0} t - 1 \end{vmatrix}.$$

Итак, мы имеем

$$1 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2 + \dots + \varphi_n t^n + \dots = \frac{f(\xi, t)}{F(\xi, t)},$$

где

$$f(\xi, t) \text{ и } F(\xi, t)$$

— целые функции вспомогательных переменных ξ и t и вторая из них определяется установленной нами формулой.

§ 3. Вывод предельного выражения вероятности можно основать, как выяснено в вышеуказанной моей работе, на рассмотрении целой функции $F(\xi, t)$.

Что же касается другой целой функции $f(\xi, t)$, то составить ее, конечно, не трудно, но для нашей цели нет необходимости на ней останавливаться.

Рассматривая разложение целой функции

$$F(1, t)$$

на множители первой степени

$$F(1, t) = (1 - \alpha_1 t)(1 - \alpha_2 t)(1 - \alpha_3 t)(1 - \alpha_4 t)$$

и применяя указанные ранее приемы, мы легко убеждаемся, что одно из чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$$

равно единице, а модули остальных меньше единицы. И затем, на основании прежних исследований, тотчас можем заклю-

читать, что для любых данных чисел

$$u_1, u_2$$

известный интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-x^2} dx$$

выражает предельное значение вероятности числу появлений события E при n последовательных испытаниях заключаться между

$$na \pm u_1 \sqrt{2bn} \quad \text{и} \quad na \pm u_2 \sqrt{2bn},$$

где

$$a = \frac{F'_{\xi=1}(\xi, 1)}{F'_{t=1}(1, t)}, \quad b = \frac{F''_{\omega=0}(e^\omega, e^{-a\omega})}{F'_{t=1}(1, t)}.$$

Таким образом, вся наша задача сводится к рассмотрению выражений a и b .

Для удобства вычислений, которые мы проведем с надлежащею подробностью, чтобы их легко было проверить, введем вместо ξ новое переменное число z , связанное с ξ и t равенством

$$\xi t = z.$$

Тогда $F(\xi, t)$ превратится в

$$\Phi(z, t) = \begin{vmatrix} p_{1,1}z - 1, & 0, & p_{0,1}z, & 0 \\ q_{1,1}t, & -1, & q_{0,1}t, & 0 \\ 0, & p_{1,0}z, & -1, & p_{0,0}z \\ 0, & q_{1,0}t, & 0, & q_{0,0}t - 1 \end{vmatrix}.$$

Выражая производные

$$F'_{\xi=1}(\xi, 1) \quad F'_{t=1}(1, t), \quad F''_{\omega=0}(e^\omega, e^{-a\omega})$$

через производные функции $\Phi(z, t)$ по z и по t , получаем

$$\begin{aligned} F'_{\xi=1}(\xi, 1) &= \Phi'_{z=1}(z, 1), \\ F'_{t=1}(1, t) &= \Phi'_{z=1}(z, 1) + \Phi'_{t=1}(1, t), \\ F''_{\omega=0}(e^{\omega}, e^{-a\omega}) &= \Phi''_{\omega=0}(e^{(1-a)\omega}, e^{-a\omega}), \end{aligned}$$

и затем

$$\begin{aligned} \Phi''_{\omega=0}(e^{(1-a)\omega}, e^{-a\omega}) &= (1-a)^2 \{ \Phi''_{z=1}(z, 1) + \Phi'_{z=1}(z, 1) \} + \\ &+ a^2 \{ \Phi''_{t=1}(1, t) + \Phi'_{t=1}(1, t) \} - \\ &- 2a(1-a) \left\{ \frac{d^2 \Phi(z, t)}{dzdt} \right\}_{z=t=1}. \end{aligned}$$

Остается произвести выкладки, которые несколько сложны, но не трудны; заметим, что эти выкладки между прочим должны подтвердить, что a равняется p .

Располагая функцию $\Phi(z, t)$, равную

$$\begin{aligned} (1 - p_{1,1}z)(1 - q_{0,0}t) - p_{1,0}z(p_{1,1}z - 1)q_{0,1}t(q_{0,0}t - 1) - \\ - q_{1,1}tq_{1,0}tp_{0,1}zp_{0,0}z + q_{1,0}t(p_{1,1}z - 1)q_{0,1}tp_{0,0}z + \\ + q_{1,1}tp_{1,0}zp_{0,1}z(q_{0,0}t - 1), \end{aligned}$$

по степеням z и t , получаем

$$\Phi(z, t) = Az^2t^2 + Bz^2t + Czt^2 + Dzt + Gz + Ht + 1,$$

где

$$\begin{aligned} A &= q_{1,0}p_{1,1}q_{0,1}p_{0,0} - p_{1,0}p_{1,1}q_{0,1}q_{0,0} + q_{1,1}p_{1,0}p_{0,1}q_{0,0} - \\ &- q_{1,1}q_{1,0}p_{0,1}p_{0,0} = (p_{1,1}q_{0,1} - q_{1,1}p_{0,1})(q_{1,0}p_{0,0} - \\ &- p_{1,0}q_{0,0}) = (p_{1,1} - p_{0,1})(p_{0,0} - p_{1,0}) = -\varepsilon\eta, \\ B &= p_{1,0}p_{1,1}q_{0,1} - q_{1,1}p_{1,0}p_{0,1} = p_{1,0}(p_{1,1}q_{0,1} - q_{1,1}p_{0,1}) = \\ &= \varepsilon p_{1,0} \\ C &= p_{1,0}q_{0,1}q_{0,0} - q_{1,0}q_{0,1}p_{0,0} = q_{0,1}(p_{1,0}q_{0,0} - q_{1,0}p_{0,0}) = \\ &= \eta q_{0,1}, \\ D &= p_{1,1}q_{0,0} - p_{1,0}q_{0,1} = (1 - q_{1,1})(1 - p_{0,0}) - \\ &- (p_{0,0} + \eta)(q_{1,1} + \varepsilon) = 1 - \varepsilon\eta - (1 + \eta)q_{1,1} - (1 + \varepsilon)p_{0,0}, \\ G &= -p_{1,1}, \quad H = -q_{0,0}. \end{aligned}$$

По этим величинам коэффициентов функции $\Phi(z, t)$ легко проверяется равенство

$$A + B + C + D + G + H + 1 = 0,$$

согласно которому

$$\Phi(1, 1) = 0.$$

Затем простые выкладки дают нам

$$\begin{aligned}\Phi'_{z=1}(z, 1) &= 2A + 2B + C + D + G = A + B - H - 1 = \\ &= \varepsilon(p_{1,0} - \eta) - p_{0,0} = -p_{0,0}(1 - \varepsilon) = - \\ &= -p(1 - \delta)(1 - \varepsilon)(1 - \eta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi'_{t=1}(1, t) &= 2A + B + 2C + D + H = A + C - G - 1 = \\ &= \eta(q_{0,1} - \varepsilon) - q_{1,1} = -q_{1,1}(1 - \eta) = - \\ &= -q(1 - \delta)(1 - \varepsilon)(1 - \eta),\end{aligned}$$

$$\Phi'_{z=1}(z, 1) + \Phi'_{t=1}(1, t) = -(1 - \delta)(1 - \varepsilon)(1 - \eta),$$

$$\begin{aligned}\Phi''_{z=1}(z, 1) &= 2A + 2B = 2\varepsilon p_{0,0}, \quad \Phi''_{t=1}(1, t) = 2A + 2C = \\ &= 2\eta q_{1,1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi''_{z=1}(z, 1) + \Phi'_{z=1}(z, 1) &= -(1 - 3\varepsilon)p_{0,0} = \\ &= -p(1 - 3\varepsilon)(1 - \delta)(1 - \eta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi''_{t=1}(1, t) + \Phi'_{t=1}(1, t) &= -(1 - 3\eta)q_{1,1} = \\ &= -q(1 - 3\eta)(1 - \delta)(1 - \varepsilon),\end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{d^2 \Phi(z, t)}{dz dt} \right\}_{z=t=1} = 4A + 2B + 2C + D =$$

$$\begin{aligned}&= 2\varepsilon p_{0,0} + 2\eta q_{1,1} + 1 - \varepsilon\eta - \\ &= -(1 + \eta)q_{1,1} - (1 + \varepsilon)p_{0,0} = \\ &= 1 - \varepsilon\eta - (1 - \eta)q_{1,1} - (1 - \varepsilon)p_{0,0} = \\ &= 1 - \varepsilon\eta - (1 - \delta)(1 - \varepsilon)(1 - \eta),\end{aligned}$$

и, наконец,

$$a = \frac{-p(1 - \delta)(1 - \varepsilon)(1 - \eta)}{-(1 - \delta)(1 - \varepsilon)(1 - \eta)} = p, \quad 1 - a = q,$$

$$b = pq \frac{\{q(1 - 3\varepsilon)(1 - \eta) + p(1 - 3\eta)(1 - \varepsilon) - 2(1 - \varepsilon)(1 - \eta)\}(1 - \sigma) + 2(1 - \varepsilon\eta)}{(1 - \delta)(1 - \varepsilon)(1 - \eta)}.$$

Стремясь к возможно простейшим выводам, мы положим еще

$$\varepsilon = \eta,$$

тогда по сокращении последней дроби на

$$1 - \varepsilon = 1 - \eta$$

получим

$$b = pq \frac{(1 - \delta)(1 - \varepsilon) + 2(1 + \varepsilon)}{(1 - \delta)(1 - \varepsilon)} = pq \frac{(1 + \delta)(1 + \varepsilon)}{(1 - \delta)(1 - \varepsilon)}.$$

Итак, если для рассматриваемых нами последовательных испытаний имеем

$$\begin{aligned} p_1 &= p + \delta q, & q_1 &= q - \delta q, & p_0 &= p - \delta p, & q_0 &= q + \delta p, \\ p_{1,1} &= p_1 + \varepsilon q_1, & p_{0,1} &= p_1 - \varepsilon p_1, & p_{1,0} &= p_0 + \varepsilon q_0, & p_{0,0} &= p_0 - \varepsilon p_0, \\ q_{1,1} &= q_1 - \varepsilon q_1, & q_{0,1} &= q_1 + \varepsilon p_1, & q_{1,0} &= q_0 - \varepsilon q_0, & q_{0,0} &= q_0 + \varepsilon p_0, \end{aligned}$$

то вероятность неравенств

$$np + u_1 \sqrt{2npq \frac{(1 + \delta)(1 + \varepsilon)}{(1 - \delta)(1 - \varepsilon)}} < m < np + u_2 \sqrt{2npq \frac{(1 + \delta)(1 + \varepsilon)}{(1 - \delta)(1 - \varepsilon)}},$$

где u_1 и u_2 — любые данные числа, должна приближаться к пределу, равному

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-x^2} dx,$$

когда число n станет возрастать беспредельно.

Пусть, наконец,

$$\varepsilon = -\delta.$$

В этом случае имеем

$$\begin{aligned} p_{1,1} &= p + \delta^2 q, & p_{0,1} &= p_{1,1} + \delta, & p_{1,0} &= p_{0,0} - \delta, & p_{0,0} &= p - \delta^2 p, \\ q_{1,1} &= q - \delta^2 q, & q_{0,1} &= q_{1,1} - \delta, & q_{1,0} &= q_{0,0} + \delta, & q_{0,0} &= q + \delta^2 p \end{aligned}$$

и можем утверждать, что известный интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-x^2} dx$$

служит пределом для вероятности неравенств

$$np + u_1 \sqrt{2npq} < m < np + u_2 \sqrt{2npq},$$

при беспредельном возрастании числа испытаний n .

Таким образом мы, действительно, пришли к случаям, где предельное выражение вероятности для связанных испытаний вполне совпадает с соответствующим выражением вероятности для независимых испытаний с постоянной вероятностью.

§ 4. Остановимся на предположении

$$\varepsilon = \eta,$$

при котором мы получили для b замечательно простое выражение

$$b = \frac{(1 + \delta)(1 + \varepsilon)}{(1 - \delta)(1 - \varepsilon)} pq;$$

постараемся найти то же выражение другим способом, который был уже нами применен для подобной же цели в заметке „Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга“.*

Как известно, b равняется пределу, к которому стремится отношение

$$\frac{\text{м. о. } (m - np)^2}{n}$$

при беспредельном возрастании числа n .

Выражая же m известною суммою

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

* Изв. Физ.-мат. общ. при Казанск. унив., 1907 3].

и полагая для краткости

$$x_k - p = v_k,$$

имеем

$$\begin{aligned} \text{м. о. } v_k &= 0, \quad \text{м. о. } v_k^2 = pq, \\ \text{м. о. } (m - np)^2 &= \text{м. о. } (v_1 + v_2 + \dots + v_n)^2 = \\ &= \text{м. о. } v_1^2 + \text{м. о. } v_2(v_2 + 2v_1) + \dots + \text{м. о. } v_n(v_n + 2v_{n-1} + \\ &+ \dots + 2v_1) = \sum \text{м. о. } v_k(v_k + 2v_{k-1} + 2v_{k-2} + \dots + 2v_1). \end{aligned}$$

С другой стороны, согласно объяснениям только что упомянутой заметки, имеем

$$\text{м. о. } v_k v_{k-i} = p(R_i - p) = pq\Delta_i,$$

где R_i означает вероятность события E при k -м испытании, когда появление события E при $k-i$ -м испытании установлено.

Таким образом, вопрос о величине b мы можем свести к разысканию предела суммы

$$1 + 2\Delta_1 + 2\Delta_2 + 2\Delta_3 + \dots + 2\Delta_{k-1}$$

при беспредельном возрастании числа k ; в самом деле, если бесконечная сумма

$$1 + 2\Delta_1 + 2\Delta_2 + 2\Delta_3 + \dots$$

имеет смысл, не трудно, на основании вышеприведенных формул, установить равенство

$$b = pq(1 + 2\Delta_1 + 2\Delta_2 + 2\Delta_3 + \dots).$$

Приступая к рассмотрению слагаемых этой суммы, вводим четыре вероятности

$$R_i^{1,1}, R_i^{1,0}, R_i^{0,1}, R_i^{0,0}$$

событию E появиться при k -м испытании соответственно

четырем возможным результатам

$$EE, EF, FE, FF$$

испытаний с номерами $k-i$ и $k-i+1$.

При таких обозначениях имеем

$$\begin{aligned} R_0 &= 1, \quad R_0^{1,1} = 1, \quad R_0^{1,0} = 1, \quad R_0^{0,1} = 0, \quad R_0^{0,0} = 0, \\ R_1 &= p_1, \quad R_1^{1,1} = 1, \quad R_1^{1,0} = 0, \quad R_1^{0,1} = 1, \quad R_1^{0,0} = 0, \\ R_i &= p_1 R_i^{1,1} + q_1 R_i^{1,0}, \end{aligned}$$

и не трудно установить четыре уравнения

$$\begin{aligned} R_{i+1}^{1,1} &= p_{1,1} R_i^{1,1} + q_{1,1} R_i^{1,0}, \\ R_{i+1}^{1,0} &= p_{1,0} R_i^{0,1} + q_{1,0} R_i^{0,0}, \\ R_{i+1}^{0,1} &= p_{0,1} R_i^{1,1} + q_{0,1} R_i^{1,0}, \\ R_{i+1}^{0,0} &= p_{0,0} R_i^{0,1} + q_{0,0} R_i^{0,0}, \end{aligned}$$

а из них вытекает для R_i линейное уравнение в конечных разностях четвертого порядка, которое символически можно представить так:

$$\begin{vmatrix} p_{1,1} - R, & q_{1,1}, & 0, & 0 \\ 0, & -R, & p_{1,0}, & q_{1,0} \\ p_{0,1}, & q_{0,1}, & -R, & 0 \\ 0, & 0, & p_{0,0}, & q_{0,0} - R \end{vmatrix} R^i = 0.$$

Рассматривая соответственно этому уравнению в конечных разностях обыкновенное алгебраическое уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{1,1} - \rho, & q_{1,1}, & 0, & 0 \\ 0, & -\rho, & p_{1,0}, & q_{1,0} \\ p_{0,1}, & q_{0,1}, & -\rho, & 0 \\ 0, & 0, & p_{0,0}, & q_{0,0} - \rho \end{vmatrix} = 0,$$

замечаем, что один из корней его равен единице, а осталь-

ные три удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} -\rho - q_{1,1} & p_{1,0} & q_{1,1} \\ q_{0,1} - q_{1,1} & -\rho & 0 \\ -q_{1,1} & p_{0,0} & q_{0,0} - \rho \end{vmatrix} = 0,$$

которое по выполнении выкладок приводится к такому:

$$\rho^3 - (\delta + \varepsilon - \varepsilon\delta)\rho^2 - \varepsilon(1 - \delta + \varepsilon\delta)\rho + \varepsilon^2 = 0.$$

Один из корней последнего уравнения равен ε , а остальные два удовлетворяют уравнению второй степени

$$\rho^2 - \delta(1 - \varepsilon)\rho - \varepsilon = 0.$$

Поэтому мы можем положить

$$R_i = a + b\varepsilon^i + r_i,$$

где r_i удовлетворяет уравнению второго порядка

$$r_{i+2} - \delta(1 - \varepsilon)r_{i+1} - \varepsilon r_i = 0,$$

буквы же a и b означают постоянные числа.

Относительно a не трудно заключить, что оно равняется p , так как при беспредельном возрастании i все выражения

$$R_i^{1,1}, R_i^{1,0}, R_i^{0,1}, R_i^{0,0}$$

должны стремиться к общему пределу p ; следовательно

$$q\Delta_i = R_i - p = b\varepsilon^i + r_i.$$

Затем не трудно убедиться, что b равно нулю.

Для этой цели рассматриваем

$$\begin{aligned} q\Delta_0 &= 1 - p - q, \quad q\Delta_1 = p_1 - p = \delta q, \\ q\Delta_2 &= p_1 p_{1,1} + q_1 p_{1,0} - p = p_{1,1} + q_1(p_{1,0} - p_{1,1}) - p = \\ &= q(\varepsilon + \delta^2(1 - \varepsilon)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q\Delta_3 &= p_1 p_{1,1} p_{1,1} + p_1 q_{1,1} p_{1,0} + q_1 p_{1,0} p_{0,1} + q_1 q_{1,0} p_{0,0} - p = \\
&= p_1 - p + p_1 q_{1,1} (p_{1,0} - p_{1,1}) - p_1 q_{1,1} + q_1 p_{1,0} + \\
&+ q_1 q_{1,0} (p_{0,0} - p_{0,1}) = \delta q + q_1 (p_{1,1} + q_{1,0}) (p_0 - p_1) (1 - \epsilon) = \\
&= \delta q \{1 - (1 - \delta^2) (1 - \epsilon)^2\}
\end{aligned}$$

и замечаем, что полученные нами выражения

$$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$$

удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_2 - \delta(1 - \epsilon)\Delta_1 - \epsilon\Delta_0 = 0$$

и

$$\Delta_3 - \delta(1 - \epsilon)\Delta_2 - \epsilon\Delta_1 = 0,$$

каждое из которых требует равенства

$$b = 0.$$

Установив таким образом, что Δ_i удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{i+2} - \delta(1 - \epsilon)\Delta_{i+1} - \epsilon\Delta_i = 0,$$

мы можем, введя новое вспомогательное переменное y и рассматривая его функцию

$$\Delta_1 + \Delta_2 y + \Delta_3 y^2 + \dots = \sum \Delta_i y^{i-1},$$

написать формулу

$$\sum \Delta_i y^{i-1} = \frac{A + By}{1 - \delta(1 - \epsilon)y - \epsilon y^2},$$

где A и B — числа постоянные и легко определяются равенствами

$$A = \Delta_1 = \delta, \quad B = \Delta_2 - \delta(1 - \epsilon)\Delta_1 = \epsilon.$$

А эта формула при

$$y = 1$$

дает

$$\sum \Delta_i = \frac{\delta + \varepsilon}{(1-\delta)(1-\varepsilon)},$$

и, следовательно,

$$1 + 2\Delta_1 + 2\Delta_2 + 2\Delta_3 + \dots = 1 + \frac{2(\delta + \varepsilon)}{(1-\delta)(1-\varepsilon)} = \frac{(1+\delta)(1-\varepsilon)}{(1-\delta)(1-\varepsilon)}.$$

Таким образом, мы приходим к прежнему результату

$$b = \frac{(1+\delta)(1+\varepsilon)}{(1-\delta)(1-\varepsilon)} pq.$$

§ 5. В заключение статьи остановимся на одном примере испытаний, связанных в цепь, который, при надлежащем обобщении, может вести к многосвязным цепям.

Пример. Из сосуда, содержащего a белых и b шаров иного цвета, вынимают последовательно шар за шаром, которые и возвращают обратно в сосуд, но не немедленно по выходе из сосуда, а таким образом, что каждый шар остается вне сосуда, пока не вынуто двух следующих за ним шаров.

Называя событием E белый цвет шара и рассматривая последовательный ряд шаров, мы имеем в данном примере как раз случай испытаний, связанных в сложную цепь выше-разобранного типа.

И не трудно определить соответствующие значения

$$p, p_1, p_0, p_{1,1}, p_{1,0}, p_{0,1}, p_{0,0};$$

а именно, простые соображения дают

$$p = \frac{a}{a+b}, \quad p_1 = \frac{a-1}{a+b-1}, \quad p_0 = \frac{a}{a+b-1},$$

$$p_{1,1} = \frac{a-2}{a+b-2}, \quad p_{1,0} = p_{0,1} = \frac{a-1}{a+b-2}, \quad p_{0,0} = \frac{a}{a+b-2}.$$

Отсюда затем выводим

$$\delta = p_1 - p_0 = \frac{-1}{a+b-1}, \quad \varepsilon = \eta = p_{1,1} - p_{0,1} = p_{1,0} - p_{0,0} = \frac{-1}{a+b-2}$$

и

$$pq = \frac{ab}{(a+b)^2}, \quad \frac{(1+\delta)(1+\varepsilon)}{(1-\delta)(1-\varepsilon)} = \frac{(a+b-2)(a+b-3)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Итак, если буквою m мы обозначим число белых шаров среди вынутых последовательно n шаров, то на основании вышеизложенного исследования вероятность неравенств

$$u_1 \sqrt{\frac{2ab(a+b-2)(a+b-3)}{n(a+b)^3(a+b-1)}} < \frac{m}{n} -$$

$$-\frac{a}{a+b} < u_2 \sqrt{\frac{2ab(a+b-2)(a+b-3)}{n(a+b)^3(a+b-1)}},$$

где u_1, u_2 — любые данные числа, должна приближаться к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-x^2} dx$$

при беспредельном возрастании числа n .

ОБ ИСПЫТАНИЯХ, СВЯЗАННЫХ В ЦЕПЬ НЕНАБЛЮДАЕМЫМИ СОБЫТИЯМИ

*Доложено на заседании Физико-математического отделения
11 апреля 1912 г. [1]*

Цель настоящей заметки состоит в распространении сделанных нами раньше выводов на новые случаи, которые охарактеризованы заглавием ее.

§ 1. Оставляя для наблюдаемых событий прежние обозначения*

E и F ,

мы для связи испытаний в цепь введем другие события.

Пусть, для определенности, этих последних событий будет три:

A, B, C ;

они единственно возможны и несовместны.

Полагая, что относительно событий

A, B, C

рассматриваемые испытания образуют цепь в установленном нами смысле, мы считаем данною следующую систему чисел:

a	b	c
$p,$	$p,$	$p,$
a	b	c
$q,$	$q,$	$q,$
a	b	c
$r,$	$r,$	$r,$

* Исследование замечательного случая зависимых испытаний. Изв. Акад. Наук, 1907.

первая строка которой

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ p, & p, & p \end{array}$$

представляет вероятности события A при любом испытании, соответствующие трем возможными результатам

$$A, B, C$$

непосредственно предшествующего испытания, а вторая и третья — такие же вероятности событий B и C .

Эти числа, конечно, должны удовлетворять равенствам

$$\begin{array}{ccccccccc} a & a & a & b & b & b & c & c & c \\ p + q + r = p + q + r = p + q + r = 1. \end{array}$$

Надо помнить притом, что по установлении, какое из событий

$$A, B, C$$

имеет место при некотором из наших испытаний, все следующие за ним становятся, по отношению событий

$$A, B, C,$$

независимыми от предшествующих ему испытаний.

События A, B, C должны быть, известным образом, связаны с событиями E и F . Выбирая для исследования возможно простейшие случаи, мы предполагаем, что каждое из наших испытаний становится, по отношению события E , независимым от прочих, коль скоро выяснено, какое именно из событий

$$A, B, C$$

имеет место при этом испытании.

Сообразно этому мы вводим в наше исследование еще три постоянных числа

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ p, & p, & p, \end{array}$$

представляющие вероятности события E при любом из наших испытаний, если только соответственно установлен результат его

$$A, B, C,$$

и их дополнения до единицы

$$\begin{matrix} a & b & c \\ \sigma, & \sigma, & \sigma, \end{matrix}$$

представляющие подобные же вероятности события F .

К указанным данным надо было бы присоединить еще вероятности

$$p', q', r'$$

событий

$$A, B, C$$

при первом испытании, если бы наша задача состояла в точном вычислении вероятностей различных предположений о числе появлений события E , при определенном числе последовательных испытаний. Но для предельных теорем, которые мы специально имеем в виду, числа p', q', r' не нужны, так как в окончательном результате они исчезают.

Представляя символом

$$P_n$$

вероятность событию E в первые n испытаний появиться ровно m раз, мы разложим эту вероятность на три слагаемых

$$P_n = A_n + B_n + C_n,$$

которые равны также вероятностям появиться E в n первых испытаниях ровно m раз, но с присоединением добавочного условия, состоящего в появлении при n -м испытании события

$$A \text{ для } A_n, B \text{ для } B_n \text{ и } C \text{ для } C_n.$$

При таких обозначениях не трудно вывести, посредством известного перехода от n к $n+1$ испытаниям, следующие уравнения:

$$\begin{aligned} A_m^{n+1} &= \sigma \left(\overset{a}{p} A_m^n + \overset{b}{p} B_m^n + \overset{c}{p} C_m^n \right) + \rho \left(\overset{a}{p} A_{m-1}^n + \overset{b}{p} B_{m-1}^n + \overset{c}{p} C_{m-1}^n \right), \\ B_m^{n+1} &= \sigma \left(\overset{b}{q} A_m^n + \overset{b}{q} B_m^n + \overset{c}{q} C_m^n \right) + \rho \left(\overset{b}{q} A_{m-1}^n + \overset{b}{q} B_{m-1}^n + \overset{c}{q} C_{m-1}^n \right), \\ C_m^{n+1} &= \sigma \left(\overset{c}{r} A_m^n + \overset{b}{r} B_m^n + \overset{c}{r} C_m^n \right) + \rho \left(\overset{c}{r} A_{m-1}^n + \overset{b}{r} B_{m-1}^n + \overset{c}{r} C_{m-1}^n \right). \end{aligned}$$

Вводя затем вспомогательное переменное ξ и рассматривая его функции

$$\overset{a}{\varphi}_n = \sum A_m^n \xi^m, \quad \overset{b}{\varphi}_n = \sum B_m^n \xi^m, \quad \overset{c}{\varphi}_n = \sum C_m^n \xi^m, \quad \varphi_n = \sum P_m^n \xi^m,$$

последняя из которых равна сумме трех первых, можем свести только что установленные уравнения к таким:

$$\begin{aligned} \overset{a}{\varphi}_{n+1} &= \left(\overset{a}{\sigma} + \overset{a}{\rho} \xi \right) \left\{ \overset{a}{p} \overset{a}{\varphi}_n + \overset{b}{p} \overset{b}{\varphi}_n + \overset{c}{p} \overset{c}{\varphi}_n \right\}, \\ \overset{b}{\varphi}_{n+1} &= \left(\overset{b}{\sigma} + \overset{b}{\rho} \xi \right) \left\{ \overset{a}{q} \overset{a}{\varphi}_n + \overset{b}{q} \overset{b}{\varphi}_n + \overset{c}{q} \overset{c}{\varphi}_n \right\}, \\ \overset{c}{\varphi}_{n+1} &= \left(\overset{c}{\sigma} + \overset{c}{\rho} \xi \right) \left\{ \overset{a}{r} \overset{a}{\varphi}_n + \overset{b}{r} \overset{b}{\varphi}_n + \overset{c}{r} \overset{c}{\varphi}_n \right\}. \end{aligned}$$

Мы пришли таким образом к системе линейных уравнений, из которых вытекает для всех четырех функций

$$\overset{a}{\varphi}_n, \quad \overset{b}{\varphi}_n, \quad \overset{c}{\varphi}_n, \quad \varphi_n$$

одно и то же линейное уравнение в конечных разностях третьего порядка.

Последнее уравнение в известном символическом виде будет

$$\begin{vmatrix} \left(\overset{a}{\sigma} + \overset{a}{\rho} \xi \right) \overset{a}{p} - \varphi, & \left(\overset{a}{\sigma} + \overset{a}{\rho} \xi \right) \overset{b}{p}, & \left(\overset{a}{\sigma} + \overset{a}{\rho} \xi \right) \overset{c}{p} \\ \left(\overset{b}{\sigma} + \overset{b}{\rho} \xi \right) \overset{a}{q}, & \left(\overset{b}{\sigma} + \overset{b}{\rho} \xi \right) \overset{b}{q} - \varphi, & \left(\overset{b}{\sigma} + \overset{b}{\rho} \xi \right) \overset{c}{q} \\ \left(\overset{c}{\sigma} + \overset{c}{\rho} \xi \right) \overset{a}{r}, & \left(\overset{c}{\sigma} + \overset{c}{\rho} \xi \right) \overset{b}{r}, & \left(\overset{c}{\sigma} + \overset{c}{\rho} \xi \right) \overset{c}{r} - \varphi \end{vmatrix} \varphi^n = 0.$$

А такому уравнению соответствует, как известно, формула вида

$$1 + t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + t^3\varphi_3 + \dots = \frac{f(\xi, t)}{F(\xi, t)},$$

где t — новое вспомогательное переменное, $f(\xi, t)$ — некоторая целая его функция и, наконец,

$$F(\xi, t) = \begin{vmatrix} \left(\begin{smallmatrix} a & a \\ \sigma + \rho\xi \end{smallmatrix}\right)^a pt - 1, & \left(\begin{smallmatrix} a & a \\ \sigma + \rho\xi \end{smallmatrix}\right)^b pt, & \left(\begin{smallmatrix} a & a \\ \sigma + \rho\xi \end{smallmatrix}\right)^c pt \\ \left(\begin{smallmatrix} b & b \\ \sigma + \rho\xi \end{smallmatrix}\right)^a qt, & \left(\begin{smallmatrix} b & b \\ \sigma + \rho\xi \end{smallmatrix}\right)^b qt - 1, & \left(\begin{smallmatrix} b & b \\ \sigma + \rho\xi \end{smallmatrix}\right)^c qt \\ \left(\begin{smallmatrix} c & c \\ \sigma + \rho\xi \end{smallmatrix}\right)^a rt, & \left(\begin{smallmatrix} c & c \\ \sigma + \rho\xi \end{smallmatrix}\right)^b rt, & \left(\begin{smallmatrix} c & c \\ \sigma + \rho\xi \end{smallmatrix}\right)^c rt - 1 \end{vmatrix}.$$

Все дальнейшие наши выводы могут быть основаны, как выяснено в статье* моей „Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь“, на рассмотрении одной функции $F(\xi, t)$.

Но прежде всего надо убедиться, что уравнение

$$F(1, t) = 0$$

допускает один и только один корень, равный единице, и что модули двух других его корней больше единицы; при этом обнаруживается необходимость ограничивающего условия

$$F'_{t=1}(1, t) \neq 0.$$

С подобным условием мы уже встречались; оно исключает только некоторые особенные случаи и по существу дела необходимо, так как к исключаемым случаям наши выводы не применяются.

Особенность этих случаев состоит в том, что в них появление какого-нибудь, определенного, из трех событий A, B, C при одном испытании устраняет уже для всех испы-

* Зап. Акад. Наук, 1908, т. XXII, № 9 [2].

таний возможность появления двух прочих событий: например, появление A устраняет навсегда возможность появления B и C и само навсегда устраняется появлением последних событий.

Исключив такие случаи, мы можем ввести в наши вычисления три числа

$$p, q, r,$$

вполне определяемые системой уравнений

$$\begin{aligned} p &= \overset{a}{p} \overset{b}{p} + \overset{a}{q} \overset{b}{p} + \overset{a}{r} \overset{b}{p}, \\ q &= \overset{a}{p} \overset{b}{q} + \overset{a}{q} \overset{b}{q} + \overset{a}{r} \overset{b}{q}, \\ r &= \overset{a}{p} \overset{b}{r} + \overset{a}{q} \overset{b}{r} + \overset{a}{r} \overset{b}{r}, \\ 1 &= p + q + r, \end{aligned}$$

и представляющие соответственно пределы вероятностей событий

$$A, B, C$$

для испытаний, безгранично удаляющихся от первого.

Вместе с тем можем установить простые равенства

$$\begin{aligned} \left| \begin{smallmatrix} \overset{b}{q-1}, & \overset{c}{q} \\ \overset{b}{r}, & \overset{c}{r-1} \end{smallmatrix} \right| &= hp, \quad \left| \begin{smallmatrix} \overset{a}{p-1}, & \overset{c}{p} \\ \overset{a}{r}, & \overset{c}{r-1} \end{smallmatrix} \right| = hq, \quad \left| \begin{smallmatrix} \overset{a}{p-1}, & \overset{b}{p} \\ \overset{a}{q}, & \overset{b}{q-1} \end{smallmatrix} \right| = hr, \\ h = F'_{t=1}(1, t) &= \left| \begin{smallmatrix} \overset{b}{q-1}, & \overset{c}{q} \\ \overset{b}{r}, & \overset{c}{r-1} \end{smallmatrix} \right| + \left| \begin{smallmatrix} \overset{a}{p-1}, & \overset{c}{p} \\ \overset{a}{r}, & \overset{c}{r-1} \end{smallmatrix} \right| + \left| \begin{smallmatrix} \overset{a}{p-1}, & \overset{b}{p} \\ \overset{a}{q}, & \overset{b}{q-1} \end{smallmatrix} \right|. \end{aligned}$$

По числам p, q, r нетрудно вычислить и соответствующие предельные величины

$$\rho \text{ и } \sigma$$

вероятностей событий E для испытаний, безгранично уда-

ляющихся от первого: простые соображения доставляют нам формулы

$$\begin{aligned}\rho &= p\rho + q\rho + r\rho, \\ \sigma &= p\sigma + q\sigma + r\sigma.\end{aligned}$$

Та же величина ρ определяется равенством

$$\rho = \frac{F'_{\xi=1}(\xi, 1)}{F'_{t=1}(1, t)},$$

ибо

$$\begin{aligned}F'_{\xi=1}(\xi, 1) &= \\ &= \rho \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & p & p \\ a & b & c \\ q & q-1 & q \\ a & b & c \\ r & r & r-1 \end{vmatrix} + \rho \begin{vmatrix} a & b & c \\ p-1 & p & p \\ a & b & c \\ q & q & q \\ a & b & c \\ r & r & r-1 \end{vmatrix} + \rho \begin{vmatrix} a & b & c \\ p-1 & p & p \\ a & b & c \\ q & q-1 & q \\ a & b & c \\ r & r & r \end{vmatrix} = \\ &= \rho hp + \rho hq + \rho hr.\end{aligned}$$

Остается вычислить величину

$$\frac{1}{h} \left\{ \frac{d^2 F(e^u, e^{-\rho u})}{du^2} \right\}_{u=0},$$

которую мы обозначим буквою Δ , чтобы можно было применить к данному случаю предельную теорему: при возрастании числа испытаний n вероятность неравенств

$$t_1 \sqrt{2\Delta n} < m - n\rho < t_2 \sqrt{2\Delta n},$$

для любых данных чисел t_1 и t_2 , стремится к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt.$$

Производя простые выкладки, находим

$$\left\{ \frac{d^2 F(e^u, e^{-\rho u})}{du^2} \right\}_{u=0} =$$

$$= K_a + K_b + K_c + 2L_a \binom{b}{\rho\sigma - \sigma\rho} \binom{c}{\rho\sigma - \sigma\rho} +$$

$$+ 2L_b \binom{a}{\rho\sigma - \sigma\rho} \binom{c}{\rho\sigma - \sigma\rho} + 2L_c \binom{a}{\rho\sigma - \sigma\rho} \binom{b}{\rho\sigma - \sigma\rho},$$

$$K_a = \binom{a}{\rho\sigma^2 + \sigma\rho^2} \begin{vmatrix} \overset{a}{p}, & \overset{b}{p}, & \overset{c}{p} \\ \overset{a}{q}, & \overset{b}{q} - 1, & \overset{c}{q} \\ \overset{a}{r}, & \overset{b}{r}, & \overset{c}{r} - 1 \end{vmatrix} = p h \binom{a}{\rho\sigma^2 + \sigma\rho^2},$$

$$K_a + K_b + K_c = \binom{a}{p\rho + q\rho + r\rho} \sigma^2 h +$$

$$+ \binom{a}{p\sigma + q\sigma + r\sigma} \rho^2 h = h\rho\sigma,$$

$$L_a = \begin{vmatrix} \overset{a}{p} - 1, & \overset{b}{p}, & \overset{c}{p} \\ \overset{a}{q}, & \overset{b}{q}, & \overset{c}{q} \\ \overset{a}{r}, & \overset{b}{r}, & \overset{c}{r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{a}{p} - 1, & \overset{b}{p} \\ \overset{a}{q}, & \overset{b}{q} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overset{c}{p}, & \overset{a}{p} - 1 \\ \overset{c}{q}, & \overset{a}{q} \end{vmatrix},$$

$$L_a = h(q + r) + \overset{a}{p} - 1,$$

$$L_b = h(r + p) + \overset{b}{q} - 1,$$

$$L_c = h(p + q) + \overset{c}{r} - 1.$$

Сверх того, мы можем разности

$$\overset{b}{\rho\sigma - \sigma\rho}, \overset{b}{\rho\sigma - \sigma\rho}, \overset{c}{\rho\sigma - \sigma\rho}, \overset{c}{\rho\sigma - \sigma\rho}, \overset{a}{\rho\sigma - \sigma\rho}, \overset{a}{\rho\sigma - \sigma\rho}$$

заменить равными им разностями

$$\overset{b}{\rho - \rho}, \overset{c}{\rho - \rho}, \overset{a}{\rho - \rho}.$$

Таким образом, мы получаем для Δ довольно простое

выражение

$$\Delta = \rho\sigma + 2M_a \left(\rho - \overset{b}{\rho} \right) \left(\rho - \overset{c}{\rho} \right) + 2M_b \left(\rho - \overset{a}{\rho} \right) \left(\rho - \overset{c}{\rho} \right) + \\ + 2M_c \left(\rho - \overset{a}{\rho} \right) \left(\rho - \overset{b}{\rho} \right),$$

где

$$M_a = q + r - \frac{\overset{a}{q} + \overset{a}{r}}{h}, \quad M_b = r + p - \frac{\overset{b}{r} + \overset{b}{p}}{h}, \quad M_c = p + q - \frac{\overset{c}{p} + \overset{c}{q}}{h}.$$

Отмечая случай, наиболее подходящий к ранее рассмотренному случаю испытаний,* связанных в простую цепь, положим, что E совпадает с A .

Для этого случая

$$\overset{a}{\rho} = 1, \quad \overset{a}{\sigma} = 0, \quad \overset{b}{\rho} = \overset{c}{\rho} = 0, \quad \overset{b}{\sigma} = \overset{c}{\sigma} = 1,$$

и наши формулы дают

$$\Delta = p(q + r) + 2p \left\{ \frac{\overset{b}{r} + \overset{b}{p} + \overset{c}{q} + \overset{c}{p} - h}{h} (q + r) - \frac{\overset{a}{q} + \overset{a}{r}}{h} p \right\}.$$

Если же положим

$$\overset{b}{p} = \overset{c}{p},$$

то получим для Δ выражение, вполне совпадающее с найденным нами раньше

$$\Delta = p(1 - p) \frac{1 + \delta}{1 - \delta},$$

причем

$$1 - p = q + r \quad \text{и} \quad \delta = \overset{a}{p} - \overset{b}{p}.$$

Приведем еще один пример.

Пусть два белых и два черных шара разделены, как-нибудь, на две пары, между которыми производится затем

* Исследование замечательного случая зависимых испытаний.

последовательный обмен шаров. Таким образом мы получаем неограниченный ряд последовательных испытаний, состоящих в одновременном перемещении по одному шару из первой пары во вторую и из второй в первую. Обращая внимание на состав одной из этих пар, мы в результате каждого испытания можем различить три события:

оба ее шара белые, один белый, другой черный, оба черные, которые соответственно обозначим буквами

$A, B, C.$

Положим далее, что имеются три сосуда, содержащие белые и черные шары и никаких других, и обозначим символами

a	b	c
ρ	ρ	ρ
a	b	c
σ	σ	σ

отношения числа белых и числа черных шаров для первого, второго и третьего сосуда.

Эти отношения мы считаем данными неизменными числами, т. е. мы предполагаем состав сосудов неизменным.

Пусть, наконец, каждое из установленных нами сейчас испытаний соединяется, соответственно результату его

$A, B, C,$

с выниманием одного шара из первого, второго или третьего сосуда.

Рассматривая для n таких испытаний, непосредственно следующих друг за другом, отношение

$$\frac{m}{n}$$

числа белых шаров, вынутых из наших трех сосудов, к числу испытаний, равному числу всех вынутых шаров, и предпо-

лагая, что последнее число безгранично растет, мы для применения к данному случаю вышеизложенных общих выводов должны установить величины

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & c & a & b & c & a & b & c \\ p, & p, & p, & q, & q, & q, & r, & r, & r \end{array}$$

и по ним вычислить

$$p, q, r, h, \rho, \sigma, M_a, M_b, M_c.$$

Сделать это нетрудно. А именно, весьма простые соображения дают

$$\overset{a}{p} = 0, \quad \overset{b}{p} = \frac{1}{4}, \quad \overset{c}{p} = 0,$$

$$\overset{a}{q} = 1, \quad \overset{b}{q} = \frac{1}{2}, \quad \overset{c}{q} = 1,$$

$$\overset{a}{r} = 0, \quad \overset{b}{r} = \frac{1}{4}, \quad \overset{c}{r} = 0.$$

Подставляя же эти числа в наши формулы, находим

$$ph = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}, \quad qh = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$rh = \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4},$$

$$h = \frac{3}{2}, \quad p = r = \frac{1}{6}, \quad q = \frac{2}{3},$$

$$\rho = \frac{\overset{a}{p} + 4\overset{b}{p} + \overset{c}{p}}{6}, \quad \sigma = \frac{\overset{a}{q} + 4\overset{b}{q} + \overset{c}{q}}{6};$$

$$M_a = \frac{1}{6}, \quad M_b = 0, \quad M_c = \frac{1}{6},$$

$$\Delta = \rho\sigma + \frac{(\rho - \overset{b}{\rho})(2\rho - \overset{a}{\rho} - \overset{c}{\rho})}{3} = \rho\sigma - \frac{4}{3}(\rho - \overset{b}{\rho})^2.$$

§ 2. В первом параграфе мы занимались теми случаями, когда событие E не оказывает самостоятельного влияния на установленную нами, по отношению событий A, B, C , цепь испытаний; соответственно этому мы предполагали, что присоединение к данному результату

$$A, B, C$$

какого-нибудь испытания указания на появление или непоявление события E при этом испытании не изменяет соответствующих вероятностей

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ p, & p, & p, \\ a & b & c \\ q, & q, & q, \\ a & b & c \\ r, & r, & r \end{array}$$

событий A, B, C , при непосредственно следующем за ним испытании.

Для полноты исследования мы считаем, однако, необходимым остановиться и на случаях иного рода, которые встречаются при довольно простой постановке вопроса и легко могут быть смешаны с предыдущими.

В этих новых случаях, вместо одной системы

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ p, & p, & p, \\ a & b & c \\ q, & q, & q, \\ a & b & c \\ r, & r, & r, \end{array}$$

задаются две системы чисел:

$$\begin{array}{ccc} ae & be & ce \\ p, & p, & p, \\ ae & be & ce \\ 1) & q, & q, & q, \\ ae & be & ce \\ r, & r, & r, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} af & bf & cf \\ p, & p, & p, \\ af & bf & cf \\ 2) & q, & q, & q, \\ af & bf & cf \\ r, & r, & r, \end{array}$$

первая из которых представляет вероятности событий A, B, C при любом из наших испытаний, когда для предыдущего испытания вместе с определенным результатом

$$A, B, C$$

дан его же результат E , а вторая — такие же вероятности, но по замене E на F .

Оставляя прочие условия вопроса неизменными, мы можем сохранить прежние обозначения

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ p, & p, & p, \\ a & b & c \\ \sigma, & \sigma, & \sigma \end{array}$$

для вероятностей событий E и F при любом из наших испытаний, результат которого

$$A, B, C$$

установлен. Мы можем сохранить также и обозначение

$$P_m^n$$

для вероятности событию E в n последовательных испытаниях появиться ровно m раз; но разложим ее мы теперь не на три, а на шесть слагаемых:

$$P_m^n = A_m^{e,n} + A_m^{f,n} + B_m^{e,n} + B_m^{f,n} + C_m^{e,n} + C_m^{f,n};$$

эти слагаемые представляют также вероятности в n первых испытаниях событию E появиться ровно m раз, но с добавочным условием, которое, соответственно порядку слагаемых в сумме, состоит в появлении при n -м испытании:

событий A и E , событий A и F , событий B и E , и т. д.

При таких обозначениях не трудно установить шесть линейных уравнений, из которых мы приведем только два, достаточно выясняющие состав их всех:

$$\frac{1}{\rho \xi} \frac{e, n+1}{a} A_m = p \frac{ae e, n}{A_{m-1}} + p \frac{af f, n}{A_{m-1}} + p \frac{be e, n}{B_{m-1}} + p \frac{bf f, n}{B_{m-1}} + p \frac{ce e, n}{C_{m-1}} + p \frac{cf f, n}{C_{m-1}},$$

$$\frac{1}{\sigma} \frac{f, n+1}{a} A_m = p \frac{ae e, n}{A_m} + p \frac{af f, n}{A_m} + p \frac{be e, n}{B_m} + p \frac{bf f, n}{B_m} + p \frac{ce e, n}{C_m} + p \frac{cf f, n}{C_m}.$$

Введя затем производящие функции

$$\begin{aligned} \varphi_n^{ae} &= \sum A_m^{e, n} \xi^m, & \varphi_n^{af} &= \sum A_m^{f, n} \xi^m, & \varphi_n^{be} &= \sum B_m^{e, n} \xi^m, \\ \varphi_n^{bf} &= \sum B_m^{f, n} \xi^m, & \varphi_n^{ce} &= \sum C_m^{e, n} \xi^m, & \varphi_n^{cf} &= \sum C_m^{f, n} \xi^m, \end{aligned}$$

легко находим для них также шесть уравнений, которые вполне характеризуются двумя из них

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho \xi} \frac{ae}{a} \varphi_{n+1} &= p \varphi_n^{ae} + p \varphi_n^{af} + p \varphi_n^{be} + p \varphi_n^{bf} + p \varphi_n^{ce} + p \varphi_n^{cf}, \\ \frac{1}{\sigma} \frac{af}{a} \varphi_{n+1} &= p \varphi_n^{ae} + p \varphi_n^{af} + p \varphi_n^{be} + p \varphi_n^{bf} + p \varphi_n^{ce} + p \varphi_n^{cf}. \end{aligned}$$

Последние уравнения, прежде всего, устанавливают простые соотношения между функциями φ , отличающимися друг от друга только значками e и f :

$$\sigma \varphi_n^{ae} - \rho \xi \varphi_n^{af} = 0, \quad \sigma \varphi_n^{be} - \rho \xi \varphi_n^{bf} = 0, \quad \sigma \varphi_n^{ce} - \rho \xi \varphi_n^{cf} = 0.$$

Принимая во внимание эти соотношения, мы можем свести разыскание шести функций

$$\varphi_n^{ae}, \varphi_n^{af}, \varphi_n^{be}, \varphi_n^{bf}, \varphi_n^{ce}, \varphi_n^{cf}$$

к разысканию трех функций

$$\psi_n^a = \frac{\varphi_n^{ae} + \varphi_n^{af}}{\rho \xi + \sigma}, \quad \psi_n^b = \frac{\varphi_n^{be} + \varphi_n^{bf}}{\rho \xi + \sigma}, \quad \psi_n^c = \frac{\varphi_n^{ce} + \varphi_n^{cf}}{\rho \xi + \sigma},$$

посредством которых выражаются прежние согласно формулам

$$\varphi_n = \overset{ae}{p}\overset{a}{\xi}\overset{a}{\psi}_n, \quad \varphi_n = \overset{af}{\sigma}\overset{a}{\psi}_n, \quad \varphi_n = \overset{be}{p}\overset{b}{\xi}\overset{b}{\psi}_n, \text{ и т. д.}$$

Вместе с тем шесть уравнений, установленные нами для функций φ , сводятся к трем

$$\begin{aligned} \overset{a}{\psi}_{n+1} &= \left(\overset{aea}{p}\overset{a}{\xi} + \overset{afa}{p}\overset{a}{\sigma} \right) \overset{a}{\psi}_n + \left(\overset{beb}{p}\overset{b}{\xi} + \overset{bfb}{p}\overset{b}{\sigma} \right) \overset{b}{\psi}_n + \left(\overset{cec}{p}\overset{c}{\xi} + \overset{cfc}{p}\overset{c}{\sigma} \right) \overset{c}{\psi}_n, \\ \overset{b}{\psi}_{n+1} &= \left(\overset{aea}{q}\overset{a}{\xi} + \overset{afa}{q}\overset{a}{\sigma} \right) \overset{a}{\psi}_n + \left(\overset{beb}{q}\overset{b}{\xi} + \overset{bfb}{q}\overset{b}{\sigma} \right) \overset{b}{\psi}_n + \left(\overset{cec}{q}\overset{c}{\xi} + \overset{cfc}{q}\overset{c}{\sigma} \right) \overset{c}{\psi}_n, \\ \overset{c}{\psi}_{n+1} &= \left(\overset{aea}{r}\overset{a}{\xi} + \overset{afa}{r}\overset{a}{\sigma} \right) \overset{a}{\psi}_n + \left(\overset{beb}{r}\overset{b}{\xi} + \overset{bfb}{r}\overset{b}{\sigma} \right) \overset{b}{\psi}_n + \left(\overset{cec}{r}\overset{c}{\xi} + \overset{cfc}{r}\overset{c}{\sigma} \right) \overset{c}{\psi}_n, \end{aligned}$$

откуда не трудно, по известным правилам,* вывести для всех функций

$$\overset{a}{\psi}_n, \quad \overset{b}{\psi}_n, \quad \overset{c}{\psi}_n$$

одно и то же линейное уравнение, в конечных разностях, третьего порядка.

Тому же уравнению будет удовлетворять и функция

$$\varphi_n(\xi) = \sum^n P_m \xi^m,$$

равная

$$\left(\overset{a}{p}\overset{a}{\xi} + \overset{a}{\sigma} \right) \overset{a}{\psi}_n + \left(\overset{b}{p}\overset{b}{\xi} + \overset{b}{\sigma} \right) \overset{b}{\psi}_n + \left(\overset{c}{p}\overset{c}{\xi} + \overset{c}{\sigma} \right) \overset{c}{\psi}_n.$$

Соответствующая ему целая функция $F(\xi, t)$, на которую следует помножить бесконечный ряд

$$1 + t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + t^3\varphi_3 + \dots$$

для получения, в произведении, целой функции перемен-

* А. Марков. Исчисление конечных разностей. Издание второе, 1911.

ного t , определяется формулой

$$F(\xi, t) = \begin{vmatrix} \left(\overset{a}{p}\overset{a}{r}\overset{a}{\xi} + \overset{a}{p}\overset{a}{\sigma} \right) t - 1, & \left(\overset{b}{p}\overset{b}{r}\overset{b}{\xi} + \overset{b}{p}\overset{b}{\sigma} \right) t, & \left(\overset{c}{p}\overset{c}{r}\overset{c}{\xi} + \overset{c}{p}\overset{c}{\sigma} \right) t \\ \left(\overset{a}{q}\overset{a}{r}\overset{a}{\xi} + \overset{a}{q}\overset{a}{\sigma} \right) t, & \left(\overset{b}{q}\overset{b}{r}\overset{b}{\xi} + \overset{b}{q}\overset{b}{\sigma} \right) t - 1, & \left(\overset{c}{q}\overset{c}{r}\overset{c}{\xi} + \overset{c}{q}\overset{c}{\sigma} \right) t \\ \left(\overset{a}{r}\overset{a}{r}\overset{a}{\xi} + \overset{a}{r}\overset{a}{\sigma} \right) t, & \left(\overset{b}{r}\overset{b}{r}\overset{b}{\xi} + \overset{b}{r}\overset{b}{\sigma} \right) t, & \left(\overset{c}{r}\overset{c}{r}\overset{c}{\xi} + \overset{c}{r}\overset{c}{\sigma} \right) t - 1 \end{vmatrix}.$$

При $\xi=1$ эта новая функция $F(\xi, t)$ совпадает с соответствующей функцией

$$F(1, t) = \begin{vmatrix} \overset{a}{p}t - 1, & \overset{b}{p}t, & \overset{c}{p}t \\ \overset{a}{q}t, & \overset{b}{q}t - 1, & \overset{c}{q}t \\ \overset{a}{r}t, & \overset{b}{r}t, & \overset{c}{r}t - 1 \end{vmatrix}$$

первого параграфа, причем

$$\overset{a}{p}, \overset{b}{p}, \overset{c}{p}, \overset{a}{q}, \overset{b}{q}, \overset{c}{q}, \overset{a}{r}, \overset{b}{r}, \overset{c}{r}$$

определяются, по новым данным, простыми формулами

$$\begin{array}{lll} \overset{a}{p} = \overset{a}{p}\overset{a}{r} + \overset{a}{\sigma}\overset{a}{p}, & \overset{b}{p} = \overset{b}{p}\overset{b}{r} + \overset{b}{\sigma}\overset{b}{p}, & \overset{c}{p} = \overset{c}{p}\overset{c}{r} + \overset{c}{\sigma}\overset{c}{p}, \\ \overset{a}{q} = \overset{a}{p}\overset{a}{q} + \overset{a}{\sigma}\overset{a}{q}, & \overset{b}{q} = \overset{b}{p}\overset{b}{q} + \overset{b}{\sigma}\overset{b}{q}, & \overset{c}{q} = \overset{c}{p}\overset{c}{q} + \overset{c}{\sigma}\overset{c}{q}, \\ \overset{a}{r} = \overset{a}{p}\overset{a}{r} + \overset{a}{\sigma}\overset{a}{r}, & \overset{b}{r} = \overset{b}{p}\overset{b}{r} + \overset{b}{\sigma}\overset{b}{r}, & \overset{c}{r} = \overset{c}{p}\overset{c}{r} + \overset{c}{\sigma}\overset{c}{r}, \end{array}$$

правильность которых очевидна.

И попрежнему, устранив известные особенные случаи, мы можем ввести числа

$$\overset{a}{p}, \overset{b}{q}, \overset{c}{r},$$

определяемые формулами

$$h\overset{a}{p} = \begin{vmatrix} \overset{b}{q} - 1, & \overset{c}{r} \\ \overset{b}{r}, & \overset{c}{r} - 1 \end{vmatrix}, \quad h\overset{b}{q} = \begin{vmatrix} \overset{a}{p} - 1, & \overset{c}{r} \\ \overset{a}{r}, & \overset{c}{r} - 1 \end{vmatrix}, \quad h\overset{c}{r} = \begin{vmatrix} \overset{a}{p} - 1, & \overset{b}{q} \\ \overset{a}{q}, & \overset{b}{q} - 1 \end{vmatrix},$$

$$h = F'_{t=1}(1, t) = \begin{vmatrix} \overset{b}{q} - 1, & \overset{c}{q} \\ \overset{b}{r}, & \overset{c}{r} - 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overset{a}{p} - 1, & \overset{c}{p} \\ \overset{a}{r}, & \overset{c}{r} - 1 \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} \overset{a}{p} - 1, & \overset{b}{p} \\ \overset{a}{q}, & \overset{b}{q} - 1 \end{vmatrix}$$

и представляющие, соответственно, пределы вероятностей событий

A, B, C

для испытаний, безгранично удаляющихся от первого.

Затем простые вычисления дают нам:

$$F'_{\xi=1}(\xi, 1) = h \overset{a}{p} \overset{b}{\rho} + h \overset{b}{q} \overset{c}{\rho} + h \overset{c}{r} \overset{e}{\rho},$$

$$\rho = \frac{F'_{\xi=1}(\xi, 1)}{F'_{t=1}(1, t)} = \overset{a}{p} \overset{b}{\rho} + \overset{b}{q} \overset{c}{\rho} + \overset{c}{r} \overset{e}{\rho}, \quad \sigma = \overset{a}{p} \overset{b}{\sigma} + \overset{b}{q} \overset{c}{\sigma} + \overset{c}{r} \overset{e}{\sigma},$$

$$\left\{ \frac{d^2 F(e^u, e^{-\rho u})}{du^2} \right\}_{u=0} = R_a + R_b + R_c + 2S_a + 2S_b + 2S_c,$$

$$R_a = \begin{vmatrix} \overset{ac}{p} \overset{a}{\rho} \overset{a}{\sigma}^2 + \overset{af}{p} \overset{a}{\sigma} \overset{b}{\rho}^2, & \overset{b}{p}, & \overset{c}{p} \\ \overset{ae}{q} \overset{a}{\rho} \overset{a}{\sigma}^2 + \overset{af}{q} \overset{a}{\sigma} \overset{b}{\rho}^2, & \overset{b}{q} - 1, & \overset{c}{q} \\ \overset{ae}{r} \overset{a}{\rho} \overset{a}{\sigma}^2 + \overset{af}{r} \overset{a}{\sigma} \overset{b}{\rho}^2, & \overset{b}{r}, & \overset{c}{r} - 1 \end{vmatrix} = p h (\overset{a}{\rho} \overset{a}{\sigma}^2 + \overset{a}{\sigma} \overset{b}{\rho}^2),$$

$$R_a + R_b + R_c = h \sigma^2 (\overset{a}{p} \overset{b}{\rho} + \overset{b}{q} \overset{c}{\rho} + \overset{c}{r} \overset{e}{\rho}) + h \rho^2 (\overset{a}{p} \overset{b}{\sigma} + \overset{b}{q} \overset{c}{\sigma} + \overset{c}{r} \overset{e}{\sigma}) = \\ = h (\sigma^2 \rho + \rho^2 \sigma) = h \rho \sigma,$$

$$S_a = \begin{vmatrix} \overset{a}{p} - 1, & \overset{be}{p} \overset{b}{\rho} \overset{b}{\sigma} - \overset{bf}{p} \overset{b}{\sigma} \overset{b}{\rho}, & \overset{ce}{p} \overset{c}{\rho} \overset{c}{\sigma} - \overset{cf}{p} \overset{c}{\sigma} \overset{c}{\rho} \\ \overset{a}{q}, & \overset{be}{q} \overset{b}{\rho} \overset{b}{\sigma} - \overset{bf}{q} \overset{b}{\sigma} \overset{b}{\rho}, & \overset{ce}{q} \overset{c}{\rho} \overset{c}{\sigma} - \overset{cf}{q} \overset{c}{\sigma} \overset{c}{\rho} \\ \overset{a}{r}, & \overset{be}{r} \overset{b}{\rho} \overset{b}{\sigma} - \overset{bf}{r} \overset{b}{\sigma} \overset{b}{\rho}, & \overset{ce}{r} \overset{c}{\rho} \overset{c}{\sigma} - \overset{cf}{r} \overset{c}{\sigma} \overset{c}{\rho} \end{vmatrix},$$

$$S_b = \begin{vmatrix} ae a & afa & b & ce c & cfc \\ p \rho \sigma - p \sigma \rho, & p & , & p \rho \sigma - p \sigma \rho \\ ae a & afa & b & ce c & afc \\ q \rho \sigma - q \sigma \rho, & q - 1, & q \rho \sigma - q \sigma \rho \\ ae a & afa & b & ce c & cfc \\ r \rho \sigma - r \sigma \rho, & r & , & r \rho \sigma - r \sigma \rho \end{vmatrix},$$

$$S_c = \begin{vmatrix} ae a & afa & be b & bfb & c \\ p \rho \sigma - p \sigma \rho, & p \rho \sigma - p \sigma \rho, & p \\ ae a & afa & bc b & afb & c \\ q \rho \sigma - q \sigma \rho, & q \rho \sigma - q \sigma \rho, & q \\ ae a & afa & be b & bfb & c \\ r \rho \sigma - r \sigma \rho, & r \rho \sigma - r \sigma \rho, & r - 1 \end{vmatrix}.$$

Таким образом мы убеждаемся, что рассматриваемый теперь новый случай отличается, с принятой нами точки зрения, от случая первого параграфа только величиною Δ , которая для нового случая определяется формулою

$$\Delta = \rho \sigma + \frac{2}{h} (S_a + S_b + S_c).$$

Мы не будем заниматься преобразованием этой формулы в какой-нибудь более удобный вид, а применим ее к одному частному примеру, который, по моему мнению, заслуживает особого внимания.

Пусть совокупность e белых и f черных шаров распределена на два сосуда, причем в один сосуд помещено только два шара, а все остальные — в другой. Затем производится последовательный обмен шаров между этими сосудами, при сохранении неизменным числа шаров в каждом сосуде, т. е. производится ряд таких операций: из первого сосуда извлекается один шар и переносится во второй и, одновременно, один шар второго сосуда перекладывается в первый. Эти операции мы называем испытаниями, а событием E назовем белый цвет шара, переносимого из первого сосуда во второй; наконец, событиями

A, B, C

мы назовем соответственно три различных предположения о цвете обоих шаров первого сосуда:

оба белые, один белый, другой черный, оба черные.

При таких условиях имеем

$$p = p = \frac{e-2}{e+f-2}, \quad p = 0 = r, \quad p = p = 0,$$

$$q = q = \frac{f}{e+f-2}, \quad q = \frac{e-1}{e+f-2} = p, \quad q = q = \frac{e}{e+f-2},$$

$$r = r = 0, \quad r = \frac{f-1}{e+f-2} = q, \quad r = r = \frac{f-2}{e+f-2},$$

$$\rho = 1, \quad \sigma = 0, \quad \rho = \sigma = \frac{1}{2}, \quad \rho = 0, \quad \sigma = 1$$

и по этим данным находим

$$F(\xi, t) = \begin{vmatrix} \frac{e-2}{e+f-2} \xi t - 1, & \frac{e-1}{2(e+f-2)} t & , & 0 \\ \frac{f}{e+f-2} \xi t & , & \frac{(e-1)\xi + f - 1}{2(e+f-2)} t - 1, & \frac{e}{e+f-2} t \\ 0 & , & \frac{f-1}{2(e+f-2)} \xi t & , & \frac{f-2}{e+f-2} t - 1 \end{vmatrix},$$

$$ph = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}, & \frac{e}{e+f-2} \\ \frac{f-1}{2(e+f-2)}, & \frac{-e}{e+f-2} \end{vmatrix} = \frac{e(e-1)}{2(e+f-2)^2},$$

$$rh = \frac{f(f-1)}{2(e+f-2)^2},$$

$$qh = \begin{vmatrix} \frac{-f}{e+f-2}, & 0 \\ 0 & , & \frac{-e}{e+f-2} \end{vmatrix} = \frac{2ef}{2(e+f-2)^2},$$

$$h = (p + q + r) h = \frac{(e+f)(e+f-1)}{2(e+f-2)^2},$$

$$p = \frac{e(e-1)}{(e+f)(e+f-1)}, \quad q = \frac{2ef}{(e+f)(e+f-1)},$$

$$r = \frac{f(f-1)}{(e+f)(e+f-1)},$$

$$\rho = \frac{e(e+f-1)}{(e+f)(e+f-1)} = \frac{e}{e+f}, \quad \sigma = \frac{f}{e+f},$$

$$S_a = \frac{f\rho}{e+f-2} \begin{vmatrix} -1, & -\frac{(e-1)\rho}{2(e+f-2)}, & 0 \\ +1, & \frac{(e-1)\sigma - (f-1)\rho}{2(e+f-2)}, & -\frac{e}{e+f-2} \\ 0, & \frac{(f-1)\sigma}{2(e+f-2)}, & -\frac{f-2}{e+f-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\rho\sigma}{2(e+f-2)^3} \begin{vmatrix} 1, & -(e-1)e, & 0 \\ -1, & (e-1)f - (f-1)e, & e \\ 0, & (f-1)f, & f-2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\rho\sigma}{2(e+f-2)^2} \begin{vmatrix} f-e, & 1 \\ (f-1)f, & f-2 \end{vmatrix} = \frac{\rho\sigma(-ef+2e-f)}{2(e+f-2)^2},$$

$$S_a = \frac{\rho\sigma(-ef+2e-f)}{2(e+f-2)^2},$$

$$S_b = \frac{-\rho\sigma}{2(e+f-2)^3} \begin{vmatrix} e-2, & e-1, & 0 \\ f, & -e-f+2, & e \\ 0, & f-1, & f-2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-\rho\sigma}{2(e+f-2)^2} \begin{vmatrix} e-2, & e-1, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \\ 0, & f-1, & f-2 \end{vmatrix} = \frac{\rho\sigma(2ef-3e-3f+4)}{2(e+f-2)^2},$$

$$S_c = \frac{\rho\sigma(-ef+2f-e)}{2(e+f-2)^2}$$

$$S_a + S_b + S_c = \frac{-\rho\sigma}{e+f-2}$$

и, наконец,

$$\Delta = \rho\sigma \left(1 - \frac{4(e+f-2)}{(e+f)(e+f-1)} \right).$$

. Мы предполагали все время, что число ненаблюдаемых событий

$A, B, C,$

играющих, однако, важную роль при установлении цепи испытаний, равно трем. При таком предположении мы провели общие вычисления, можно сказать, до конца, выразив результат довольно простыми определителями. Общий характер наших выводов остается одинаковым при любом числе событий

$$A, B, C, \dots,$$

но вычисления, конечно, усложняются с увеличением этого числа.

Замечательно, однако, что последнему примеру мы можем придать значительную общность, не усложняя существенным образом окончательного вывода. Этой общности мы достигаем, предполагая, что в первый сосуд помещено не два, а любое определенное число шаров.

Итак, пример наш, относящийся к случаям, когда число событий

$$A, B, C, \dots$$

как угодно велико, определяется нижеследующими условиями.

Совокупность e белых и f черных шаров распределена на два сосуда, причем в один сосуд, который мы назовем первым, помещено k шаров, а все остальные — в другой; число шаров во втором сосуде, равное $e + f - k$, обозначим буквою l .

Между этими сосудами, не содержащими никаких других шаров, производится последовательный обмен шаров, т. е. производится ряд таких операций: из первого сосуда извлекается один шар и переносится во второй и, одновременно, один шар второго сосуда переносится в первый. Указанные операции мы называем испытаниями, а событием E назовем белый цвет шара, переносимого из первого сосуда во второй; наконец мы назовем событиями

$$A, B, C, \dots$$

различные предположения о цвете шаров первого сосуда:

все белые, $k-1$ белых, один черный, ..., все черные;

для удобства мы можем обозначить эти события символами

$$(k), (k-1), (k-2), \dots, (1), (0),$$

где в скобках поставлены предполагаемые числа белых шаров.

Числа

$$e, f, k, l,$$

связанные равенством

$$e + f = k + l,$$

конечно, мы считаем данными.

Что же касается первоначального распределения шаров между сосудами, то в наших исследованиях, имеющих в виду предельные теоремы, оно может оставаться совершенно неопределенным.

На основании поставленных нами условий не трудно определить для всех возможных значений i и j величины

$$\begin{matrix} (k-i) & (k-i) & (k-i), e & (k-i), f \\ \rho, & \sigma, & \rho, & \rho, \\ & & (k-j) & (k-j) \end{matrix}$$

которые представляют такие вероятности: первая — вероятность шару, переходящему из первого сосуда во второй, быть белым, когда известно, что непосредственно перед моментом этого перехода в первом сосуде было ровно $k-i$ белых шаров; вторая — вероятность тому же шару, при тех же условиях, быть черным; третья — вероятность, что за появившейся совокупностью событий.

$$(k-i), E$$

следует, непосредственно, событие

$$(k-j),$$

и, наконец, четвертая — вероятность событию $(k-j)$ не-

посредственно следовать за появившейся совокупностью

$$(k-i), F.$$

А именно имеем:

$$\begin{aligned} \rho^{(k-i)} &= \frac{k-i}{k}, \quad \rho_{(k-i-1)}^{(k-i),e} = \frac{f-i}{l} = \rho_{(k-i)}^{(k-i),f}, \quad \text{при } f > i, \\ \sigma^{(k-i)} &= \frac{i}{k}, \quad \rho_{(k-i)}^{(k-i),e} = \frac{e-k+i}{l} = \rho_{(k-i+1)}^{(k-i),f}, \quad \text{при } e > k-i; \end{aligned}$$

остальные же числа

$$\rho_{(k-j)}^{(k-i),e} \quad \text{и} \quad \rho_{(k-j)}^{(k-i),f}$$

— нули.

По этим данным можно тотчас представить соответствующую функцию

$$F(\xi, t)$$

в виде определителя $k+1$ -го порядка.

Рассматривая затем миноры первого порядка этого определителя, находим для пределов

$$\begin{matrix} (k) & (k-1) & & (k-i) & & (1) & (0) \\ p, & p, & \dots, & p, & \dots, & p, & p, \end{matrix}$$

к которым стремятся вероятности предположений

$$(k), (k-1), \dots, (k-i), \dots, (1), (0)$$

при неограниченном обмене шаров, простую общую формулу

$$\begin{aligned} & \rho^{(k-i)} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}{1 \cdot 2 \cdot (k-i) 1 \cdot 2 \dots i} \frac{e(e-1) \dots (e-k+i+1) f(f-1) \dots (f-i+1)}{(e+f)(e+f-1) \dots (l+1)}. \end{aligned}$$

Вместе с тем оказывается, что предельные величины

$$\rho \quad \text{и} \quad \sigma$$

вероятностей событий E и F для испытаний, безгранично удаленных от начального, выражаемые суммами

$$\sum p^{(k-i)} \rho^{(k-i)} \text{ и } \sum p^{(k-i)} \sigma^{(k-i)},$$

соответственно равны

$$\frac{e}{e+f} \text{ и } \frac{f}{e+f}.$$

Остается вычислить Δ . Наши формулы дают для Δ весьма сложное выражение. Но путем рассмотрения частных случаев мне удалось прийти к замечательному, простому равенству

$$\Delta = \frac{ef}{(e+f)^2} \left\{ 1 - \frac{2kl}{(e+f)(e+f-1)} \right\}.$$

Итак, обозначив буквою n число произведенных испытаний, т. е. число шаров, переложенных из первого сосуда во второй, а буквою m соответствующее число появлений события E , т. е. число белых шаров среди этих n шаров, мы можем высказать такое предложение: при беспредельном возрастании числа n вероятность неравенств

$$t_1 \sqrt{\frac{2ef}{ns^2} \left(1 - \frac{2kl}{s(s-1)} \right)} < \frac{m}{n} - \frac{e}{s} < t_2 \sqrt{\frac{2ef}{ns^2} \left(1 - \frac{2kl}{s(s-1)} \right)},$$

где

$$s = e + f,$$

а t_1 и t_2 — любые данные числа, удовлетворяющие неравенству $t_2 > t_1$, стремится к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt.$$

Что касается отношения

$$\Delta : \frac{ef}{(e+f)^2},$$

которое можно назвать коэффициентом дисперсии, то мы считаем интересным отметить следующее:

1) этот коэффициент, в данном случае равный

$$1 - \frac{2kl}{(e+f)(e+f-1)},$$

меньше единицы,

2) он не зависит от e и f в отдельности, а только от суммы их,

3) при одной и той же величине $e+f$, но при различных значениях k и l , он достигает наименьшей величины, равной

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2(e+f-1)} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2(e+f)},$$

когда

$$k=l \quad \text{или} \quad k-l = \pm \frac{1}{2}.$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО СЛУЧАЯ ИСПЫТАНИЙ, СВЯЗАННЫХ В ЦЕПЬ

*Доложено в заседании Физико-математического отделения
3 февраля 1910 г.*

Исследуя простейший случай испытаний, связанных в цепь, мы выяснили* возможность распространения на этот случай закона больших чисел, а затем установили** для него и теорему о пределе математического ожидания, из которой вытекает, в силу работ Чебышева и моих, теорема о пределе вероятности.

Наши выводы были основаны, в наиболее трудной своей части, на рассмотрении производящих функций, которые для данного случая выражаются довольно просто.

Рассмотрение производящих функций дало нам также возможность перенести те же выводы на любую однородную*** цепь величин.****

Для неоднородных цепей этот прием едва ли может вести к упрощению исследования, ввиду сложности самих производящих функций.

Поэтому, желая распространить теоремы о пределе математического ожидания и о пределе вероятности на величины,

* Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга. Изв. Физ.-мат. общ. при Казанск. унив., вторая серия, т. XV, № 4 [1].

** Исследование замечательного случая зависимых испытаний. Изв. Акад. Наук, 1907.

*** Я полагаю, что этим термином можно охарактеризовать рассмотренные нами цепи, в отличие от других цепей связанных величин.

**** Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь. Зап. Акад. Наук, серия VIII, т. XXII, № 9 [2].

связанные в неоднородную цепь, мы вынуждены возвратиться к тем приемам, которые с успехом были нами применены к различным случаям независимых величин и состоят в том, что математическое ожидание степени суммы мы разлагаем, в силу формулы Ньютона, на отдельные суммы, из которых затем выделяем суммы, возрастающие быстрее всех прочих, с увеличением, конечно, числа рассматриваемых величин.

В настоящей статье мы займемся общим случаем испытаний, связанных в неоднородную цепь, которая не содержит таких мест, где вероятность события может оказаться равною нулю или единице, или произвольно близкою к этим числам. Заметим, что под словом вероятность мы подразумеваем здесь, для каждого испытания, не одно, а три числа, соответствующих различным данным, как было уже установлено в работе „Исследование замечательного случая зависимых испытаний“.

§ 1. Начиная наши исследования, мы прежде всего должны установить условия вопроса и ввести ряд обозначений.

Мы будем рассматривать неограниченный ряд последовательных испытаний, которые будем отличать, по порядку, друг от друга номерами 1, 2, 3, ...

При каждом из этих испытаний может появиться как некоторое событие E , так и противоположное ему F . Наши испытания связаны в цепь таким образом, что для любого целого положительного числа k имеем:

1) вероятность события E при $k+1$ -м испытании имеет определенную величину p_{k+1} , пока результаты их вообще остаются неопределенными; вероятность F при тех же условиях равна

$$q_{k+1} = 1 - p_{k+1};$$

2) вероятность события E при $k+1$ -м испытании принимает другую определенную величину p'_{k+1} , если результаты последующих испытаний попрежнему остаются неопределен-

ными, а непосредственно предшествующее испытание, т. е. k -е, привело к событию E , каковы бы ни были результаты прочих испытаний, т. е. 1-го, 2-го, ..., $k-1$ -го; вероятность события F при этих новых условиях равна

$$q'_{k+1} = 1 - p'_{k+1};$$

3) наконец, вероятность E при $k+1$ -м испытании принимает третью определенную величину p''_{k+1} , если результаты последующих испытаний также остаются неопределенными, а непосредственно предшествующее испытание, т. е. k -е, не привело к событию E , каковы бы ни были результаты прочих испытаний, т. е. 1-го, 2-го, ..., $k-1$ -го; вероятность событий F в этом последнем случае равна

$$q''_{k+1} = 1 - p''_{k+1}.$$

В силу этих условий $k+1$ -е испытание связано с 1-м, 2-м, ..., $k-1$ -м только через посредство k -го испытания и становится независимым от них, коль скоро результат k -го испытания определен.

К указанным данным нам надо прибавить еще вероятности

$$p_1 \text{ и } q_1 = 1 - p_1$$

событий E и F при первом испытании в предположении, что результаты всех испытаний, вообще, остаются неопределенными.

Числа

$$p_1, p'_2, p''_2, p'_3, p''_3, p'_4, p''_4, \dots$$

можно задать произвольно; и по этим данным не трудно последовательно найти

$$p_2, p_3, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots$$

на основании простой общей формулы

$$p_{k+1} = p_k p'_{k+1} + q_k p''_{k+1}. \quad (1)$$

Эта формула может служить также для другой цели: при помощи ее мы можем выразить

$$p'_{k+1}, p''_{k+1}, q'_{k+1}, q''_{k+1}$$

через

$$p_{k+1}, q_{k+1}, p_k, q_k \text{ и } \delta_{k+1} = p'_{k+1} - p''_{k+1}.$$

В самом деле: полагая

$$p''_{k+1} = p'_{k+1} - \delta_{k+1},$$

из формулы (1) выводим

$$p_{k+1} = p'_{k+1}(p_k + q_k) - \delta_{k+1} q_k = p'_{k+1} - \delta_{k+1} q_k$$

и на этом основании тотчас можем установить ряд простых равенств

$$\begin{aligned} p'_{k+1} &= p_{k+1} + \delta_{k+1} q_k, & q'_{k+1} &= q_{k+1} - \delta_{k+1} q_k, \\ p''_{k+1} &= p_{k+1} - \delta_{k+1} p_k, & q''_{k+1} &= q_{k+1} + \delta_{k+1} p_k. \end{aligned} \quad (2)$$

Поэтому можно ввести в наши вычисления вместо

$$p'_{k+1}, p''_{k+1}, q'_{k+1}, q''_{k+1}$$

числа

$$p_{k+1}, q_{k+1}, \delta_{k+1},$$

что мы и сделаем, имея в виду сообщить нашим выводам возможную простоту.

Следует заметить, что числа

$$p'_{k+1}, p''_{k+1}$$

ограничены только неравенствами

$$0 \leq p'_{k+1} \leq 1, \quad 0 \leq p''_{k+1} \leq 1,$$

в силу которых имеем

$$-1 \leq \delta_{k+1} \leq 1.$$

Если же вместо p'_{k+1} и p''_{k+1} мы введем числа

$$p_{k+1} \text{ и } \delta_{k+1},$$

то, как не трудно убедиться, числа δ_{k+1} должны быть ограничены новыми неравенствами

$$-\frac{p_{k+1}}{q_k} \leq \delta_{k+1} \leq \frac{q_{k+1}}{q_k} \text{ и } -\frac{q_{k+1}}{p_k} \leq \delta_{k+1} \leq \frac{p_{k+1}}{p_k};$$

а числа p_{k+1} должны удовлетворять только неравенствам

$$0 \leq p_{k+1} \leq 1.$$

§ 2. Остановимся теперь на важном для нашей цели вопросе о вычислении вероятности события E при k -м испытании, сначала под условием, что E появилось при i -м испытании, а затем при противоположном условии, что E не появилось при i -м испытании, причем $i < k$.

Для этой цели, обозначив первую из указанных вероятностей символом $P_k^{(i)}$, а вторую — символом $\bar{P}_k^{(i)}$ и рассматривая их при различных величинах нижнего значка, выводим простые уравнения

$$\begin{aligned} P_{k+1}^{(i)} &= P_k^{(i)} p'_{k+1} + (1 - P_k^{(i)}) p''_{k+1} = p_{k+1} - \delta_{k+1} p_k + \delta_{k+1} P_k^{(i)}, \\ \bar{P}_{k+1}^{(i)} &= \bar{P}_k^{(i)} p'_{k+1} + (1 - \bar{P}_k^{(i)}) p''_{k+1} = p_{k+1} - \delta_{k+1} p_k + \delta_{k+1} \bar{P}_k^{(i)}. \end{aligned}$$

Вместе с тем замечаем, что в силу установленных нами обозначений должно быть

$$P_{i+1}^{(i)} = p'_{i+1} = p_{i+1} + \delta_{i+1} q_i, \quad \bar{P}_{i+1}^{(i)} = p''_{i+1} = p_{i+1} - \delta_{i+1} p_i.$$

Ввиду таких равенств, не трудно из вышеприведенных уравнений последовательно вывести

$$\begin{aligned} P_{i+2}^{(i)} &= p_{i+2} + \delta_{i+1} \delta_{i+2} q_i, & \bar{P}_{i+2}^{(i)} &= p_{i+2} - \delta_{i+1} \delta_{i+2} p_i, \\ P_{i+3}^{(i)} &= p_{i+3} + \delta_{i+1} \delta_{i+2} \delta_{i+3} q_i, & \bar{P}_{i+3}^{(i)} &= p_{i+3} - \delta_{i+1} \delta_{i+2} \delta_{i+3} p_i, \end{aligned}$$

и вообще

$$P_k^{(i)} = p_k + \delta_{i+1} \delta_{i+2} \dots \delta_k q_i, \quad \bar{P}_k^{(i)} = p_k - \delta_{i+1} \delta_{i+2} \dots \delta_k p_i. \quad (3)$$

Так определяется, при условиях разбираемого вопроса, вероятность события E при k -м испытании, когда известен результат i -го испытания, причем $i < k$.

Не трудно также установить формулы для вычисления вероятностей

$$P_i^{(k)} \text{ и } \bar{P}_i^{(k)}$$

события E при i -м испытании под условием, что E имеет место при k -м испытании, и под условием, что E не имеет места при k -м испытании, причем попрежнему $i < k$.

Эти последние формулы вытекают непосредственно из формулы (3) и следующих простых равенств

$$p_i P_k^{(i)} = p_k P_i^{(k)} \text{ и } p_i (1 - P_k^{(i)}) = q_k \bar{P}_i^{(k)};$$

а именно, имеем

$$\begin{aligned} P_i^{(k)} &= p_i + \delta_{i+1} \delta_{i+2} \dots \delta_k \frac{p_i q_i}{p_k}, \\ \bar{P}_i^{(k)} &= p_i - \delta_{i+1} \delta_{i+2} \dots \delta_k \frac{p_i q_i}{q_k}. \end{aligned} \quad (4)$$

Остановливаясь на формулах (3) и (4), заметим, что, согласно сказанному нами в предисловии, ни одно из чисел p_k и q_k не равно нулю и не может быть сколь угодно близким к нулю; так что для некоторых постоянных чисел p° и p оправдываются неравенства

$$1 > p^\circ > p_k > p > 0$$

при любом значке k .

Делая подобное же предположение относительно всех чисел p'_{k+1} и p''_{k+1} , мы должны также установить общие не-

равенства

$$-1 < -\delta < \delta_{k+1} < \delta < 1,$$

где δ сохраняет одну и ту же величину при всех значениях k .

Указанные неравенства будут играть важную роль в наших заключениях о предельных значениях исследуемых нами выражений.

Можно, конечно, поставить вопрос о распространимости окончательных выводов и на те случаи, для которых среди чисел p_k , $1 - p_k$ и δ_{k+1} встречаются произвольно близкие к единице. Но мы не будем здесь заниматься этим трудным вопросом, оставляя его открытым для других исследователей.

Напротив, не желая долго останавливаться на разборе одного довольно сложного выражения, для выяснения быстроты его возрастания, мы считаем рациональным в настоящей статье ограничить числа δ_{k+1} некоторыми добавочными неравенствами, при соблюдении которых выяснение этой быстроты не представляет никаких затруднений. Эти неравенства мы введем в надлежащем месте, а пока нам достаточно вышеустановленных неравенств.

Так, например, вышеустановленных неравенств достаточно для того, чтобы из формул (3) и (4) вытекали неравенства

$$\begin{aligned} \text{числ. зн. } (P_k^{(i)} - p_k) &< \delta^{k-i}, & \text{числ. зн. } (\bar{P}_k^{(i)} - p_k) &< \delta^{k-i}, \\ \text{числ. зн. } (P_i^{(k)} - p_i) &< \frac{\delta^{k-i}}{4p^0}, & \text{числ. зн. } (\bar{P}_i^{(k)} - p_i) &< \frac{\delta^{k-i}}{4(1-p^0)}, \end{aligned}$$

на основании которых мы можем заключить, что все разности

$$P_k^{(i)} - p_k, \bar{P}_k^{(i)} - p_k, P_i^{(k)} - p_i, \bar{P}_i^{(k)} - p_i$$

приближаются к пределу нуль, когда разность $k - i$ возрастает беспредельно. Но последнее заключение, конечно,

может оправдываться во многих других случаях, на которых мы не останавливаемся.

§ 3. Обращаясь к рассмотрению совокупности первых n испытаний, обозначим для нее буквою m число появлений события E и, согласно известному правилу, положим

$$m = x_1 + x_2 + \dots + x_k + \dots + x_n. \quad (5)$$

Здесь x_k означает единицу, если при k -м испытании появляется событие E , и нуль в противном случае, когда при k -м испытании появляется событие F .

О возможных значениях числа m мы будем рассуждать в предположении, что результаты всех испытаний, вообще, остаются неопределенными. При таком предположении мы будем рассматривать математические ожидания различных степеней разности

$$m - (p_1 + p_2 + \dots + p_n),$$

равной сумме

$$x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n,$$

и сравнивать эти математические ожидания со степенями числа n , ставя себе целью выделить из каждого математического ожидания главную его часть, определяющую закон его возрастания, при беспредельном увеличении числа испытаний n .

Математическое ожидание первой степени разности

$$m - (p_1 + p_2 + \dots + p_n),$$

очевидно, равно нулю, ибо

$$\text{м. о. } x_1 = p_1, \text{ м. о. } x_2 = p_2, \dots, \text{ м. о. } x_n = p_n.$$

Не трудно составить и математическое ожидание квадрата

ни одна из сумм

$$1 + 2\delta_n, 1 + 2\delta_{n-1} + 2\delta_{n-1}\delta_n, \dots, \\ 1 + 2\delta_2 + 2\delta_2\delta_3 + \dots + 2\delta_2\delta_3 \dots \delta_n$$

не достигает величины

$$\frac{1+\delta}{1-\delta} = 1 + 2\delta + 2\delta^2 + 2\delta^3 + \dots + 2\delta^n + \dots,$$

и потому формула (6) дает нам неравенство

$$\text{м. о. } (m - p_1 - p_2 - \dots - p_n)^2 < \frac{n}{4} \cdot \frac{1+\delta}{1-\delta}.$$

А из такого неравенства выводится закон больших чисел путем известных рассуждений; так что с вероятностью, сколь угодно близкою к достоверности, мы можем, при достаточно большом n , утверждать, что разность

$$\frac{m}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}$$

будет, по числовой величине, меньше любого данного числа.

Для дальнейших наших рассуждений, относящихся к математическим ожиданиям высших степеней суммы

$$x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n,$$

важно, чтобы отношение

$$\frac{\text{м. о. } (x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n)^2}{n}$$

не могло становиться произвольно малым.

Мы не остановимся на вопросе, достаточно ли вышеуказанных неравенств для того, чтобы последнее требование было выполнено, а отметим только несколько случаев, когда не трудно удостовериться в выполнении его. Во-первых, если все

$$\delta_2, \delta_3, \dots$$

числа положительные, то каждая из сумм

$$1 + 2\delta_n, 1 + 2\delta_{n-1} + 2\delta_{n-1}\delta_n, \dots, \\ 1 + 2\delta_2 + 2\delta_2\delta_3 + \dots + 2\delta_2\delta_3\dots\delta_n$$

не меньше единицы, и потому из формулы (6), при сохранении общих неравенств

$$1 > p^0 > p_k > p > 0,$$

вытекает простое неравенство

$$\frac{\text{м. о. } (x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n)^2}{n} > p(1 - p^0).$$

Если же среди чисел

$$\delta_2, \delta_3, \dots$$

встречаются отрицательные, но при этом введенное раньше число δ меньше $\frac{1}{3}$, то каждая из сумм

$$1 + 2\delta_n, 1 + 2\delta_{n-1} + 2\delta_{n-1}\delta_n, \dots$$

больше положительного числа

$$\frac{1 - 3\delta}{1 - \delta} = 1 - 2\delta - 2\delta^2 - 2\delta^3 - \dots,$$

и потому мы можем установить, на основании формулы (6), также простое неравенство

$$\frac{\text{м. о. } (x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n)^2}{n} > \frac{1 - 3\delta}{1 - \delta} p(1 - p^0).$$

Выяснив таким образом существование случаев, для которых отношение

$$\frac{\text{м. о. } (x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n)^2}{n}$$

не может быть произвольно малым, мы в дальнейших выводах будем предполагать, что это условие выполнено, оставляя под сомнением, заключает ли оно новое ограничение или выполняется как следствие установленных ранее.*

§ 4. Прежде чем заняться математическим ожиданием

$$(x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n)^m$$

для любого данного целого положительного числа m , мы остановимся еще на частном случае

$$m=3,$$

разбор которого может служить для освещения некоторых особенностей предстоящих рассуждений.

Нам надо доказать, что выражение

$$\text{м. о.} \left\{ \frac{x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n}{\sqrt{\text{м. о.} (x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n)^2}} \right\}^3$$

стремится к пределу нуль, когда n возрастает беспрестанно. Для этой цели заметим, что исследуемое выражение должно стремиться к пределу нуль, если к такому пределу приближается отношение

$$\frac{\text{м. о.} (x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n)^3}{n^{\frac{3}{2}}},$$

от которого оно отличается только конечным множителем согласно условию, установленному нами в конце предыдущего параграфа. Затем обращаем внимание на известное простое равенство

$$\begin{aligned} & (x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n)^3 = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - p_i)^3 + 3 \sum_{1 \leq i < k \leq n} (x_i - p_i)^2 (x_k - p_k) + \end{aligned}$$

* Мы устраним это сомнение в конце статьи.

$$\begin{aligned}
& + 3 \sum_{1 \leq i < k \leq n} (x_i - p_i)(x_k - p_k)^2 + \\
& + 6 \sum_{1 \leq i < k < l \leq n} (x_i - p_i)(x_k - p_k)(x_l - p_l),
\end{aligned}$$

вытекающее, как частный случай, из обобщенной формулы Ньютона относительно степени суммы, и соответственно ему рассматриваем математические ожидания сумм

$$\begin{aligned}
& \sum (x_i - p_i)^3, \quad \sum (x_i - p_i)^2 (x_k - p_k), \quad \sum (x_i - p_i)(x_k - p_k)^2, \\
& \sum (x_i - p_i)(x_k - p_k)(x_l - p_l).
\end{aligned}$$

Математическое ожидание первой из них равно сумме

$$\sum p_i q_i (q_i^2 - p_i^2),$$

состоящей из n слагаемых, ни одно из которых не достигает по числовой величине $\frac{1}{4}$; поэтому отношение

$$\frac{\text{м. о. } \sum (x_i - p_i)^3}{n}$$

остается числом конечным; и отношение

$$\frac{\text{м. о. } \sum (x_i - p_i)^3}{\frac{3}{n^2}}$$

приближается к пределу нуль, когда n возрастает беспрестанно.

Обращаясь ко второй сумме, находим

$$\begin{aligned}
\text{м. о. } (x_i - p_i)^2 (x_k - p_k) &= p_i q_i^2 (P_k^{(i)} - p_k) + q_i p_i^2 (\bar{P}_k^{(i)} - p_k) = \\
&= p_i q_i (q_i - p_i) \delta_{i+1} \delta_{i+2} \dots \delta_k
\end{aligned}$$

и отсюда выводим

$$\text{м. о. } \sum_{1 \leq i < k \leq n} (x_i - p_i)^2 (x_k - p_k) =$$

$$\begin{aligned}
&= p_1 q_1 (q_1 - p_1) \{ \delta_2 + \delta_2 \delta_3 + \dots + \delta_2 \delta_3 \dots \delta_n \} + \\
&+ p_2 q_2 (q_2 - p_2) \{ \delta_3 + \delta_3 \delta_4 + \dots + \delta_3 \delta_4 \dots \delta_n \} + \\
&+ \dots + \\
&+ p_{n-1} q_{n-1} (q_{n-1} - p_{n-1}) \delta_n.
\end{aligned}$$

А это равенство обнаруживает, что отношение

$$\frac{\text{м. о. } \sum (x_i - p_i)^2 (x_k - p_k)}{n}$$

остается также числом конечным, и потому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{м. о. } \sum (x_i - p_i)^2 (x_k - p_k)}{n^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

ибо по числовой величине все произведения

$$p_1 q_1 (q_1 - p_1), p_2 q_2 (q_2 - p_2), \dots, p_{n-1} q_{n-1} (q_{n-1} - p_{n-1})$$

меньше $\frac{1}{4}$, а любая из сумм

$$\delta_{i+1} + \delta_{i+1} \delta_{i+2} + \delta_{i+1} \delta_{i+2} \delta_{i+3} + \dots + \delta_{i+1} \delta_{i+2} \dots \delta_n,$$

при наших условиях, меньше

$$\frac{\delta}{1 - \delta}.$$

Подобным же образом для третьей суммы получаем

$$\begin{aligned}
\text{м. о. } (x_i - p_i) (x_k - p_k)^2 &= p_i q_i \{ P_k^{(i)} q_k^2 + (1 - P_k^{(i)}) p_k^2 - \bar{P}_k^{(i)} q_k^2 - \\
&- (1 - \bar{P}_k^{(i)}) p_k^2 \} = p_i q_i (q_k - p_k) \delta_{i+1} \delta_{i+2} \dots \delta_k
\end{aligned}$$

и на основании этого равенства легко приходим к заключению, что отношение

$$\frac{\text{м. о. } \sum (x_i - p_i) (x_k - p_k)^2}{n^{\frac{3}{2}}}$$

также стремится к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$.

Остается рассмотреть математическое ожидание последней суммы, состоящей из произведений

$$(x_i - p_i)(x_k - p_k)(x_l - p_l),$$

где

$$i < k < l.$$

К выражению математического ожидания произведения

$$(x_i - p_i)(x_k - p_k)(x_l - p_l)$$

при

$$i < k < l,$$

можно придти различными путями. В основание наших вычислений мы положим то обстоятельство, что x_i и x_l становятся, по условиям вопроса, независимыми друг от друга, когда значение x_k определено. А для x_k возможно два значения 0 и 1, вероятности которых соответственно равны p_k и q_k .

Вместе с тем не трудно видеть, что при $x_k = 1$ математические ожидания

$$x_i \text{ и } x_l$$

соответственно равны

$$P_i^{(k)} \text{ и } P_l^{(k)},$$

а при $x_k = 0$ математические ожидания тех же величин x_i , x_l соответственно равны

$$\bar{P}_i^{(k)} \text{ и } \bar{P}_l^{(k)}.$$

На этом основании, принимая во внимание формулы (3) и (4), находим

$$\begin{aligned} \text{м. о. } (x_i - p_i)(x_k - p_k)(x_l - p_l) &= \\ &= p_k q_k \{ (P_i^{(k)} - p_i)(P_l^{(k)} - p_l) - (\bar{P}_i^{(k)} - p_i)(\bar{P}_l^{(k)} - p_l) \} = \\ &= p_i q_i (q_k - p_k) \delta_{i+1} \dots \delta_k \delta_{k+1} \dots \delta_l, \end{aligned}$$

и потому

$$\begin{aligned} \text{м. о. } \sum_{1 \leq i < k < l \leq n} (x_i - p_i)(x_k - p_k)(x_l - p_l) &= \\ &= \sum_{1 \leq i < k < l \leq n} p_i q_i (q_k - p_k) \delta_{i+1} \dots \delta_k \delta_{k+1} \dots \delta_l = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} p_i q_i C_i, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_i &= \sum_{i < k < l \leq n} (q_k - p_k) \delta_{i+1} \dots \delta_k \delta_{k+1} \dots \delta_l = \\ &= \sum (q_k - p_k) \delta_{i+1} \dots \delta_k D_k \end{aligned}$$

и

$$D_k = \sum \delta_{k+1} \dots \delta_l = \delta_{k+1} + \delta_{k+1} \delta_{k+2} + \dots + \delta_{k+1} \delta_{k+2} \dots \delta_n.$$

Рассматривая же последовательно D_k и C_i , получаем простые неравенства

$$\text{числ. зн. } D_k < \frac{\delta}{1-\delta} \quad \text{и} \quad \text{числ. зн. } C_i < \left(\frac{\delta}{1-\delta} \right)^2,$$

откуда тотчас выводим

$$\text{числ. зн. } \frac{\text{м. о. } \sum (x_i - p_i)(x_k - p_k)(x_l - p_l)}{n} < \frac{1}{4} \left(\frac{\delta}{1-\delta} \right)^2$$

и, наконец,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{м. о. } \sum (x_i - p_i)(x_k - p_k)(x_l - p_l)}{n^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Итак, при беспредельном возрастании числа n все четыре отношения

$$\frac{\text{м. о. } \sum (x_i - p_i)^3}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\text{м. о. } \sum (x_i - p_i)^2 (x_k - p_k)}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\text{м. о. } \sum (x_i - p_i)(x_k - p_k)^2}{n^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\text{м. о. } \sum (x_i - p_i)(x_k - p_k)(x_l - p_l)}{n^{\frac{3}{2}}}$$

стремятся к пределу нуль, а вместе с ними должно стремиться к нулю и отношение

$$\frac{\text{м. о. } (x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n)^3}{n^{\frac{3}{2}}},$$

в силу вышеуказанного простого равенства.

§ 5. Перейдем, наконец, к общим выводам, не останавливаясь в отдельности на случаях

$$m = 4, 5, \dots$$

В силу обобщенной формулы Ньютона мы можем для любого данного целого положительного числа m установить равенство

$$\begin{aligned} & (x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n)^m = \\ & = \sum_{\alpha, \beta, \dots, \lambda} G_{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda} \sum_{i, j, k, \dots, l} (x_i - p_i)^\alpha (x_j - p_j)^\beta (x_k - p_k)^\gamma \dots (x_l - p_l)^\lambda \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$G_{\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \alpha \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \beta \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \gamma \cdot \dots \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \lambda},$$

а суммирования должны быть распространены на все совокупности целых положительных чисел $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, удовлетворяющие условию

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = m,$$

и на все совокупности целых положительных чисел $i, j, k, \dots, l$, удовлетворяющих неравенствам

$$i < j < k < \dots < l \leq n.$$

Важно заметить, что число сумм

$$\sum (x_i - p_i)^\alpha (x_j - p_j)^\beta (x_k - p_k)^\gamma \cdots (x_l - p_l)^\lambda,$$

которые нам приходится рассматривать, не возрастает бес-
предельно вместе с n , а остается конечным.

Останавливаясь на одной из этих сумм, станем рассмат-
ривать ее математическое ожидание, что приведет к рас-
смотрению математических ожиданий ее слагаемых

$$(x_i - p_i)^\alpha (x_j - p_j)^\beta (x_k - p_k)^\gamma \cdots (x_l - p_l)^\lambda.$$

Математическое ожидание подобного произведения пред-
ставляется суммой конечного числа слагаемых вида

$$(\xi_i - p_i)^\alpha (\xi_j - p_j)^\beta \cdots (\xi_l - p_l)^\gamma A (B + G\delta_{i+1} \cdots \delta_j) (C + H\delta_{j+1} \cdots \delta_k) \cdots$$

Здесь каждое из чисел

$$\xi_i, \xi_j, \xi_k, \dots, \xi_l$$

равно единице или нулю, A равно вероятности равенства $x_i = \xi_i$, сумма $B + G\delta_{i+1} \cdots \delta_j$ равна вероятности равенства $x_j = \xi_j$, когда установлено уже равенство $x_i = \xi_i$, сумма $C + H\delta_{j+1} \cdots \delta_k$ равна вероятности равенства $x_k = \xi_k$, когда установлено равенство $x_j = \xi_j$, и т. д.

Для нас важно заметить, что все числа

$$A, B, G, C, H, \dots$$

остаются всегда конечными, ибо они определяются равен-
ствами

$$A = p_i \text{ или } q_i, \quad B = p_j \text{ или } q_j, \quad G = \pm p_i \text{ или } \pm q_i, \\ C = p_k \text{ или } q_k, \quad H = \pm p_j \text{ или } \pm q_j, \quad \dots$$

купности произведений

$$\delta_{i+1} \cdots \delta_j, \delta_{j+1} \cdots \delta_k, \dots$$

равносильно разрыву цепи величин

$$x_i, x_j, x_k, \dots, x_l$$

в соответствующем месте, так что вместо одной мы получаем две цепи, что ведет к замене рассматриваемого нами математического ожидания произведением двух математических ожиданий. Если же мы оставим в сумме (8) только те члены, которые не содержат нескольких из произведений

$$\delta_{i+1} \cdots \delta_j, \delta_{j+1} \cdots \delta_k, \dots,$$

то цепь величин

$$x_i, x_j, x_k, \dots, x_l$$

будет разделена на несколько отдельных цепей, и вместо рассматриваемого математического ожидания мы получим произведение нескольких математических ожиданий.

Например, если из суммы (8) мы исключим все члены, содержащие множитель $\delta_{j+1} \cdots \delta_k$, то оставшаяся сумма будет равна

$$\text{м. о. } (x_i - p_i)^\alpha (x_j - p_j)^\beta \times \text{м. о. } (x_k - p_k)^\gamma \cdots (x_l - p_l)^\lambda;$$

если же мы оставим в сумме (8) только те члены, которые не содержат ни $\delta_{i+1} \cdots \delta_j$, ни $\delta_{j+1} \cdots \delta_k$, то вместо рассматриваемого математического ожидания получим

$$\text{м. о. } (x_i - p_i)^\alpha \times \text{м. о. } (x_j - p_j)^\beta \times \text{м. о. } (x_k - p_k)^\gamma \cdots (x_l - p_l)^\lambda.$$

Наконец, первый член L нашей суммы, к которому она приводится по отбрасывании всех членов, содержащих множители

$$\delta_{i+1} \cdots \delta_j, \delta_{j+1} \cdots \delta_k, \dots,$$

равен, конечно, произведению математических ожиданий отдельных степеней

$$\text{м. о. } (x_i - p_i)^\alpha \times \text{м. о. } (x_j - p_j)^\beta \cdots \times \text{м. о. } (x_l - p_l)^\lambda.$$

Приведенными соображениями о разделении цепи на несколько отдельных цепей мы воспользуемся для определения главной части выражения

$$\text{м. о. } \sum (x_i - p_i)^\alpha (x_j - p_j)^\beta \cdots (x_l - p_l)^\lambda,$$

т. е. той его части, которая в нашем исследовании играет решающую роль.

Но предварительно установим формулу

$$\begin{aligned} \text{м. о. } \sum (x_i - p_i)^\alpha (x_j - p_j)^\beta (x_k - p_k)^\gamma \cdots (x_l - p_l)^\lambda = \\ = \sum L + \sum M_1 \delta_{i+1} \delta_{i+2} \cdots \delta_j + \dots + \\ + \sum N_1 \delta_{i+1} \delta_{i+2} \cdots \delta_j \delta_{j+1} \cdots \delta_k + \dots + \\ + \dots \dots \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

на основании указанного выше выражения (8) математического ожидания произведения

$$(x_i - p_i)^\alpha (x_j - p_j)^\beta \cdots (x_l - p_l)^\lambda.$$

Суммы, обозначенные здесь буквою Σ , распространяются на все возможные величины значков, удовлетворяющие неравенствам

$$i < j < k < \dots < l \leq n.$$

Мы можем привести эти суммы к многократным, причем каждое суммирование будет относиться только к одному значку. Располагая эти отдельные суммирования в порядке убывающих значков

$$l > \dots > k > j > i,$$

мы должны каждому значку, занимающему у нас определенное место, придавать, для составления соответствующей

суммы, все возможные значения, превосходящие следующий значок, но не превосходящие числа n . Число этих суммирований равно числу показателей

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda.$$

Обращаясь к вопросу о возможной быстроте возрастания наших многократных сумм

$$\sum L, \sum M_1 \delta_{i+1} \delta_{i+2} \dots \delta_j, \dots,$$

при беспредельном возрастании числа n , мы можем, по отношению к каждой из них в отдельности, разбить только что упомянутые последовательные суммирования по значкам

$$l, \dots, k, j, i$$

на две группы таким образом, что для нашей цели все суммирования первой группы можно сравнивать с повторением n раз одного и того же числа, а суммирование второй группы — с геометрической прогрессией, для которой отношение последующего члена к предыдущему равно δ .

И отсюда не трудно заключить, что отношение рассматриваемой многократной суммы к степени числа n , равной числу соответствующих суммирований первой группы, должно оставаться числом конечным, при беспредельном возрастании n .

В частности, для

$$\sum L$$

все суммирования по отдельным значкам мы должны причислить к первой группе, и соответственно этому, в тех случаях, когда мы не можем установить равенства

$$L = 0,$$

мы можем утверждать только, что должно оставаться конечным отношение

$$\frac{\Sigma L}{n^{\sigma}},$$

где σ означает число показателей

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda.$$

Для любой из прочих сумм, составляющих вторую часть формулы (9), число суммирований первой группы меньше σ , и потому отношение ее к n^{σ} должно стремиться к пределу нуль, при беспредельном возрастании n ; например, для

$$\sum M_1 \delta_{i+1} \delta_{i+2} \dots \delta_j$$

следует отнести ко второй группе суммирование по значку j , и потому в первой группе останется только $\sigma - 1$ суммирований, а для

$$\sum N_1 \delta_{i+1} \delta_{i+2} \dots \delta_j \delta_{j+1} \dots \delta_k$$

надо отнести ко второй группе как суммирование по значку j , так и суммирование по значку k , и, следовательно, в первой группе остается только $\sigma - 2$ суммирований.

Поэтому мы можем утверждать, что разность

$$\frac{\text{м. о. } \sum (x_i - p_i)^{\alpha} (x_j - p_j)^{\beta} \dots (x_l - p_l)^{\lambda}}{n^{\sigma}} - \frac{\Sigma L}{n^{\sigma}},$$

где σ — число показателей $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, должна приближаться к пределу нуль, при беспредельном возрастании числа n . Вместе с тем сумма ΣL , равная

$$\sum \text{м. о. } (x_i - p_i)^{\alpha} \times \text{м. о. } (x_j - p_j)^{\beta} \dots \times \text{м. о. } (x_l - p_l)^{\lambda},$$

будет у нас главным членом выражения

$$\text{м. о. } \sum (x_i - p_i)^{\alpha} (x_j - p_j)^{\beta} \dots (x_l - p_l)^{\lambda}$$

во всех случаях, за исключением тех, когда среди показателей

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$$

встречаются равные единице. В этих последних случаях, которыми мы сейчас займемся, сумма ΣL приводится к нулю, ибо все слагаемые ее L оказываются равными нулю.

§ 6. Останавливаясь на случаях, когда среди показателей $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ встречаются равные единице, введем для сокращения речи следующие выражения: 1) при

$$i < j < k < \dots < l$$

будем называть произведения

$$\delta_{i+1} \delta_{i+2} \dots \delta_j, \delta_{j+1} \delta_{j+2} \dots \delta_k, \dots$$

соответственно коэффициентами связи

$$i \text{ с } j, \quad j \text{ с } k, \dots,$$

2) в произведении

$$(x_i - p_i)^\alpha (x_j - p_j)^\beta \dots (x_l - p_l)^\lambda$$

будем называть

$$\alpha, \beta, \dots, \lambda$$

соответственно показателями значков

$$i, j, \dots, l.$$

Введенные нами выражения дают возможность кратко и ясно формулировать такое предложение: *если в произведении*

$$(x_i - p_i)^\alpha (x_j - p_j)^\beta (x_k - p_k)^\gamma \dots (x_l - p_l)^\lambda,$$

где

$$i < j < k < \dots < l,$$

показатель какого-либо из значков

$$i, j, k, \dots, l$$

равен единице, то в выражении (8) математического ожидания произведения

$$(x_i - p_i)^\alpha (x_j - p_j)^\beta (x_k - p_k)^\gamma \cdots (x_l - p_l)^\lambda$$

нет членов, не содержащих, по крайней мере, одного из коэффициентов связи этого значка со смежными значками; в частности, при $\alpha = 1$ в состав выражения (8) должен входить общим множителем коэффициент связи значка i с последующим значком j , равный

$$\delta_{i+1} \delta_{i+2} \cdots \delta_j,$$

а при $\lambda = 1$ в состав выражения (8) должен входить общим множителем коэффициент связи значка l с непосредственно предшествующим ему значком.

Это предположение можно доказать кратко и просто при помощи приведенных нами раньше соображений о разделении цепи величин

$$x_i, x_j, x_k, \dots, x_l$$

на несколько отдельных цепей.

В самом деле, если мы выделим один из значков

$$i, j, k, \dots, l$$

и исключим из выражения (8) все члены, содержащие коэффициенты связи этого значка со смежными, то оставшаяся сумма будет представлять, как было уже нами замечено, не математическое ожидание произведения

$$(x_i - p_i)^\alpha (x_j - p_j)^\beta \cdots (x_l - p_l)^\lambda,$$

а произведение трех или двух математических ожиданий. И одно из них будет членом ряда

$$\text{м. о. } (x_i - p_i)^\alpha, \text{ м. о. } (x_j - p_j)^\beta, \dots, \text{ м. о. } (x_l - p_l)^\lambda,$$

соответствующим выделенному нами значку.

Наше замечание относится ко всем случаям. Если же показатель выделенного значка равен единице, то соответствующий ему член ряда

$$\text{м. о. } (x_i - p_i)^{\alpha}, \text{ м. о. } (x_j - p_j)^{\beta}, \dots, \text{ м. о. } (x_l - p_l)^{\lambda}$$

равен нулю, ибо

$$\text{м. о. } (x_i - p_i) = \text{м. о. } (x_j - p_j) = \dots = \text{м. о. } (x_l - p_l) = 0.$$

Тогда, конечно, приводится к нулю и наше произведение трех математических ожиданий, равное сумме всех членов выражения (8) кроме исключенных нами; следовательно, в этом случае выражение (8) состоит только из исключенных нами членов, в состав которых входит множителем, по крайней мере, один из коэффициентов связи выделенного значка со смежными значками.

Таким образом наше предложение доказано.

Оно послужит нам основанием для дальнейших заключений о суммах, составляющих вторую часть формулы (9), специально в тех случаях, когда среди показателей

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$$

встречаются равные единице.

Относительно этих сумм нами было уже замечено, что они сводятся к последовательным суммированиям по отдельным значкам, расположенным в убывающем порядке. Что же касается последовательных суммирований, то мы разбили их на две группы: суммирования первой группы мы сравниваем с повторением одного и того же числа, а суммирования второй группы — с геометрической убывающею прогрессиею.

И соответственно этому мы заключили, что отношение каждой из наших сумм, составляющих вторую часть формулы (9), к степени числа n , равной числу соответствующих суммирований первой группы, должно оставаться числом конечным, при беспредельном возрастании числа n .

Высшим пределом для числа суммирований первой группы, во всех случаях, может, конечно, служить число показателей

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda.$$

Для нашей цели этого предела достаточно, если только среди показателей

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$$

нет равных единице. А именно, если при

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = m$$

имеем

$$\alpha = \beta = \gamma = \dots = \lambda = 2,$$

то число показателей

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$$

равно $\frac{m}{2}$, и мы можем установить равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\text{м. о. } \sum (x_i - p_i)^2 (x_j - p_j)^2 \dots (x_l - p_l)^2}{n^{\frac{m}{2}}} - \frac{\sum c_{i,i} c_{j,j} \dots c_{l,l}}{n^{\frac{m}{2}}} \right\} = 0, \quad (10)$$

где

$$c_{i,i} = \text{м. о. } (x_i - p_i)^2, \quad c_{j,j} = \text{м. о. } (x_j - p_j)^2, \quad \dots, \\ c_{l,l} = \text{м. о. } (x_l - p_l)^2$$

и

$$i < j < \dots < l < n.$$

На том же основании не трудно установить равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{м. о. } \sum (x_i - p_i)^\alpha (x_j - p_j)^\beta \dots (x_l - p_l)^\lambda}{n^{\frac{m}{2}}} = 0, \quad (11)$$

если среди показателей

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda.$$

не только нет равных единице, но и встречаются бóльшие двойки, ибо число их тогда меньше $\frac{m}{2}$.

Если же среди показателей

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$$

встречаются равные единице, то нам необходимо установить другой высший предел для числа суммирований первой группы, меньший числа показателей $\alpha, \beta, \dots, \lambda$.

Другими словами, нам надо установить теперь некоторый низший предел для числа суммирований второй группы, отличный от нуля. А так как число суммирований второй группы для каждого члена равно числу коэффициентов связи, входящих в состав его, то наша задача приводится к разысканию низшего предела этого последнего числа.

Для установления такого предела остановимся на совокупности коэффициентов связи, входящих в состав какого-либо одного из неуничтожающихся членов второй части формулы (9), или, что все равно, соответственного ему члена выражения (8).

В этой совокупности должно быть, в силу доказанного предложения, по крайней мере по одному коэффициенту связи со смежными для каждого значка, показатель которого равен единице. И двум таким значкам может соответствовать один общий коэффициент связи только тогда, когда между ними в ряду возрастающих значков

$$i, j, k, \dots, l$$

нет промежуточных, а стоят они рядом.

Отсюда уже не трудно заключить, что для любого члена второй части формулы (9), не исчезающего, а действительно в нее входящего, число суммирований второй группы не меньше половины числа всех показателей

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda,$$

равных единице, и может ей равняться только в том случае, если все значки, показатели которых равны единице, разбиваются на отдельные пары смежных значков, и в выбранном нами члене находятся все коэффициенты связи этих пар в отдельности, но нет никаких других коэффициентов связи.

Следовательно, если совокупность показателей

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$$

состоит из

α' единиц, β' двоек, γ' троек, δ' четверок и т. д.,

то

$$m = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = \alpha' + 2\beta' + 3\gamma' + 4\delta' + \dots,$$

а за высший предел числа суммирований первой группы, для всех рассматриваемых нами сумм, мы можем взять

$$\frac{\alpha'}{2} + \beta' + \gamma' + \delta' + \dots,$$

и этот высший предел достигается только при указанных нами условиях.

С другой стороны, не трудно видеть, что сумма

$$\frac{\alpha'}{2} + \beta' + \gamma' + \delta' + \dots$$

меньше половины суммы

$$\alpha' + 2\beta' + 3\gamma' + 4\delta' + \dots,$$

если только не все числа

$$\gamma', \delta', \dots$$

равны нулю.

Поэтому мы можем равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{м. о. } \sum (x_i - p_i)^\alpha (x_j - p_j)^\beta \dots (x_l - p_l)^\lambda}{n^{\frac{m}{2}}} = 0, \quad (11)$$

о котором была уже речь, распространить на все совокупности показателей

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda,$$

удовлетворяющие условию

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = m$$

и не состоящие исключительно из двоек и из пар смежных единиц.

§ 7. Распространив таким образом равенство (11), мы на основании его и формул (7) и (9) немедленно заключаем, что при m нечетном отношение

$$\frac{\text{м. о. } (x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n)^m}{n^{\frac{m}{2}}}$$

должно приближаться к пределу нуль, если n станет возрастать беспрестанно; ибо совокупность показателей

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$$

не может состоять только из пар смежных единиц и из двоек, если сумма

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda$$

— число нечетное.

А так как, в силу сказанного в § 3, отношение

$$\frac{\text{м. о. } (x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n)^2}{n},$$

оставаясь конечным, не может быть у нас произвольно малым, то последнее заключение, для любого нечетного положительного числа m , мы можем выразить простою формулой

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{м. о. } \left\{ \frac{x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n}{\sqrt{\text{м. о. } 2(x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n)^2}} \right\}^m &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^m e^{-t^2} dt, \end{aligned} \quad (12)$$

правая часть которой, при m нечетном, равна нулю.

Чтобы прийти к той же формуле (12) и для четных показателей m , нам надо окончательно выяснить главную часть

$$\text{м. о. } \sum (x_i - p_i)^\alpha (x_j - p_j)^\beta \dots (x_l - p_l)^\lambda$$

для тех совокупностей показателей

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda,$$

которые состоят только из двоек и из отдельных пар смежных единиц.

Согласно замеченному в предыдущем параграфе, для таких совокупностей показателей

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$$

главным членом второй части формулы (9) будет тот, который содержит все коэффициенты связи отдельных пар и не содержит других коэффициентов связи, причем число суммирований первой группы в нем как раз равно половине числа

$$m = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda.$$

В силу же приведенных раньше соображений о разрыве цепи на несколько цепей нетрудно заключить, что этот член, служащий главной частью для

$$\text{м. о. } \sum (x_i - p_i)^\alpha (x_j - p_j)^\beta \dots (x_l - p_l)^\lambda,$$

в рассматриваемых нами случаях равен сумме произведений, составленных надлежащим образом из математических ожиданий квадратов одних из разностей

$$x_i - p_i, \quad x_j - p_j, \quad \dots, \quad x_l - p_l$$

и математических ожиданий произведений других из них, взятых попарно.

Это заключение можно представить такую формулою

$$\text{пред.} \left\{ \frac{\text{м. о.} \sum (x_e - p_e)(x_f - p_f)(x_g - p_g)(x_h - p_h) \dots}{n^{\frac{m}{2}}} - \frac{\sum c_{e,f} c_{g,h} \dots}{n^{\frac{m}{2}}} \right\} = 0, \quad (13)$$

где

$$c_{e,f} = \text{м. о.} (x_e - p_e)(x_f - p_f), \quad c_{g,h} = \text{м. о.} (x_g - p_g)(x_h - p_h), \dots$$

и значки

$$e, f, g, h, \dots,$$

число которых в каждом произведении

$$(x_e - p_e)(x_f - p_f)(x_g - p_g)(x_h - p_h) \dots \text{ и } c_{e,f} c_{g,h} \dots$$

равно m , ограничены только неравенствами

$$e \leq f < g \leq h < \dots \leq n,$$

причем двойственность знака $\leq$ между e и f , между g и h , и т. д. устраняется, когда выяснены все квадратные множители произведений

$$(x_e - p_e)(x_f - p_f)(x_g - p_g)(x_h - p_h) \dots$$

Формула (13) включает в себе, как частный случай, отмеченное раньше равенство (10), к которому мы придем, если положим

$$e = f, \quad g = h, \dots$$

Для удобства дальнейших выводов введем еще новые обозначения: а именно, положим

$$c_{i,i} = \text{м. о.} (x_i - p_i)^2 = D_{i,i} \text{ и } 2c_{i,j} = 2 \text{ м. о.} (x_i - p_i)(x_j - p_j) = D_{i,j}$$

при $i < j$; второй значок j , в выражении $D_{i,j}$, никогда не будет у нас меньше первого i .

Употребляя эти новые обозначения, мы прежде всего можем представить математическое ожидание квадрата

$$(x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n)^2$$

в виде суммы

$$\sum D_{i,j},$$

распространенной на все значки i и j , удовлетворяющие неравенствам

$$i \leq j \leq n,$$

где знак $\leq$, между i и j , не фиксирован, как в формуле (13), а остается двойным.

Затем на основании формул (7), (11) и (13) не трудно установить, при m четном, следующую формулу

$$\text{пред.} \left\{ \frac{\text{м. о. } (x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n)^m}{n^{\frac{m}{2}}} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}{(2n)^{\frac{m}{2}}} \sum D_{e,f} D_{g,h} \dots \right\} = 0, \quad (14)$$

где значкам

$$e, f, g, h, \dots,$$

число которых в каждом произведении

$$D_{e,f} D_{g,h} \dots$$

равно m , надо давать все значения, удовлетворяющие неравенствам

$$e \leq f < g \leq h < \dots \leq n,$$

причем знаки $\leq$

между e и f , между g и h , и т. д.

не фиксированы, как в формуле (13), а остаются двойными, как в только что упомянутой сумме $\sum D_{i,j}$.

Остается сравнить сумму

$$\sum D_{e,f} D_{g,h} \cdots,$$

которая входит в формулу (14) и которую для краткости мы обозначим одною буквою S , со степенью

$$(\sum D_{i,j})^{\frac{m}{2}}.$$

Эта степень содержит всю нашу сумму

$$S = \sum D_{e,f} D_{g,h} \cdots$$

с коэффициентом

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{m}{2}$$

и другие произведения того же вида

$$D_{e,f} D_{g,h} \cdots,$$

но не удовлетворяющие нашим неравенствам

$$e \leq f < g \leq h < \cdots$$

Нам надо доказать, что отношение суммы последних произведений, взятых, конечно, с надлежащими коэффициентами для образования разности

$$(\sum D_{i,j})^{\frac{m}{2}} - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{m}{2} S,$$

к $n^{\frac{m}{2}}$, стремится к пределу нуль, когда n возрастает бес-
предельно.

Рассматривая совокупность произведений

$$D_{e,f} D_{g,h} \dots,$$

образующих разность

$$(\sum D_{i,j})^{\frac{m}{2}} - 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{m}{2} S,$$

мы, для избежания повторения одних и тех же произведений много раз и для выяснения состава исследуемой совокупности, установим некоторый порядок во множителях: а именно, мы будем всегда располагать первые значки

$$e, g, \dots$$

в возрастающем порядке, а при одном и том же первом значке расположим в возрастающем порядке вторые значки.

Установив, таким образом, порядок множителей произведения

$$D_{e,f} D_{g,h} \dots,$$

мы легко можем решить вопрос: входит ли оно в сумму S или, напротив, принадлежит к той совокупности, которая образует разность

$$(\sum D_{i,j})^{\frac{m}{2}} - 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{m}{2} S$$

и которую нам надо исследовать.

Если произведение

$$D_{e,f} D_{g,h} \dots$$

принадлежит к исследуемой теперь совокупности, то в нем один из вторых значков

$$f, h, \dots$$

должен быть не меньше следующего за ним первого значка: например, $f \geq g$.

Этим замечанием мы воспользуемся для образования суммы, содержащей все члены разности

$$(\sum D_{i,j})^{\frac{m}{2}} - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{m}{2} S$$

и потому дающей, по замене количеств $D_{i,j}$ их абсолютными величинами $D'_{i,j}$, число, заведомо большее этой разности.

Рассмотрим совокупность тех произведений

$$D_{e,f} D_{g,h} \cdots,$$

в состав которых входит один и тот же множитель $D_{r,s}$ и притом так, что правый значок множителя, следующего за $D_{r,s}$, не превосходит число s . Не трудно заметить, что эта совокупность составляет часть той, которая получается по выполнении выкладок из выражения

$$\frac{m}{2} \cdot \left(\frac{m}{2} - 1 \right) D_{r,s} (\sum D_{i,j})^{\frac{m}{2}-2} \left\{ \begin{array}{l} D_{r,r} + D_{r,r+1} + D_{r,r+2} + \dots + \\ + D_{r+1,r+1} + D_{r+1,r+2} + \dots + \\ + \dots \dots \dots + \\ + D_{s,s} + D_{s,s+1} + D_{s,s+2} + \dots \end{array} \right\},$$

где первый множитель

$$\frac{m}{2} \left(\frac{m}{2} - 1 \right)$$

определяет коэффициент, с которым наши произведения могут

входить в $(\sum D_{i,j})^{\frac{m}{2}}$.

Заменяя в составленном выражении все D с разными значками их числовыми величинами D' с теми же значками и складывая получаемые таким образом выражения при всех возможных значках r и s , мы приходим к сумме

$$\sum_{\substack{r \leq s \leq n}} \frac{m}{2} \left(\frac{m}{2} - 1 \right) D'_{r,s} (\sum D'_{i,j})^{\frac{m}{2}-2} \left\{ \begin{array}{l} D'_{r,r} + D'_{r,r+1} + D'_{r,r+2} + \dots + \\ + \dots \dots \dots + \\ + D'_{s,s} + D'_{s,s+1} + D'_{s,s+2} + \dots \end{array} \right\},$$

которую мы для краткости обозначим просто буквою Σ и которая, наверно, превосходит числовую величину разности

$$(\sum D_{i,j})^{\frac{m}{2}} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{m}{2} S.$$

С другой стороны, согласно выводам § 3, имеем неравенства

$$D'_{r,s} < \frac{1}{2} \delta^{s-r}, \quad \sum D'_{i,j} < \frac{n}{4} \cdot \frac{1+\delta}{1-\delta},$$

$$D'_{r,r} + D'_{r,r+1} + D'_{r,r+2} + \dots < \frac{1}{2(1-\delta)},$$

$$\dots$$

$$D'_{s,s} + D'_{s,s+1} + D'_{s,s+2} + \dots < \frac{1}{2(1-\delta)},$$

на основании которых получаем

$$\begin{aligned} \Sigma &< \frac{m}{2} \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \frac{n}{4(1-\delta)} \left(\frac{n}{4} \frac{1+\delta}{1-\delta} \right)^{\frac{m}{2}-2} (1 + 2\delta + 3\delta^2 + 4\delta^3 + \dots) < \\ &< \frac{m}{2} \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \frac{n}{4(1-\delta)^3} \left(\frac{n}{4} \frac{1+\delta}{1-\delta} \right)^{\frac{m}{2}-2}. \end{aligned}$$

Следовательно, численная величина разности

$$\left(\sum D_{i,j}\right)^{\frac{m}{2}} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{m}{2} S$$

также должна быть меньше

$$\frac{m}{2} \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \frac{n}{4(1-\delta)^3} \left(\frac{n}{4} \frac{1+\delta}{1-\delta} \right)^{\frac{m}{2}},$$

И ПОТОМУ МЫ МОЖЕМ УСТАНОВИТЬ ФОРМУЛУ

$$\text{пред.} \left\{ \frac{(\sum D_{i,j})^{\frac{m}{2}}}{n^{\frac{m}{2}}} - 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{m}{2} \cdot \frac{S}{n^{\frac{m}{2}}} \right\} = 0, \quad (15)$$

где S означает ту самую сумму

$$\sum D_{e,f} D_{g,h} \dots$$

которая входит у нас в формулу (14).

Остается сопоставить формулу (15) с (14) и принять во внимание известное равенство

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^2} dt = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (m-1)}{2^{\frac{m}{2}}},$$

чтобы немедленно, для любого четного числа m , прийти к формуле

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{пред. м. о.} \left\{ \frac{x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n}{\sqrt{\text{м. о. } 2 (x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n)^2}} \right\}^m = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^m e^{-t^2} dt, \end{aligned} \quad (12)$$

которая была уже нами раньше установлена для нечетных показателей.

Убедившись в справедливости формулы (12) при всех целых показателях m , мы на основании ее можем, как известно, заключить, что для любых данных чисел t_1 и $t_2 > t_1$ вероятность сохранения неравенств

$$t_1 < \frac{x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n}{\sqrt{\text{м. о. } 2 (x_1 - p_1 + x_2 - p_2 + \dots + x_n - p_n)^2}} < t_2$$

или, что все равно, неравенств

$$t_1 < \frac{m - p_1 - p_2 - \dots - p_n}{\sqrt{\text{м. о. } 2 (m - p_1 - p_2 - \dots - p_n)^2}} < t_2$$

приближается к пределу, равному

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt,$$

когда n возрастает беспредельно.

Что касается математического ожидания квадрата

$$(m - p_1 - p_2 - \dots - p_n)^2,$$

то оно определяется формулой (6), установленною раньше.

Таким образом мы распространяем теорему о выражении предела вероятности интегралом Лапласа на общий случай испытаний, связанных в цепь, при некоторых ограничениях, которые указаны выше и вызваны ходом наших рассуждений.

§ 8. В заключение статьи вернемся к математическому ожиданию квадрата

$$(m - p_1 - p_2 - \dots - p_n)^2,$$

которое, согласно формуле (6), равно

$$\begin{aligned} & p_1 q_1 (1 + 2\delta_2 + 2\delta_2 \delta_3 + \dots + 2\delta_2 \delta_3 \dots \delta_n) + \\ & + p_2 q_2 (1 + 2\delta_3 + 2\delta_3 \delta_4 + \dots + 2\delta_3 \delta_4 \dots \delta_n) + \\ & + \dots + p_{n-2} q_{n-3} (1 + 2\delta_{n-1} + 2\delta_{n-1} \delta_n) + p_{n-1} q_{n-1} (1 + 2\delta_n) + p_n q_n, \end{aligned}$$

и постараемся выяснить, что условие, установленное нами в § 3, не вводит новых ограничений, сверх указанных в предисловии.

Для этой цели выводим из формул (2) простые равенства.

$$\begin{aligned} p_{k+1} q_{k+1} &= (p''_{k+1} + \delta_{k+1} p_k) (q'_{k+1} + \delta_{k+1} q_k) = \\ &= \delta_{k+1}^2 p_k q_k + \delta_{k+1} (p_k q'_{k+1} + q_k p''_{k+1}) + p''_{k+1} q'_{k+1} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} p_{k+1} q_{k+1} &= (p'_{k+1} - \delta_{k+1} q_k) (q''_{k+1} - \delta_{k+1} p_k) = \\ &= \delta_{k+1}^2 p_k q_k - \delta_{k+1} (p_k p'_{k+1} + q_k q''_{k+1}) + p'_{k+1} q''_{k+1} \end{aligned}$$

и на основании их заключаем, что разность

$$p_{k+1} q_{k+1} - \delta_{k+1}^2 p_k q_k$$

не меньше одного из произведений

$$p''_{k+1} q'_{k+1} \quad \text{и} \quad p'_{k+1} q''_{k+1}$$

откуда заключаем, что сумма

$$T_{k-1}^2 + T_k^2,$$

для любого значка k , не может быть произвольно малою, а должна постоянно оставаться не меньше

$$\frac{1}{1 + \delta^2}.$$

Следовательно, отношение

$$\frac{\text{м. о. } (m - p_1 - p_2 - \dots - p_n)^2}{n}$$

также не может быть произвольно малым, если только выполнены условия, указанные нами в предисловии.

Итак, выводы этой статьи не требуют других ограничений, кроме указанных в предисловии, которые состоят в том, что числа

$$p'_{k+1}, p''_{k+1}, q'_{k+1}, q''_{k+1}$$

при всех значениях k остаются больше некоторого постоянного положительного числа.

Вопрос о возможном сокращении введенных нами ограничений остается открытым.

О ЗАДАЧЕ ЯКОВА БЕРНУЛЛИ

*Доложено в заседании Физико-математического отделения
22 января 1914 г.*

Главная цель этой краткой заметки состоит в выяснении, что известное выражение вероятности интегралом Моавра—Лапласа дает едва ли не крайнюю границу приближения к ней, которого можно достигнуть, если представлять вероятность не суммой, а интегралом, иначе сказать — площадью. Другими словами, я хочу показать, что от замены известной показательной функции другою нельзя ожидать существенной пользы при выражении вероятности площадью, так как главная погрешность такого выражения проистекает от замены совокупности отдельных точек вероятности сплошной линией.

Обозначим буквою n число независимых испытаний, буквою p вероятность некоторого события A при каждом из них и буквою m возможное число появлений события A при совокупности всех этих n испытаний; наконец, положим

$$P_{m,n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots m \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-m)} p^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$. При таких обозначениях сумма

$$\sum_{m_1}^{m_2} P_{m,n},$$

распространенная на значения m , лежащие между m_1 и m_2 , будет, как известно, выражать вероятность, что m лежит между m_1 и m_2 .

Выражение это точно, если сумма и вероятность отнесены к одним и тем же величинам m ; но не надо забывать, что

в случаях, когда m_1 и m_2 принадлежат к совокупности целых чисел $0, 1, 2, \dots, n$, мы можем придавать как сумме, так и вероятности четыре различных значения, присоединяя или нет крайние числа m_1 и m_2 к числу допускаемых значений m . Из этого точного выражения вероятности выводится при больших значениях n (или, лучше сказать, npq) известное приближенное выражение Моавра—Лапласа, которое служит пределом вероятности при $n = \infty$: а именно, вероятность неравенств

$$np + z_1 \sqrt{2npq} < m < np + z_2 \sqrt{2npq},$$

с присоединением знаков равенства или без них, приближенно выражается интегралом

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz.$$

При этом, конечно, пренебрегают размерами скачков вероятности, которая не представляет непрерывной функции пределов z_1 и z_2 ; размеры же скачков, когда они наступают, приблизительно измеряются выражениями

$$\frac{1}{\sqrt{2npq\pi}} e^{-z_1^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{2npq\pi}} e^{-z_2^2}.$$

Указанные размеры пренебрегаемых величин характеризуют не специально формулу Моавра, а вообще замену вышеприведенной суммы интегралом, иначе сказать — замену функции, меняющейся только скачками, непрерывною. Следовательно, переход от формулы Моавра к другой формуле того же типа может быть признан действительно нужным, хотя бы он вел, подобно формулам Пирсона, к существенным усложнениям вычисления, только при условии, что погрешность формулы Моавра—Лапласа далеко выходит из указанных границ.

Между тем ни теоретические вычисления, ни частные примеры не свидетельствуют о столь больших погрешностях, пока мы рассматриваем всю совокупность разнообразных предположений о числе m , а не останавливаемся специально на маловероятных предположениях.

Некоторую теоретическую оценку погрешности формулы Моавра дает нам, при больших значениях n , разложение логарифма выражения

$$P_{np+z\sqrt{2npq}, n}$$

в ряд по степеням $\frac{1}{\sqrt{n}}$; продолжая это разложение на один член далее, чем нужно для вывода формулы Моавра, получаем

$$P_{np+z\sqrt{2npq}, n} = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{2npq\pi}} \left(1 + \frac{(3z - 2z^3)(p - q)}{3\sqrt{2npq}} \right),$$

что доставляет нам для выражения вероятности неравенства

$$m > np + z\sqrt{2npq}$$

новое приближенное выражение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-z^2} \left(1 + \frac{(3z - 2z^3)(p - q)}{3\sqrt{2npq}} \right) dz,$$

или, что все равно,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-z^2} dz + \frac{(1 - 2z^2)(p - q)}{6\sqrt{2npq\pi}} e^{-z^2}.$$

Следует отметить, что то же приближенное выражение дают нам два первые члена ряда, которым заключена небольшая, но весьма важная статья Чебышева „О двух теоремах теории вероятностей“ [1], поэтому мы можем назвать его формулой Чебышева для отличия от формулы Моавра.

Выводы Чебышева основаны на рассмотрении математических ожиданий различных степеней z , равного $\frac{m - np}{\sqrt{2npq}}$. Приведенная формула дает точные величины для математических ожиданий z , z^2 и z^3 и дает первый член в разложении математических ожиданий z^{2k} и z^{2k+1} ($k=2, 3, 4, \dots$) по возрастающим степеням $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Продолжая начатый ряд

$$1 + \frac{(3z - 2z^3)(p - q)}{2\sqrt{2npq}},$$

мы можем увеличивать число степеней z , математические ожидания которых даются формулой точно, а для прочих доводить приближение до любой степени $\frac{1}{\sqrt{n}}$. При этом оказывается необходимым несколько перестроить ряд Чебышева, так как он не расположен по степеням $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Такая перестройка ряда, согласно вычислениям Чебышева, относящимся к более общей задаче, вызывается тем, что разложение выражения [2]

$$\frac{M^{(3)}}{e^{\sqrt{n}}} s^3 + \frac{M^{(4)}}{\sqrt{n}} s^4 + \frac{M^{(5)}}{\sqrt{n^3}} s^5 + \dots$$

в ряд по степеням s соединяет вместе члены с различными степенями $\frac{1}{\sqrt{n}}$, а разложение того же выражения по степеням $\frac{1}{\sqrt{n}}$ соединяет члены с различными степенями s . После указанного преобразования ряд Чебышева принимает вид

$$1 + \frac{\alpha\psi_3(z)}{\sqrt{2npq}} + \frac{\beta\psi_4(z) + \gamma\psi_6(z)}{2npq} + \frac{\delta\psi_5(z) + \varepsilon\psi_7(z) + \eta\psi_9(z)}{\sqrt{(2npq)^3}} + \\ + \frac{\gamma'\psi_6(z) + \lambda\psi_8(z) + \mu\psi_{10}(z) + \nu\psi_{12}(z)}{(2npq)^2} + \dots,$$

где

$$\psi_3(z), \psi_4(z), \psi_5(z), \dots$$

определяются известною формулою

$$\psi_k(z) = e^{z^2} \frac{d^k e^{-z^2}}{dz^k},$$

остальные же буквы означают целые функции p и q , не зависящие ни от z , ни от n . Вот первые три члена

$$1 + \frac{(p - q)(3z - 2z^3)}{3\sqrt{2npq}} + \frac{4(1 - 4pq)z^6 - 12(2 - 7pq)z^4 + 9(3 - 8pq)z^2 - 3(1 - pq)}{36npq},$$

которые дают математические ожидания всех целых положительных степеней z с точностью до второй степени $\frac{1}{\sqrt{n}}$ включительно, что нетрудно проверить. Таким путем мы можем

подойти, как угодно близко, к математическим ожиданиям, но не к рассматриваемой вероятности.

Мы видим, что главное изменение приближенной величины вероятности, которого можно ожидать при переходе от формулы Моавра к другой формуле того же типа, выражается членом

$$\frac{1 - 2z^2}{6\sqrt{2npq\pi}} (p - q) e^{-z^2},$$

который от вышеприведенного скачка вероятности отличается только множителем

$$\frac{(1 - 2z^2)(p - q)}{6}.$$

А этот множитель становится значительным только при довольно больших величинах z^2 , когда все произведение становится весьма малым. Отсюда заключаем, что переход от формулы Моавра к вышеприведенной формуле Чебышева и к другим, более сложным формулам, выражающим приближенно вероятность интегралом, не может принести большой пользы.

Разбор же частных случаев подтверждает это заключение. Если np — число целое, то формула Чебышева указывает совершенно правильно, что при малых положительных значениях z вероятность неравенства $m > np + z\sqrt{2npq}$ превосходит вероятность неравенства $m < np - z\sqrt{2npq}$, а при больших, наоборот, вероятность второго неравенства больше вероятности первого, пока, конечно, обе они не приводятся к нулю; разность этих вероятностей приблизительно оценивается выражением

$$\frac{1 - 2z^2}{3\sqrt{2npq\pi}} (p - q) e^{-z^2}.$$

Например, в моей книге „Исчисление вероятностей“ приведено при

$$n = 6520, \quad p = \frac{3}{5}, \quad q = \frac{2}{5}$$

вычисление вероятностей неравенств

$$m > np + \frac{1}{50}n \quad \text{и} \quad m < np - \frac{1}{50}n,$$

которые сводятся к таким:

$$m \geq 4043 \quad \text{и} \quad m \leq 3781.$$

Установлено, что первая вероятность лежит между

$$0.000472 \quad \text{и} \quad 0.000465,$$

а вторая — между

$$0.000501 \quad \text{и} \quad 0.000491;$$

вторая вероятность оказалась, согласно формуле Чебышева, больше первой; но разность между ними меньше обоих чисел^[3]

$$P_{4043, 6520} \neq 0.0000409 \quad \text{и} \quad P_{3781, 6520} \neq 0.0000428.$$

Обращаясь затем к сравнению результатов, доставляемых формулами Моавра и Чебышева, с действительными величинами вероятностей, находим, что последние остаются неизменными и потому не выходят из указанных нами границ, пока число z в неравенствах

$$m > np + z\sqrt{2npq} \text{ и } m < np - z\sqrt{2npq}$$

лежит между

$$\frac{130}{\sqrt{2 \cdot 6502 \cdot 0.24}} \neq 2.324 \text{ и } \frac{131}{\sqrt{2 \cdot 6520 \cdot 0.24}} \neq 2.341.$$

Формула же Моавра дает при $z = 2.324$ для обеих вероятностей общую приближенную величину

$$0.000507,$$

а при $z = 2.341$ — другую общую величину

$$0.000465;$$

наконец, поправка Чебышева

$$\frac{1 - 2z^2}{6\sqrt{2npq}\pi} (p - q) e^{-z^2}$$

в рассматриваемом случае приблизительно равна

$$-0.000014$$

и, составляя около третьей части размера скачков, проявляется в разности вероятностей только благодаря одновременности скачков.

Что касается случаев, когда np не равно целому числу, то относящиеся к ним факты мы покажем при сравнительно небольших значениях n , когда таблицы вероятностей требуют немного места и составление их не особенно утомительно.

Следующие две таблички дают при $p = \frac{3}{5}$ и при $n = 18$ и $n = 19$ действительные величины вероятностей неравенств

$$m > np + z \sqrt{2npq} \quad \text{и} \quad m < np - z \sqrt{2npq},$$

с пятью знаками после запятой, и приближенные их величины по формуле Моавра в пунктах скачков вероятностей [4].

$$n = 18$$

Вероятности неравенств

z	$m > np + z \sqrt{2npq}$	$m < np - z \sqrt{2npq}$	По Моавру
0.00000	0.56344	0.43656	0.50000
0.06804	0.56344 ~ 0.37428	0.43656	0.46667
0.27217	0.37428	0.43656 ~ 0.26316	0.35015
0.40825	0.37428 ~ 0.20876	0.26316	0.28685
0.61237	0.20876	0.26316 ~ 0.13471	0.19324
0.74845	0.20876 ~ 0.09417	0.13471	0.14492
0.95258	0.09417	0.13471 ~ 0.05765	0.08897
1.08866	0.09417 ~ 0.03278	0.05765	0.06189
1.29279	0.03278	0.05765 ~ 0.02028	0.03375
1.42887	0.03278 ~ 0.00823	0.02028	0.02165
1.63299	0.00823	0.02028 ~ 0.00575	0.01046
1.76908	0.00823 ~ 0.00132	0.00575	0.00618
1.97320	0.00132	0.00765 ~ 0.00128	0.00263
2.10928	0.00132 ~ 0.00010	0.00128	0.00143
2.31341	0.00010	0.00128 ~ 0.00021	0.00052
2.44949	0.00010 ~ 0.00000	0.00021	0.00027
2.65361	0.00000	0.00021 ~ 0.00003	0.00009

$$n = 19$$

Вероятности неравенств

z	$m > np + z \sqrt{2npq}$	$m < np - z \sqrt{2npq}$	По Моавру
0.00000	0.48778	0.51222	0.50000
0.13245	0.48778	0.51222 ~ 0.33252	0.42571
0.19868	0.48778 ~ 0.30807	0.33252	0.34436
0.46359	0.30807	0.33252 ~ 0.18609	0.25605
0.52981	0.30807 ~ 0.16292	0.18609	0.22685

0.79472	0.16292	0.18609 ~ 0.08848	0.13053
0.86095	0.16292 ~ 0.06961	0.08848	0.11169
1.12585	0.06961	0.08848 ~ 0.03523	0.05567
1.19208	0.06961 ~ 0.02296	0.03523	0.04591
1.45699	0.02296	0.03523 ~ 0.01156	0.01961
1.52321	0.02296 ~ 0.00546	0.01156	0.01561
1.78812	0.00546	0.01156 ~ 0.00307	0.00572
1.85435	0.00546 ~ 0.00083	0.00307	0.00436
2.11925	0.00083	0.00307 ~ 0.00064	0.00136
2.18548	0.00083 ~ 0.00006	0.00064	0.00100
2.45039	0.00006	0.00064 ~ 0.00010	0.00026
2.51661	0.00006 ~ 0.00000	0.00010	0.00019
2.78152	0.00000	0.00010 ~ 0.00001	0.00004

Мы видим, что почти до самого конца этих табличек при каждом скачке вероятности формула Моавра дает число, лежащее между величинами вероятности до скачка и после скачка. Вместе с тем обнаруживается существенная разница между двумя этими случаями при небольших значениях z : оказывается, например, что вероятность неравенства $m > np$ больше половины при $n = 18$ и меньше половины при $n = 19$. Так, при $p = \frac{3}{5}$ отличаются случаи $n \equiv 3 \pmod{5}$ от случаев $n \equiv 4 \pmod{5}$.

В приведенных примерах разность $p - q$ составляет $\frac{1}{5}$. Останавливаясь еще на примерах, где эта разность ближе к единице, мы должны дать n значительно бóльшие значения, чтобы npq не было очень малым.

$$p = 0.9, q = 0.1, n = 99$$

Вероятности неравенств

z	$m > np + z \sqrt{2npq}$	$m < np - z \sqrt{2npq}$	По Моавру
0.02369	0.46448	0.53552 ~ 0.40336	0.48664
0.21320	0.46448 ~ 0.33261	0.40366	0.38151
0.26058	0.33261	0.40366 ~ 0.28511	0.35624
0.45009	0.33261 ~ 0.21524	0.28511	0.26222
0.49747	0.21524	0.28511 ~ 0.18852	0.24086
0.68698	0.21524 ~ 0.12338	0.18852	0.16564

0.73436	0.12338	0.18852 ~ 0.11669	0.14951
0.92387	0.12338 ~ 0.06115	0.11669	0.09559
0.97125	0.06115	0.11669 ~ 0.06767	0.08979
1.16076	0.06115 ~ 0.02540	0.06767	0.05034
1.20814	0.02540	0.06767 ~ 0.03680	0.04377
1.39765	0.02540 ~ 0.00847	0.03680	0.02404
1.44503	0.00847	0.03680 ~ 0.01880	0.02048
1.63454	0.00847 ~ 0.00212	0.01880	0.01040
1.68192	0.00212	0.01880 ~ 0.00903	0.00869
1.87143	0.00212 ~ 0.00035	0.00903	0.00406
1.91881	0.00035	0.00903 ~ 0.00409	0.00333
2.10832	0.00035 ~ 0.00003	0.00409	0.00143
2.15570	0.00003	0.00409 ~ 0.00174	0.00115
2.34521	0.00003 ~ 0.00000	0.00174	0.00046
2.39259	0.00000	0.00174 ~ 0.00070	0.00021
2.62948	0.00000	0.00070 ~ 0.00027	0.00010

$$p = 0.9, q = 0.1, n = 101$$

Вероятности неравенств

z	$m > np + z \sqrt{2npq}$	$m < np - z \sqrt{2npq}$	По Моавру
0.02345	0.56997 ~ 0.43825	0.43003	0.48677
0.21108	0.43825	0.43003 ~ 0.30895	0.38266
0.25779	0.43825 ~ 0.30939	0.30895	0.36261
0.44561	0.30939	0.30895 ~ 0.20806	0.26429
0.49252	0.30939 ~ 0.19716	0.20806	0.24305
0.68014	0.19716	0.20806 ~ 0.13131	0.16806
0.72705	0.19716 ~ 0.11120	0.13131	0.15193
0.91468	0.11120	0.13131 ~ 0.07770	0.09791
0.96158	0.11120 ~ 0.05419	0.07770	0.08693
1.14921	0.05419	0.07770 ~ 0.04316	0.05206
1.19612	0.05419 ~ 0.02212	0.04316	0.04536
1.38374	0.02212	0.04316 ~ 0.02253	0.02518
1.43065	0.02212 ~ 0.00725	0.02253	0.02152
1.61827	0.00725	0.02253 ~ 0.01107	0.01105
1.66518	0.00725 ~ 0.00178	0.01107	0.00926
1.85281	0.00178	0.01107 ~ 0.00512	0.00439
1.89971	0.00178 ~ 0.00029	0.00512	0.00361
2.08734	0.00029	0.00512 ~ 0.00224	0.00158
2.13425	0.00029 ~ 0.00002	0.00224	0.00127
2.32187	0.00002	0.00224 ~ 0.00092	0.00051
2.55604	0.00000	0.00092 ~ 0.00036	0.00015

Эти новые примеры отличаются от предыдущих только тем, что отступления от формулы Моавра, превосходящие размеры скачков, обнаруживаются гораздо раньше. Отступления эти значительны, но во много раз меньше неизбежной погрешности при первых скачках.

Наконец, при тех же величинах $p=0.9$ и $q=0.1$, положим $n=180\,000$ и $z=2$. При таких данных имеем

$$np=162\,000, \quad nq=18\,000, \quad \sqrt{2npq}=180, \quad z\sqrt{2npq}=360,$$

и поступая так, как показано в моей книге^[5] на другом примере, убеждаемся, что вероятность неравенства

$$m > np + z\sqrt{2npq} = 162\,360,$$

с присоединением равенства $m=162\,360$, меньше интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_2^{\infty} e^{-t^2} dt,$$

который, по таблице, выражается числом 0.002339, но она больше 0.00226; вероятность же равенства $m=162\,360$ выражается числом 0.0000565... Следовательно, в этом последнем примере формула Моавра дает нам число, не лежащее между двумя вероятностями, которые соответствуют рассматриваемому скачку. Отступление в сторону, указываемую дополнительным членом Чебышева, сделалось явным, так как оно не составляет только малой части соответствующего скачка; однако, по сравнению с первоначальным скачком, погрешность формулы Моавра и здесь оказывается малой: наименьшая из двух рассматриваемых вероятностей больше 0.00220 и отличается от 0.002339 менее, чем на 0.00014, первый же скачок измеряется числом

$$\frac{1}{180\sqrt{\pi}} = 0.0031\dots$$

О КОЭФФИЦИЕНТЕ ДИСПЕРСИИ

*Доложено в заседании Отделения физико-математических
наук 27 апреля 1916 г.*

Не останавливаясь на вопросе о значении коэффициента дисперсии для статистики, я имею в виду в настоящей заметке, во-первых, доказать предложение профессора А. А. Чупрова, что математическое ожидание коэффициента дисперсии в случае независимых испытаний с постоянной вероятностью точно равно единице, если не извлекать корня квадратного, а придерживаться определения, принятого в моей книге „Исчисление вероятностей“ (1913), и, во-вторых, установить для случая одинаковых серий довольно простое приближенное выражение математического ожидания квадрата отклонения этого коэффициента от единицы, несколько превосходящее точную величину последнего математического ожидания, как обнаруживает мой вывод [1].

Предложение о математическом ожидании коэффициента дисперсии я связываю с именем профессора А. А. Чупрова по той причине, что, насколько мне известно, А. А. Чупров первый стал рассматривать не в отдельности числитель и знаменатель этого дробного выражения, но самую дробь и пришел к вышеуказанному заключению, по крайней мере в случае одинаковых серий.

Что касается второго вопроса, то некоторое решение его давно найдено профессором Л. Борткевичем, но оно соединено с такими допущениями, каких мы не можем принять, заботясь о точности и ясности определений и о полной строгости выводов.

Возьмем общий случай нескольких серий независимых испытаний с постоянной вероятностью. Число серий обо-

значим буквою σ и, отличая их номерами $1, 2, \dots, \sigma$, обозначим символом s_i число наблюдений (испытаний) серии с номером i и символом x_i — соответствующее число появлений отмеченного события E , наконец, буквами n и m обозначим, соответственно, суммы

$$s_1 + s_2 + \dots + s_\sigma \quad \text{и} \quad x_1 + x_2 + \dots + x_\sigma,$$

буквою p — постоянную вероятность события E и буквою Q — коэффициент дисперсии для рассматриваемой совокупности серий, который определяется формулой

$$Q = \frac{n(n-1)}{(\sigma-1)m(n-m)} \sum_{i=1}^{\sigma} s_i \left(\frac{x_i}{s_i} - \frac{m}{n} \right)^2 = \frac{(n-1)}{(\sigma-1)m(n-m)} \left\{ \sum_{i=1}^{\sigma} \frac{nx_i^2}{s_i} - m^2 \right\},$$

а квадрат его — формулой

$$Q^2 = \frac{(n-1)^2}{(\sigma-1)^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{\sigma} \frac{n^2 x_i^4}{s_i^2} + 2 \sum_{i,j=1}^{\sigma} \frac{n^2 x_i^2 x_j^2}{s_i s_j} - 2m^2 \sum_{i=1}^{\sigma} \frac{nx_i^2}{s_i} + m^4}{m^2 (n-m)^2}.$$

Эти выражения Q и Q^2 теряют смысл при $m=0$ и при $m=n$, когда их числители и знаменатели обращаются в нуль; в указанных исключительных случаях мы будем считать $Q=Q^2=1$.

Для вычисления математических ожиданий Q и Q^2 мы должны помножить приведенные их выражения на вероятность

P

совокупности чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_\sigma,$$

равную произведению

$$\frac{s_1!}{x_1! s_1 - x_1!} \cdot \frac{s_2!}{x_2! s_2 - x_2!} \cdot \dots \cdot \frac{s_\sigma!}{x_\sigma! s_\sigma - x_\sigma!} p^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$, и составить суммы

$$\Sigma PQ \text{ и } \Sigma PQ^2$$

для всех возможных совокупностей

$$x_1, x_2, \dots, x_\sigma.$$

Это суммирование, которое не следует смешивать с $\sum_i$ и $\sum_{i,j}$, мы разобьем на две операции: в первом суммировании мы будем предполагать сумму

$$x_1 + x_2 + \dots + x_\sigma,$$

обозначенную буквою m , неизменною, а во втором нам придется изменять одно число m . Такую последовательность операций можно, при помощи двух знаков Σ , изобразить так:

$$\sum_{m=0, 1, 2, \dots, n} \sum_{x_1+x_2+\dots+x_\sigma=m} PQ \text{ и } \sum_{m=0, 1, 2, \dots, n} \sum_{x_1+x_2+\dots+x_\sigma=m} PQ^2.$$

При первом суммировании знаменатели $m(n-m)$ и $m^2(n-m)^2$ выражений Q и Q^2 сохраняют постоянные значения, и потому задача о разыскании сумм

$$\sum_{x_1+x_2+\dots+x_\sigma=m} PQ \text{ и } \sum_{x_1+x_2+\dots+x_\sigma=m} PQ^2$$

сводится к разысканию сумм

$$\sum_{x_1+x_2+\dots+x_\sigma=m} P, \quad \sum_{x_1+x_2+\dots+x_\sigma=m} Px_i^2, \quad \sum_{x_1+x_2+\dots+x_\sigma=m} Px_i^4, \quad \sum_{x_1+x_2+\dots+x_\sigma=m} Px_i^2x_j^2, \quad$$

где i и j означают какие-нибудь два значка нашей системы 1, 2, 3, ..., σ , остающиеся при суммировании неизменными.

Для разыскания всех этих сумм вводим $\sigma + 1$ произ-

вольных величин

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s, t$$

и составляем их функцию

$$W = (pte^{\xi_1} + q)^{s_1} \dots (pte^{\xi_i} + q)^{s_i} \dots (pte^{\xi_s} + q)^{s_s},$$

которая разлагается на слагаемые

$$P t^{x_1 + x_2 + \dots + x_s} e^{x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \dots + x_s \xi_s}.$$

Чтобы найти при помощи W сумму

$$\sum_{x_1 + x_2 + \dots + x_s = m} P,$$

стоит только приравнять все ξ_i нулю и затем, разложив полученное таким образом выражение

$$W_{\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_s = 0} = (pt + q)^n$$

по степеням t , взять коэффициент при t^m :

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - m)} p^m q^{n-m},$$

который и будет равен искомой сумме $\sum_{x_1 + x_2 + \dots + x_s = m} P$.

Подобным же образом коэффициенты при t^m в выражениях

$$\left(\frac{d^2 W}{d\xi_i^2} \right)_{\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_s = 0}, \quad \left(\frac{d^4 W}{d\xi_i^4} \right)_{\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_s = 0},$$

$$\left(\frac{d^4 W}{d\xi_i^2 d\xi_j^2} \right)_{\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_s = 0}$$

будут, соответственно, равны суммам

$$\sum_{x_1 + x_2 + \dots + x_s = m} P x_i^2, \quad \sum_{x_1 + x_2 + \dots + x_s = m} P x_i^4, \quad \sum_{x_1 + x_2 + \dots + x_s = m} P x_i^2 x_j^2.$$

Последние суммы нам надо рассматривать только при $0 < m < n$, так как, согласно установленному определению,

$$\sum_{m=0} P Q = \sum_{m=0} P Q^2 = q^n \quad \text{и} \quad \sum_{m=n} P Q = \sum_{m=n} P Q^2 = P^n.$$

Останавливаясь сначала, для вычисления математического ожидания Q , на первой из только что указанных сумм, находим

$$\left\{ \frac{d^2 W}{d \xi_i^2} \right\}_{\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_\sigma = 0} = s_i p t (p t + q)^{n-1} + s_i (s_i - 1) p^2 t^2 (p t + q)^{n-2}$$

и отсюда выводим

$$\sum_{x_1 + x_2 + \dots + x_\sigma = m} P \frac{n x_i^2}{s_i} \left\{ \frac{n-1!}{m-1! (n-m)!} + (s_i - 1) \frac{n-2!}{m-2! (n-m)!} \right\} n p^m q^{n-m}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \sum_{x_1 + x_2 + \dots + x_\sigma = m} P \left\{ \frac{n x_1^2}{s_1} + \frac{n x_2^2}{s_2} + \dots + \frac{n x_\sigma^2}{s_\sigma} - m^2 \right\} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1) 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-m)} \{ \sigma (n-1) + \\ &+ (n - \sigma) (m-1) - m (n-1) \} p^m q^{n-m} = \\ &= \frac{(\sigma - 1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-m-1)} p^m q^{n-m}, \end{aligned}$$

и потому

$$\sum_{x_1 + x_2 + \dots + x_\sigma = m} P Q = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-m)} p^m q^{n-m}.$$

Эта формула выведена нами при $0 < m < n$, а раньше она была установлена при $m=0$ и при $m=n$. Произведя второе суммирование, получаем предложение профессора А. А. Чупрова

$$\sum_{m=0, 1, 2, \dots, n} \sum_{x_1 + x_2 + \dots + x_\sigma = m} P Q = (p + q)^n = 1.$$

Переходя к математическому ожиданию $(Q - 1)^2$, которое в силу доказанного равно разности

$$\text{м. о. } Q^2 - \sum_{m=0, 1, 2, \dots, n} \frac{n!}{m! (n-m)!} p^m q^{n-m},$$

мы ограничимся случаем, когда все числа $s_1, s_2, \dots, s_\sigma$ имеют одно и то же значение s .

В этом частном случае Q приводится к единице при $m=1$ и при $m=n-1$, как показывает прямое вычисление^[2], так что в выражении

$$\text{м. о. } Q^2 - (p + q)^n$$

пропадают не только старшие степени p и q , но и произведения $p^{n-1}q$ и pq^{n-1} . И на основании формул

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \left\{ \frac{d^4 W}{d\xi_i^4} \right\}_{\xi_1=\xi_2=\dots=\xi_\sigma=0} &= pt(pt+q)^{n-1} + 7(s-1)p^2t^2(pt+q)^{n-2} + \\ &+ 6(s-1)(s-2)p^3t^3(pt+q)^{n-3} + \\ &+ (s-1)(s-2)(s-3)p^4t^4(pt+q)^{n-4} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} \left\{ \frac{d^4 W}{d\xi_i^2 d\xi_j^2} \right\}_{\xi_1=\xi_2=\dots=\xi_\sigma=0} &= p^2t^2(pt+q)^{n-2} + \\ &+ 2p^3t^3(s-1)(pt+q)^{n-3} + (s-1)^2 p^4t^4(pt+q)^{n-4} \end{aligned}$$

без большого труда находим

$$\begin{aligned} &\sum_{x_1+x_2+\dots+x_\sigma=m} P(Q^2 - 1) = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-4) (n-1) np^m q^{n-m}}{(\sigma-1)^2 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m-1) m^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-m) (n-m)^2} R^{(m)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R^{(m)} &= \sigma^2 (n-3) (n-2) (n-1)^2 + \\ &+ 7\sigma^2 (s-1) (n-3) (n-2) (n-1) (m-1) + \\ &+ 6\sigma^2 (s-1) (s-2) (n-3) (n-1) (m-1) (m-2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma^2 (s-1)(s-2)(s-3)(n-1)(m-1)(m-2)(m-3) + \\
& + n\sigma(\sigma-1)(n-3)(n-2)(n-1)(m-1) + \\
& + 2n\sigma(\sigma-1)(s-1)(n-3)(n-1)(m-1)(m-2) + \\
& + n\sigma(\sigma-1)(s-1)^2(n-1)(m-1)(m-2)(m-3) - \\
& - 2m^2\sigma(n-3)(n-2)(n-1)^2 - \\
& - 2m^2(n-\sigma)(n-3)(n-2)(n-1)(m-1) + \\
& + m^3(n-3)(n-2)(n-1)^2 - \\
& - (\sigma-1)^2 m(n-m)^2(n-3)(n-2).
\end{aligned}$$

Для облегчения исследования довольно сложного выражения $R^{(m)}$ можно воспользоваться тем обстоятельством, что Q не изменяет своей величины при замене всех чисел x_i разностями $s - x_i$, что ведет к замене числа m разностью $n - m$. В силу этого обстоятельства имеем

$$\begin{aligned}
& p^{n-m} q^m \sum_{x_1+x_2+\dots+x_\sigma=m} P(Q^2-1) = \\
& = p^m q^{n-m} \sum_{x_1+x_2+\dots+x_\sigma=n-m} P(Q^2-1),
\end{aligned}$$

и потому

$$mR^{(m)} = (n-m)R^{(n-m)}.$$

Отсюда прежде всего следует, что $R^{(m)}$ содержит множитель $n-m$. Установив затем прямою выкладкою равенство

$$R^{(1)} = 0,$$

мы раскрываем присутствие в выражении $R^{(m)}$, которое представляет целую функцию третьей степени относительно m , не только множителя $m-1$, но и множителя $n-m-1$. Следовательно, $R^{(m)}$ делится на произведение

$$(n-m)(n-m-1)(m-1),$$

и для полного его определения остается рассмотреть только коэффициент при m^3 , равный выражению

$$A = \sigma^2(s-1)(s-2)(s-3)(n-1) + n\sigma(\sigma-1)(s-1)^2(n-1) + \\ + (n-3)(n-2)(n-1)^2 - (\sigma-1)^2(n-3)(n-2) - \\ - (n-\sigma)(n-3)(n-2)(n-1),$$

где $n = s\sigma$. Соединяя последние три члена выражения A , находим

$$(n-3)(n-2)(n-1)^2 - 2(n-\sigma)(n-3)(n-2)(n-1) - \\ - (\sigma-1)^2(n-3)(n-2) = -(n-3)(n-2)(n-\sigma)^2 = \\ = -(\sigma^2(s-1)^2(n-3)(n-2),$$

что дает нам возможность выделить из A множитель $\sigma^2(s-1)$. Дальнейшее вычисление ведем так:

$$A = \sigma^2(s-1) \{ (s-2)(s-3)(n-1) + \\ + (n-s)(s-1)(n-1) - (s-1)(n-2)(n-3) \} = \\ = \sigma^2(s-1) \{ (s-2)(s-3)(n-1) - (s-2)(s-1)(n-1) + \\ + (n-2)(s-1)(n-1) - (s-1)(n-2)(n-3) \} = \\ = 2\sigma^2(s-1) \{ -(n-1)(s-2) + (n-2)(s-1) \} = \\ = 2\sigma^2(s-1)(n-s) = 2\sigma^2s(s-1)(\sigma-1).$$

Итак,

$$\sum_{x_1+x_2+\dots+x_s=m} P(Q^2-1) = \frac{2\sigma^2s(s-1)}{(\sigma s-2)(\sigma s-3)(\sigma-1)} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{n-m-1}{n-m} \times \\ \times \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-m)} p^m q^{n-m}$$

и

$$\text{м. о. } (Q-1)^2 = \frac{2\sigma^2s(s-1)}{(\sigma s-2)(\sigma s-3)(\sigma-1)} \sum_{m=1, 2, \dots, n-1} \frac{m-1}{m} \times \\ \times \frac{n-m-1}{n-m} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-m)} p^m q^{n-m},$$

откуда немедленно вытекает неравенство

$$\text{м. о. } (Q-1)^2 < \frac{2\sigma^2s(s-1)}{(\sigma s-2)(\sigma s-3)(\sigma-1)},$$

ибо произведение

$$\frac{m-1}{m} \cdot \frac{n-m-1}{n-m}$$

постоянно остается меньше единицы.

Если же $\sigma \geq 5$, то из найденного нами неравенства нетрудно вывести очень простое [3]

$$\text{м. о. } (Q-1)^2 < \frac{2}{\sigma-1}.$$

Указанный нами высший предел математического ожидания $(Q-1)^2$ представляет также приближенную его величину, при больших значениях n , ибо в сумме

$$\sum_{n-1, 2, \dots, n-1} \frac{m-1}{m} \cdot \frac{n-m-1}{n-m} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-m)} p^m q^{n-m}$$

главное значение имеют те члены, для которых m близко к np , а разность $n-m$ близка к nq , а для таких членов произведение

$$\frac{m-1}{m} \cdot \frac{n-m-1}{n-m}$$

мало отличается от единицы, если $n = s$, число большое [4].

Пользуюсь случаем, чтобы сказать несколько слов о модной теории *корреляции*. К этому побуждает меня статья Е. Тихомирова „Метод корреляции и его применения в метеорологии“, помещенная в 3-м выпуске второго тома Геофизического сборника.

Положительная часть теории корреляций не велика и состоит в простом применении способа наименьших квадратов к разысканию линейных зависимостей. Но теория корреляций, не довольствуясь приближенным определением различных коэффициентов, указывает еще их вероятные погрешности, и здесь она вступает в область фантазии, гипноза и веры в математические формулы, которые в действительности не имеют твердого научного основания.

Такова, например, формула Пирсона, которая в статье Е. Тихомирова играет важную роль и приведена вслед за напрасной ссылкой на мою книгу „Исчисление вероятностей“ [5].

Гипноз теории корреляции проявляется в следующих словах той же статьи: „При r , равном нулю, говорят, что между элементами корреляции не существует, и в этом случае судить по отклонениям одного элемента об изменениях другого совершенно нельзя“. В действительности же не трудно составить сколько угодно связей, совершенно не обнаруживаемых коэффициентом корреляции, в которых, однако, изменения одного элемента определяют изменения другого. Некоторое указание на подобные случаи находится и в статье Е. Тихомирова (стр. 34). Оно начинается даже заявлением „Важно отметить...“, но, противореча вышеприведенным словам, остается безрезультатным и заканчивается так: „В таком случае говорят, что переменные не находятся в корреляции, но в то же время не являются независимыми друг относительно друга“.

К области веры надо отнести и такое мнение: „Уравнение регрессии означает только, что, зная, чему равняется x_i , можно сказать, что наиболее вероятным значением y_i будет $r \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_i$ “ (там же, стр. 26).

Для характеристики утверждений, основанных на теории корреляции, может служить пример, приведенный в табл. IV той же статьи (стр. 43). Для 23 пар величин Δx и Δy этой таблицы коэффициент корреляции оказывается малым (0.09), а его вероятная ошибка сравнительно большою (0.14). Отсюда сделано заключение, что существование корреляции между этими величинами нельзя считать доказанным; такого неопределенного заключения, конечно, я не стану опровергать.

Однако, если вместо всех 23 пар взять последние десять, то коэффициент корреляции превысит 0.7, а Пирсоновская вероятная ошибка упадет до 0.1 и будет менее $\frac{1}{6}$ коэф-

фициента корреляции. Тогда придется сделать совершенно иное заключение, согласно правилу, указанному на стр. 24 той же статьи: „На практике обыкновенно принимают, что о существовании корреляции между рассматриваемыми элементами можно утверждать с полной достоверностью, если коэффициент корреляции превышает вероятную ошибку не меньше, чем в шесть раз. Это равносильно условию существования многих тысяч шансов против одного в пользу того, что связь действительно существует“.

Во избежание недоразумений и возможных споров о том, что 10 число малое, а 23 достаточно большое, замечу, что даже в теории ошибок наблюдений я не придаю большого значения так называемым вероятным погрешностям и считаю их только средством для условного сравнения достоинства различных наблюдений. Что же касается коэффициента корреляции, то, пока речь идет о данной совокупности чисел, он имеет вполне определенную величину, которую можно вычислить без всякой погрешности. Если же эта совокупность рассматривается как часть совершенно неизвестной совокупности, то коэффициент корреляции последней нельзя определить ни в случае, когда данная совокупность состоит из 10 пар, ни в случае, когда она состоит из 23 или гораздо большего числа пар. При желании можно, конечно, считать приближенной величиною этого коэффициента, самое существование которого подлежит сомнению, число, найденное для данной совокупности; но вероятную погрешность такого определения и связанный с нею подсчет шансов нельзя не признать чистою фикцией^[6].

О КОЭФФИЦИЕНТЕ ДИСПЕРСИИ

(ВТОРАЯ ЗАМЕТКА)

*Доложено в заседании Отделения физико-математических
наук 19 мая 1920 г.*



Цель этой краткой заметки состоит в выводе предельной формулы для вероятности коэффициенту дисперсии заключаться в данных пределах при условии, что число испытаний в каждой серии возрастает беспредельно. Сохраняя обозначения первой заметки и введя новые величины $t_1, t_2, \dots, t_\sigma, t$, связанные с числами x_i равенствами

$$\begin{aligned} x_1 &= s_1 p + t_1 \sqrt{s_1 p q}, & x_2 &= s_2 p + t_2 \sqrt{s_2 p q}, & \dots, \\ & \dots, & x_\sigma &= s_\sigma p + t_\sigma \sqrt{s_\sigma p q}, \\ t &= \frac{t_1 \sqrt{s_1} + t_2 \sqrt{s_2} + \dots + t_\sigma \sqrt{s_\sigma}}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} m &= np + t \sqrt{npq}, & n - m &= nq - t \sqrt{npq}, \\ s_i \left(\frac{x_i}{s_i} - \frac{m}{n} \right)^2 &= \left\{ t_i - \frac{\sqrt{s_i}}{\sqrt{n}} t \right\}^2 pq \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Q &= \frac{(n-1) \sum \left\{ t_i - \frac{\sqrt{s_i}}{\sqrt{n}} t \right\}^2}{n(\sigma-1) \left(1 + t \sqrt{\frac{q}{np}} \right) \left(1 - t \sqrt{\frac{p}{nq}} \right)} = \\ &= \frac{(n-1) \sum t_i^2 - t^2}{n(\sigma-1) \left(1 + t \sqrt{\frac{q}{np}} \right) \left(1 - t \sqrt{\frac{p}{nq}} \right)}. \end{aligned}$$

Величины $t_1, t_2, \dots, t_\sigma$ не зависят друг от друга. И мы знаем, что при беспредельном возрастании всех чисел $s_1, s_2, \dots, s_\sigma$ математическое ожидание степени t_i^{2k} стремится

к пределу

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} t^{2k} dt$$

для любого целого положительного четного показателя $2k$ и для любого значка $i=1, 2, 3, \dots, \sigma$, а математическое ожидание нечетной степени t_i^{2k+1} при $s_i = \infty$ приводится к нулю, что также можно представить интегралом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} t^{2k+1} dt.$$

Вместе с тем вероятность, что $t_1, t_2, \dots, t_\sigma$ удовлетворяют каким-либо определенным неравенствам, стремится к пределу, равному интегралу

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^\sigma} \int \int \cdots \int e^{-\frac{t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_\sigma^2}{2}} dt_1 dt_2 \cdots dt_\sigma,$$

распространенному на значения $t_1, t_2, \dots, t_\sigma$, которые удовлетворяют тем же неравенствам; а математическое ожидание любой целой функции

$$\Phi(t_1, t_2, \dots, t_\sigma)$$

стремится к пределу

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_\sigma^2}{2}} \Phi(t_1, t_2, \dots, t_\sigma) dt_1 \cdots dt_\sigma.$$

При таких условиях пределом для математического ожидания любой нечетной степени величины

$$t = \frac{t_1 \sqrt{s_1} + t_2 \sqrt{s_2} + \dots + t_\sigma \sqrt{s_\sigma}}{\sqrt{n}}$$

будет нуль, а предел математического ожидания t^{2k} также

равен произведению

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k - 1),$$

как показывает следующая простая выкладка:

$$\begin{aligned} \text{пред. м. о.} \quad t^{2k} &= \sum_{s_1=\infty, s_2=\infty, \dots, s_\sigma=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots 2k s_1^{g_1} \cdot s_2^{g_2} \cdots s_\sigma^{g_\sigma}}{1 \cdot 2 \cdots 2g_1 \cdots 1 \cdot 2 \cdots 2g_\sigma n^k} \times \\ &\quad \times 1 \cdot 3 \cdots (2g_1 - 1) \cdots 1 \cdot 3 \cdots (2g_\sigma - 1) = \\ &= 1 \cdot 3 \cdots (2k - 1) \sum \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}{1 \cdot 2 \cdots g_1 \cdots 1 \cdot 2 \cdots g_\sigma} \cdot \frac{s_1^{g_1} s_2^{g_2} \cdots s_\sigma^{g_\sigma}}{(s_1 + s_2 + \cdots + s_\sigma)^k} = \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k - 1). \end{aligned}$$

А предел математического ожидания произведения

$$(t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_\sigma^2)^l t^r,$$

где l и r — любые целые положительные числа, можно представить многократным интегралом

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_\sigma^2)} (t_1^2 + \dots + t_\sigma^2)^l t^r dt \cdots dt_\sigma.$$

При r нечетном этот интеграл, очевидно, равен нулю. Чтобы вычислить его и при четном r , в равенстве

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_\sigma^2)} t^{2k} dt_1 dt_2 \cdots dt_\sigma = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k - 1),$$

правая часть которого служит, как и левая, пределом для математического ожидания t^{2k} при $s_1 = \infty, s_2 = \infty, \dots, s_\sigma = \infty$, заменяем все переменные t_i произведениями $t_i \sqrt{\xi}$, вводя новое переменное ξ , не зависящее от $t_1, t_2, \dots, t_\sigma$. Из полученного таким образом равенства

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_\sigma^2) \xi} t^{2k} dt_1 \cdots dt_\sigma = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2k - 1)}{\xi^{\frac{1}{2}(2k + \sigma)}},$$

произведя l раз дифференцирование по ξ и полагая затем $\xi=1$, выводим

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \sum t_i^2} t^{2k} (\sum t_i^2)^l dt_1 dt_2 \cdots dt_\sigma =$$

$$= (2k + \sigma)(2k + \sigma + 2) \cdots (2k + \sigma + 2l - 2) 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k - 1).$$

Зная предельную величину математического ожидания произведения $t^{2k} (\sum t_i^2)^l$ при любых целых положительных показателях k и l , без особого труда находим предельную величину математического ожидания всякой целой положительной степени выражения $V = \sum t_i^2 - t^2$:

$$\begin{aligned} \text{пред. м. о.}_{s_1=\infty, s_2=\infty, \dots, s_\sigma=\infty} V^r &= \text{пред. } \sum \text{ м. о.}_{s_1=\infty, s_2=\infty, \dots, s_\sigma=\infty} \\ &= \frac{(-1)^r (r-1) \cdots (r-k+1) t^{2k}}{1 \cdot 2 \cdots k} (\sum t_i^2)^{r-k} = \\ &= \sum (-1)^k \frac{r(r-1) \cdots (r-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) (\sigma + 2k) \cdots \\ &\cdots (\sigma + 2r - 2) = \sum \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{2}{3}\right) \cdots \left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} 2r(2r-2) \cdots \\ &\cdots (2r-2k+2) (\sigma + 2k) \cdots (\sigma + 2r - 2) = (\sigma-1)(\sigma+1)(\sigma+3) \cdots \\ &\cdots (\sigma + 2r - 3) = 2^r \Gamma\left(\frac{\sigma + 2r - 1}{2}\right) : \Gamma\left(\frac{\sigma - 1}{2}\right) \end{aligned}$$

согласно известной формуле исчисления конечных разностей^[1]

$$f(z) = \sum \frac{z(z-1) \cdots (z-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \{\Delta^k f(z)\}_{z=0}$$

при

$$f(z) = (\sigma + 2z)(\sigma + 2z + 2) \cdots (\sigma + 2z + 2r - 2) \quad \text{и} \quad z = -\frac{1}{2}.$$

Итак, при беспредельном возрастании всех чисел $s_1, s_2, \dots, s_\sigma$ математическое ожидание V^r стремится к пределу

$$\frac{2^r \Gamma\left(\frac{\sigma + 2r - 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\sigma - 1}{2}\right)} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(\sigma-1)} \Gamma\left(\frac{\sigma - 1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t} t^{\frac{1}{2}(\sigma+2r-3)} dt,$$

каково бы ни было целое положительное число r .

Этот результат позволяет нам заключить, что вероятность неравенства

$$V < A,$$

где A — любое данное положительное число, стремится к пределу

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(\sigma-1)} \Gamma\left(\frac{\sigma - 1}{2}\right)} \int_0^A e^{-\frac{1}{2}t} t^{\frac{1}{2}(\sigma-3)} dt = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\sigma - 1}{2}\right)} \int_0^{\frac{1}{2}A} e^{-t} t^{\frac{1}{2}(\sigma-3)} dt,$$

если все числа $s_1, s_2, \dots, \sigma_s$ беспредельно возрастают.

Остается совершить переход от V к

$$U = \frac{n-1}{n(\sigma-1)} \cdot \frac{V}{\left(1 + t \sqrt{\frac{q}{np}}\right) \left(1 - t \sqrt{\frac{p}{nq}}\right)}$$

или к $(\sigma-1)U$, вся трудность которого заключается в делителе

$$\left(1 + t \sqrt{\frac{q}{np}}\right) \left(1 - t \sqrt{\frac{p}{nq}}\right),$$

так как при беспредельном возрастании n множитель $\frac{n-1}{n}$ стремится к пределу 1. Для намеченного перехода вводим вспомогательное число ϵ , которое будем приближать к пределу 0, и из всей совокупности значений t выделим те, при

которых произведение

$$\left(1 + t \sqrt{\frac{q}{np}}\right) \left(1 - t \sqrt{\frac{p}{nq}}\right), \text{ равное } \frac{m}{np} \cdot \frac{n-m}{nq},$$

лежит вне пределов $1 - \epsilon$ и $1 + \epsilon$. Вероятность выделенной совокупности мы обозначим буквою ρ ; согласно теореме Бернулли, она должна стремиться к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n}$. Для остальных же значений t имеем

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{V}{1+\epsilon} < (\sigma-1) U < \frac{n-1}{n} \cdot \frac{V}{1-\epsilon}.$$

На этом основании не трудно заключить, что вероятность неравенства

$$(\sigma-1) U < A$$

меньше суммы числа ρ с вероятностью неравенства

$$V < \frac{n}{n-1} (1+\epsilon) A,$$

но больше вероятности неравенства

$$V < (1-\epsilon) A$$

без числа ρ ; ибо во всех случаях, когда $V < \frac{n}{n-1} (1+\epsilon) (\sigma-1) U$

и $(\sigma-1) U < A$, выполняется неравенство $V < \frac{n}{n-1} (1+\epsilon) A$

и во всех случаях, когда $(\sigma-1) n (1-\epsilon) U < (n-1) V$ и $V < (1-\epsilon) A$, выполняется неравенство $(\sigma-1) U < A$; что же касается выделенных нами случаев, то вероятность соединения таких случаев с теми или иными значениями U и V не может превышать общей вероятности их ρ . Увеличивая затем $s_1, s_2, \dots, s_\sigma$ беспредельно, мы приближаем ρ к пределу нуль, а вероятности неравенств

$$V < \frac{n}{n-1} (1+\epsilon) A \text{ и } V < (1-\epsilon) A$$

— к пределам

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(\sigma-1)} \Gamma\left(\frac{\sigma-1}{2}\right)} \int_0^{(1-\varepsilon)A} e^{-\frac{1}{2}t} t^{\frac{\sigma-3}{2}} dt$$

и

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(\sigma-1)} \Gamma\left(\frac{\sigma-1}{2}\right)} \int_0^{(1+\varepsilon)A} e^{-\frac{1}{2}t} t^{\frac{\sigma-3}{2}} dt.$$

Если же вместе с тем станем приближать ε к пределу нуль, то последние два интеграла будут приближаться к одному общему пределу

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(\sigma-1)} \Gamma\left(\frac{\sigma-1}{2}\right)} \int_0^A e^{-\frac{1}{2}t} t^{\frac{\sigma-3}{2}} dt.$$

Отсюда, наконец, можем заключить, что вероятность выполнения неравенства

$$U < B$$

стремится к пределу

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(\sigma-1)} \Gamma\left(\frac{\sigma-1}{2}\right)} \int_0^{(\sigma-1)B} e^{-\frac{1}{2}t} t^{\frac{\sigma-3}{2}} dt ,$$

если B и число серий σ остаются неизменными, а $s_1, s_2, \dots, s_r$ возрастают беспредельно.

При значительном числе серий σ для облегчения приближенных вычислений полезно подвергнуть последнее выражение известному преобразованию Лапласа, что сведет вычисление вероятности для величин U , близких к единице, к пользованию таблицей значений интеграла

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$$

Представив предельное выражение вероятности в виде отношения двух интегралов

$$\frac{\int_0^{(\sigma-1)B} e^{-\frac{1}{2}t} t^{\frac{\sigma-3}{2}} dt}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t} t^{\frac{\sigma-3}{2}} dt},$$

делим в обоих интегралах подинтегральную функцию на

$$2e^{-\frac{\sigma-3}{2}} (\sigma-3)^{\frac{\sigma-3}{2}}$$

и вместо t вводим новое переменное z , связанное с t уравнением

$$t = \sigma - 3 + 2z \sqrt{\sigma - 3}.$$

Вероятность различных значений z быстро убывает с возрастанием z^2 , поэтому мы обращаем главное внимание на значения z , близкие к нулю, и на основании разложения логарифма подинтегральной функции в ряд

$$\begin{aligned} & \log e^{-z \sqrt{\sigma-3}} \left(1 + \frac{2z}{\sqrt{\sigma-3}}\right)^{\frac{\sigma-3}{2}} = \\ & = -z \sqrt{\sigma-3} + z \sqrt{\sigma-3} - z^2 + \frac{4z^3}{\sqrt{\sigma-3}} - \dots \end{aligned}$$

заменяем $[\frac{2}{\sqrt{\pi}}]$ ее показательную e^{-z^2} .

Замечаем, что значениям z , близким к нулю, соответствуют значения

$$\frac{t}{\sigma-1} = \frac{\sigma-3}{\sigma-1} + \frac{2z\sqrt{\sigma-3}}{\sigma-1},$$

близкие к единице, и рассматривая на этом основании вместо неравенства

$$U < B$$

два неравенства

$$\frac{2h}{\sqrt{\sigma}} < U-1 < \frac{2g}{\sqrt{\sigma}},$$

мы, по замене обеих разностей $\sigma-1$, $\sigma-3$ одним числом σ , находим для вероятности последних неравенств приближенное выражение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_h^g e^{-t^2} dt,$$

которое служит пределом ее, если вместе с числом испытаний каждой серии возрастает также беспредельно и число серий.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЛАПЛАСА

*Доложено в заседании Физикс-математического отделения
7 января 1915 г.*

Задача, которой посвящена эта заметка, рассмотрена Лапласом в его „*Theorie analytique des probabilités*“ (Livre II, Chapitre troisième, § 17); она находится в некоторой связи с задачей, приведенной в конце моей заметки „Об испытаниях, связанных в цепь не наблюдаемыми событиями“ (Изв. Акад. Наук, 1912, стр. 551—572)^[1].

В обеих задачах рассматривается результат продолжительного обмена шаров между двумя сосудами. Различие их состоит в том, что задача Лапласа относится к составу шаров после обмена и потому соединена с предположением, что число шаров в каждом сосуде неограниченно велико и находится в определенном отношении к числу шаров, переложенных из одного сосуда в другой, задача же моей прежней заметки имеет в виду состав этих последних шаров, число которых — одно только — предполагается неограниченно большим.

Благодаря указанному предположению задача Лапласа имеет, по моему мнению, искусственный характер, что не лишает, однако, ее математического интереса.

Заметим кстати, что она представляет интерес и для истории математики, так как при решении ее Лаплас пользуется теми полиномами, которые ныне принято называть функциями Эрмита или функциями Чебышева. Он представляет эти полиномы сначала определенными интегралами, а затем дает и конечное их выражение, отмечая вместе с тем основное их свойство обращать известные интегралы в нуль.

Цель моей заметки — выяснить, что к задаче Лапласа, даже значительно обобщенной, можно с успехом приложить метод математических ожиданий.

Пусть в одном из двух сосудов находится n шаров, а другом n_1 шаров; пусть, далее, число белых шаров в обоих сосудах равно $(n + n_1)p$, а черных — $(n + n_1)q$, где $p + q = 1$. Число белых шаров в первом сосуде обозначим буквою x ; оно неизвестно и будет изменяться, но предполагаются установленными вероятности всех возможных его значений, до начала обмена.

Обмен этот состоит в последовательных перекладываниях по одному шару из одного сосуда в другой и обратно. Число произведенных перекладываний обозначим буквою r ; последнее число мы будем увеличивать беспредельно вместе с n и n_1 . Обозначим, наконец, символом

$$z_{x, r}$$

вероятность, что после r перекладываний в первом сосуде, содержащем постоянно n шаров, будет ровно x белых шаров и, следовательно, будет $n - x$ черных шаров, иначе сказать, во втором сосуде будет $(n + n_1)p - x$ белых и $n_1 q - np + x$ черных шаров.

Таковы условия задачи, которую рассматривал Лаплас при $p = q = \frac{1}{2}$ и $n = n_1$. На основании их нетрудно составить уравнение [2]

$$\begin{aligned} z_{x, r+1} = & \frac{x+1}{n} \cdot \frac{n_1 q - np + x + 1}{n_1} z_{x+1, r} + \\ & + \frac{n-x+1}{n} \cdot \frac{(n+n_1)p - x + 1}{n_1} z_{x-1, r} + \\ & + \left\{ \frac{x}{n} \cdot \frac{(n+n_1)p - x}{n_1} + \frac{n-x}{n} \cdot \frac{n_1 q - np + x}{n_1} \right\} z_{x, r} \end{aligned}$$

для последовательного вычисления величин

$$z_{x, 1}, z_{x, 2}, z_{x, 3}, \dots$$

по данным величинам $x_{x,0}$. Последовательное вычисление $z_{x,r}$ служит основанием, но не целью исследований Лапласа; задача их, которой мы здесь займемся^[3], состоит в приближенном определении $z_{x,r}$ для весьма больших значений n , n_1 , r .

Отметим один случай, для которого не трудно дать точное выражение $z_{x,r}$, при произвольных n , n_1 и r и выполнить требуемый переход к предельной формуле. Положим, что наполнение сосудов шарами произведено таким образом. Сначала все $n + n_1$ шаров, среди которых $(n + n_1)p$ белых и $(n + n_1)q$ черных, помещены во второй сосуд, а затем из него вынуто и положено в первый n шаров, так что во втором сосуде остается n_1 шаров. Тогда вероятности $z_{x,0}$, как нетрудно видеть, будут заданы по формуле

$$z_{x,0} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots x \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-x)} \times \\ \times \frac{a(a-1) \cdots (a-x+1) b(b-1) \cdots (b-n+x+1)}{(n+n_1)(n+n_1-1) \cdots (n_1+1)},$$

где

$$a = p(n + n_1) \quad \text{и} \quad b = q(n + n_1).$$

Подставляя же это выражение $z_{x,0}$ и соответствующие выражения $z_{x+1,0}$ и $z_{x-1,0}$ в правую часть выше приведенного уравнения при $r=0$, находим

$$z_{x,1} = z_{x,0},$$

на том же основании получим

$$z_{x,2} = z_{x,1},$$

и вообще переход от r к $r+1$ дает нам равенство

$$z_{x,r+1} = z_{x,r} = z_{x,0}.$$

Мы видим, что $z_{x,r}$ оказывается, в данном случае, не-

зависящим от r и определяется по вышеприведенной формуле.

Этот частный результат нетрудно было и предвидеть, ибо при указанной подготовке сосудов, сколько бы затем ни было сделано перемещений шаров из первого сосуда во второй и обратно, у нас всегда останется одно и то же данное, что $(n + n_1)r$ белых и $(n + n_1)q$ черных шаров разбиты на две группы, из которых одна содержит n , а другая n_1 шаров.

Не трудно догадаться также, что при других начальных условиях выражение

$$\frac{1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots x \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n - x)} \cdot \frac{a(a-1) \cdots (a-x+1)b(b-1) \cdots (b-n+x+1)}{(n + n_1)(n + n_1 - 1) \cdots (n_1 + 1)}$$

будет служить пределом вероятности $z_{x,r}$, когда r возрастает беспредельно. При всей ясности последнего предположения, отмеченного уже в прежней моей заметке, аналитическое доказательство его представляет некоторые затруднения и не входит в нашу задачу.

Оставляя в стороне отмеченный особенный и предельный случай, приведем вывод Лапласа, измененный сообразно обобщению задачи. Полагаем

$$x = nr + \mu \sqrt{\frac{2pqnn_1}{n + n_1}}, \quad r \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} \right) = 2\rho, \quad n_1 \alpha = n, \\ \sqrt{\frac{n + n_1}{2pqnn_1}} = \Delta\mu, \quad z_{x,r} = U$$

и, рассматривая U как функцию μ и ρ , допускаем возможность разложения

$$z_{x,r+1}, z_{x+1,r}, z_{x-1,r}$$

в такие ряды

$$z_{x,r+1} = U + \frac{1}{2\pi} (1 + \alpha) \frac{\partial U}{\partial \rho} + \dots,$$

$$z_{x+1,r} = U + \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1 + \alpha}{2pq}} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{1 + \alpha}{4pq n} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2} + \dots,$$

$$z_{x-1, r} = U - \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1+\alpha}{2pq}} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{1+\alpha}{4pqn} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2} + \dots,$$

где U и все производные от U по p и по μ представляют величины одного и того же порядка относительно $\frac{1}{n}$.

На это допущение следует обратить особое внимание, ибо оно составляет главный слабый пункт вывода Лапласа и принадлежит к числу часто и легко принимаемых.

Подставляем указанные ряды в уравнение, связывающее

$$z_{x, r+1}, z_{x+1, r}, z_{x-1, r} \text{ и } z_{x, r},$$

и разлагаем коэффициенты его также в ряды по степеням $\frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{n} \cdot \frac{n_1 q - np + x + 1}{n_1} &= pq + \frac{\mu}{\sqrt{n}} (p\alpha + q) \sqrt{\frac{2pq}{1+\alpha}} + \\ &+ \frac{p\alpha + q}{n} + \frac{2pq \alpha \mu^2}{n(1+\alpha)} + \dots, \\ \frac{n-x+1}{n} \cdot \frac{(n+n_1)p - x + 1}{n_1} &= pq - \frac{\mu}{\sqrt{n}} (p + q\alpha) \sqrt{\frac{2pq}{1+\alpha}} + \\ &+ \frac{p + q\alpha}{n} + \frac{2pq \alpha \mu^2}{n(1+\alpha)} + \dots, \\ \frac{x}{n} \cdot \frac{(n+n_1)p - x}{n_1} + \frac{n-x}{n} \cdot \frac{n_1 q - np + n}{n_1} &= p^2 + q^2 + \\ &+ \frac{\mu}{\sqrt{n}} (p - q)(1 - \alpha) \sqrt{\frac{2pq}{1-\alpha}} - \frac{4pq \alpha \mu^2}{n(1+\alpha)}. \end{aligned}$$

Производя выкладки, мы получаем таким образом в обеих частях уравнения ряды, расположенные по возрастающим степеням $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Остается сравнить множители при младшей степени $\frac{1}{\sqrt{n}}$, т. е. при $\frac{1}{n}$, и мы придем к линейному диф-

ференциальному уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = 2U + 2\mu \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2},$$

решение которого Лаплас представляет определенным интегралом

$$U = e^{-\mu^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} f\left(\frac{s - \mu \sqrt{-1}}{e^{2\rho}}\right) ds$$

и затем рядом

$$U = \frac{e^{-\mu^2} \Delta \mu}{\sqrt{\pi}} \{1 + L_1 e^{-2\rho} \varphi_1(\mu) + L_2 e^{-4\rho} \varphi_2(\mu) + \dots\},$$

где $\varphi_k(\mu)$ — известные целые функции переменного μ , определяемые условием

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2} \mu^i \varphi_k(\mu) d\mu = 0$$

при $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$. По Лапласу, они могут быть определены общею формулою

$$\varphi_k(\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} (\mu + s \sqrt{-1})^k ds,$$

если требовать, чтобы коэффициент при старшей степени μ был равен единице; откуда находим

$$\begin{aligned} \varphi_k(\mu) = & \mu^k - \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2} \mu^{k-2} + \\ & + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \mu^{k-4} - \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что эти функции Лапласа вполне совпадают с функциями Чебышева — Эрмита.

$$\varphi_k(\mu) = \frac{e^{\mu^2}}{(-2)^k} \cdot \frac{d^k e^{-\mu^2}}{d\mu^k}.$$

Что касается коэффициентов L_k , то они определяются по начальному выражению U , при $\rho = 0$,

$$\frac{e^{-\rho^2} \Delta \mu}{\sqrt{\pi}} (1 + L_1 \varphi_1(\rho) + L_2 \varphi_2(\rho) + \dots),$$

которое должно быть задано так, чтобы связь между U и n ограничивалась только множителем $\Delta \mu$.

Переходя к рассмотрению математических ожиданий степеней ρ , полагаем

$$\frac{\rho \sqrt{2pqnn_1}}{\sqrt{n+n_1}} = t \quad \text{и} \quad z_{x,r} = Z_{t,r}$$

и, принимая во внимание равенство

$$x = np + t,$$

преобразуем уравнение, связывающее

$$z_{x,r+1}, z_{x+1,r}, z_{x-1,r}, z_{x,r}$$

в следующее:

$$\begin{aligned} Z_{t,r+1} = & \left(p + \frac{t+1}{n}\right) \left(q + \frac{t+1}{n_1}\right) Z_{t+1,r} + \\ & + \left(q - \frac{t-1}{n}\right) \left(p - \frac{t-1}{n_1}\right) Z_{t-1,r} + \left\{ \left(p + \frac{t}{n}\right) \left(p - \frac{t}{n_1}\right) + \right. \\ & \left. + \left(q - \frac{t}{n}\right) \left(q + \frac{t}{n_1}\right) \right\} Z_{t,r}. \end{aligned}$$

Затем вводим обозначение

$$Y_r^{(m)}$$

для математического ожидания степени t^m после r переключений, т. е. полагаем

$$\sum Z_{t,r} t^m = Y_r^{(m)};$$

вместе с тем, в силу связи t с μ имеем

$$\text{м. о. } \mu^m = \left(\frac{1 + \alpha}{2pqn} \right)^{\frac{m}{2}} Y_r^{(m)}.$$

Умножим теперь все члены только что полученного уравнения, которое связывает

$$Z_{t, r+1}, Z_{t+1, r}, Z_{t-1, r} \text{ и } Z_{t, r},$$

на t^m и, пользуясь простыми тождествами

$$\begin{aligned} t^m &= (t+1)^m - \frac{m}{1} (t+1)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (t+1)^{m-2} - \dots = \\ &= (t-1)^m + \frac{m}{1} (t-1)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (t-1)^{m-2} + \dots, \end{aligned}$$

расположим множитель при $z_{t+1, r}$ по степеням $t+1$, а множитель при $z_{t-1, r}$ по степеням $t-1$.

Рассматривая полученные таким образом равенства при всех возможных значениях t и складывая почленно правые и левые части их, приходим к линейному уравнению

$$\begin{aligned} Y_{r+1}^{(m)} &= \left\{ 1 - m \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} \right) + \frac{m(m-1)}{nn_1} \right\} Y_r^{(m)} - \\ &- \frac{m(m-1)}{2} (p-q) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n_1} \right) Y_r^{(m-1)} + \frac{m(m-1)}{2} \left\{ 2pq - \right. \\ &- \frac{m-2}{3} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} \right) + \frac{(m-2)(m-3)}{3 \cdot 2nn_1} \left. \right\} Y_r^{(m-2)} - \\ &- \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (p-q) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n_1} \right) Y_r^{(m-3)} + \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left\{ 2pq - \frac{m-4}{5} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} \right) + \right. \\ &+ \frac{(m-4)(m-5)}{5 \cdot 3nn_1} \left. \right\} Y_r^{(m-4)} - \dots, \end{aligned}$$

которое равносильно ряду линейных уравнений первого порядка

$$Y_{r+1}^{(1)} = \left\{ 1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} \right) \right\} Y_r^{(1)},$$

$$Y_{r+1}^{(2)} = \left\{ 1 - 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} \right) + \frac{2}{nn_1} \right\} Y_r^{(2)} - (p - q) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n_1} \right) Y_r^{(1)} + 2pq,$$

$$Y_{r+1}^{(3)} = \left\{ 1 - 3 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} \right) + \frac{6}{nn_1} \right\} Y_r^{(3)} - 3(p - q) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n_1} \right) Y_r^{(2)} +$$

$$+ 3 \left\{ 2pq - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} \right) \right\} Y_r^{(1)},$$

$$Y_{r+1}^{(4)} = \left\{ 1 - 4 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} \right) + \frac{12}{nn_1} \right\} Y_r^{(4)} - 6(p - q) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n_1} \right) Y_r^{(3)} +$$

$$+ 6 \left\{ 2pq - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} \right) + \frac{1}{3nn_1} \right\} Y_r^{(2)} -$$

$$- (p - q) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n_1} \right) Y_r^{(1)} + 2pq,$$

.....

Отсюда нетрудно вывести последовательно формулы такого вида

$$Y_r^{(1)} = C_1 h_1^r;$$

$$Y_r^{(2)} = C_2 h_2^r + a_2 C_1 h_1^r + b_2;$$

.....

$$Y_r^{(m-1)} = C_{m-1} h_{m-1}^r + a_{m-1} C_{m-2} h_{m-2}^r + \dots,$$

$$Y_r^{(m)} = C_m h_m^r + a_m C_{m-1} h_{m-1}^r + b_m C_{m-2} h_{m-2}^r + \dots,$$

где вообще

$$h_k = 1 - k \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} \right) + \frac{k(k-1)}{nn_1},$$

множители

$$a_2, b_2, a_3, b_3, c_3, \dots$$

выражаются определенным образом через p, q, n, n_1 и, наконец, коэффициенты

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_m, \dots$$

находятся по значениям

$$Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)}, Y_0^{(3)}, \dots, Y_0^{(m)}, \dots$$

В частности

$$\begin{aligned} (h_{m-1} - h_m) a_m &= \frac{m(m-1)}{2} (p - q) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n_1} \right), \\ (h_{m-2} - h_m) b_m &= \frac{m(m-1)}{2} (p - q) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n_1} \right) a_{m-1} + \\ &+ \frac{m(m-1)}{2} \left\{ 2pq - \frac{m-2}{3} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} \right) + \frac{(m-2)(m-3)}{3 \cdot 2nn_1} \right\}. \end{aligned}$$

Полученные нами формулы сложны, но из них можно выделить сравнительно простые главные члены, если предположить, что n и n_1 возрастают беспредельно и что при $r=0$ математические ожидания всех степеней μ стремятся к конечным пределам [4].

Предположение это, тесно связанное с выводом Лапласа, выражается таким общим равенством

$$Y_0^{(m)} = \left\{ \frac{2pqnn_1}{n+n_1} \right\}^{\frac{m}{2}} \{ X_0^{(m)} + \varepsilon_0^{(m)} \},$$

где $X_0^{(m)}$ вовсе не зависит от n и n_1 или зависит от их отношения $\frac{n}{n_1}$, которое предполагается неизменным, а $\varepsilon_0^{(m)}$ стремится к пределу нуль вместе с $\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}$.

При таком условии, принимая во внимание, что в правой части уравнения

$$\begin{aligned} Y_{r+1}^{(m)} &= \left\{ 1 - m \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} \right) + \frac{m(m-1)}{nn_1} \right\} Y_r^{(m)} - \\ &\quad \frac{m(m-1)}{2} (p - q) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n_1} \right) Y_r^{(m-1)} + \dots \end{aligned}$$

множитель при $Y_r^{(m-1)}$ представляет величину бесконечно малую того же порядка, как $\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}$ (в случае Лапласа он даже

равен нулю) и все разности

$$h_{m-1} - h_m, h_{m-2} - h_m, \dots, h_1 - h_m, 1 - h_m,$$

а множитель при $Y_r^{(m-2)}$ отличается от $m(m-1)pq$ на подобную же бесконечно малую величину, и наконец, множители при

$$Y_r^{(m-3)}, Y_r^{(m-4)}, \dots, Y_r^{(1)},$$

как и свободный от них член, величины бесконечно малые или конечные, мы можем установить общее равенство

$$Y_r^{(m)} = \left\{ \frac{2pqnn_1}{n+n_1} \right\}^{\frac{m}{2}} \{X_r^{(m)} + \varepsilon_r^{(m)}\},$$

где $\varepsilon_r^{(m)}$ остается бесконечно малой величиной при всех значениях r как конечных, так и бесконечно больших, а $X_r^{(m)}$ определяется формулами

$$X_r^{(1)} = A_1^{(1)} h_1^r,$$

$$X_r^{(2)} = A_2^{(2)} h_2^r + A_2^{(0)},$$

$$X_r^{(3)} = A_3^{(3)} h_3^r + A_3^{(1)} h_1^r,$$

$$X_r^{(4)} = A_4^{(4)} h_4^r + A_4^{(2)} h_2^r + A_4^{(0)},$$

$$\dots \dots \dots X_r^{(m)} = A_m^{(m)} h_m^r + A_m^{(m-2)} h_{m-2}^r + A_m^{(m-4)} h_{m-4}^r + \dots,$$

$$A_0^{(0)} = 1, \quad A_1^{(1)} = X_0^{(1)},$$

$$A_m^{(m)} = Y_0^{(m)} - A_m^{(m-2)} - A_m^{(m-4)} - \dots,$$

$$A_m^{(m-2)} = \frac{m(m-1)}{2 \cdot 2} A_{m-2}^{(m-2)},$$

$$A_m^{(m-4)} = \frac{m(m-1)}{2 \cdot 4} A_{m-2}^{(m-4)} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2^2 \cdot 2 \cdot 4} A_{m-4}^{(m-4)},$$

$$\dots \dots \dots A_m^{(m-2i)} = \frac{m(m-1)}{2 \cdot 2i} A_{m-2}^{(m-2i)} = \frac{m(m-1) \dots (m-2i-1)}{2^i \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2i} A_{m-2i}^{(m-2i)}.$$

Пока r остается конечным, выражение $X_0^{(m)}$ отличается только на бесконечно малую величину от $X_r^{(m)}$.

Дело изменяется, если r тоже возрастает беспредельно. Мы различим два случая.

Если r возрастает быстрее, чем n и n_1 , то все выражения

$$h_1^r, h_2^r, \dots, h_m^r$$

стремятся к пределу нуль и наши формулы последовательно дают

$$\begin{aligned} \text{пред. м. о. } \mu &= 0, \quad \text{преп. м. о. } \mu^2 = \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^2 e^{-\mu^2} d\mu, \\ \text{пред. м. о. } \mu^{2k+1} &= 0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^{2k+1} e^{-\mu^2} d\mu, \\ \text{пред. м. о. } \mu^{2k} &= \frac{2k-1}{2} \cdot \text{пред. м. о. } \mu^{2k-2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^{2k} e^{-\mu^2} d\mu. \end{aligned}$$

Вместе с тем, в силу известного предложения,* можно утверждать, что, каковы бы ни были данные числа t_1 и $t_2 > t_1$, вероятность неравенств

$$t_1 < \mu < t_2$$

стремится в таком случае к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\mu^2} d\mu.$$

* А. Марков. Исчисление вероятностей. Изд. 3-е, стр., 329—330.

Если же, подобно Лапласу, который не останавливается на случае $\frac{r}{n} = \infty$, положим попрежнему

$$r \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} \right) = 2\rho,$$

то из предыдущих формул найдем для предельной величины математического ожидания μ^m такое выражение

$$\text{пред. } (X_r^{(m)})_{n=\infty} = A_m^{(m)} e^{-2m\rho} + A_m^{(m-2)} e^{-2(m-2)\rho} + \dots,$$

коэффициенты которого

$$A_m^{(m)}, A_m^{(m-2)}, A_m^{(m-4)}, \dots$$

определяются вышеуказанными равенствами.

Чтобы сблизить последний наш вывод с выводом Лапласа, снова введем функции Лапласа—Чебышева—Эрмита.

$$\varphi_k(\mu) = \frac{e^{\mu^2}}{(-2)^k} \frac{d^k e^{-\mu^2}}{d\mu^k}.$$

Для таких функций имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^k e^{-\mu^2} \varphi_k(\mu) d\mu &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}{2^k}, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^{k+2i} e^{-\mu^2} \varphi_k(\mu) d\mu &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k+2i)}{2^{i+k} \cdot 2 \cdot 4 \dots 2i}. \end{aligned}$$

Поэтому, если вместо чисел

$$A_1^{(1)}, A_2^{(2)}, A_3^{(3)}, \dots$$

мы введем новые числа

$$L_1, L_2, L_3, \dots,$$

связывая их с прежними общим равенством

$$A_k^{(k)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k}{2^k} L_k,$$

то вышеустановленное равенство

$$A_m^{(m-2i)} = \frac{m(m-1 \cdots (m-2i+1))}{2^i \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2i} A_{m-2i}^{(m-2i)}$$

заменится следующим:

$$A_m^{(m-2i)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}{2^{m-i} 2 \cdot 4 \cdots 2i} L_{m-2i},$$

и затем

$$A_m^{(m-2i)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} L_{m-2i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu^2} \mu^m \varphi_{m-2i}(\mu) d\mu.$$

Вместе с тем найденное нами выражение для предела $X_r^{(m)}$ тотчас приведет к такому виду:

$$\begin{aligned} \text{пред. } X_r^{(m)} = & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^m (1 + L_1 e^{-2\rho} \varphi_1(\mu) + \\ & + L_2 e^{-4\rho} \varphi_2(\mu) + \dots) e^{-\mu^2} d\mu. \end{aligned}$$

Наконец, стоит только допустить, что математические ожидания степеней μ определяют вероятность, и немедленно придем к интегральному выражению

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\mu^2} (1 + L_1 e^{-2\rho} \varphi_1(\mu) + L_2 e^{-4\rho} \varphi_2(\mu) + \dots) d\mu$$

для предельной величины вероятности неравенств

$$t_1 < \mu < t_2,$$

которое вполне соответствует дифференциальному выражению Лапласа:

$$\frac{\Delta\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu^2} (1 + L_1 e^{-2\rho} \varphi_1(\mu) + L_2 e^{-4\rho} \varphi_2(\mu) + \dots).$$

Лаплас останавливается также на замечательных частных случаях своей задачи, для которых решение ее особенно просто. К частным случаям Лапласа метод математических ожиданий применяется еще с бóльшим успехом, ибо для них U имеет вид

$$Ae^{-b(\mu-g)^2} \Delta\mu,$$

где b и g не зависят от μ , и потому переход от математических ожиданий к вероятности можно основать теперь уже не на допущении, а на доказанной теореме.

Рассмотрим сначала случай $g=0$, который имеет место, если $X_0^{(m)}$ определяется общею формулою

$$X_0^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{1+l}\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\mu^2}{1+l}} \mu^m d\mu,$$

иначе сказать, если

$$0 = X_0^{(1)} = X_0^{(3)} = \dots = X_0^{(2k+1)} = \dots$$

и

$$X_0^{(2k)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2^k} (1+l)^k.$$

Подставляя эти величины

$$X_0^{(1)}, X_0^{(2)}, X_0^{(3)}, X_0^{(4)}, \dots$$

в найденные нами предельные выражения $X_r^{(m)}$ и полагая для краткости $e^{-4\rho} = \sigma$, последовательно получаем:

$$\begin{aligned} 0 &= \text{пред. } X_r^{(1)} = \text{пред. } X_r^{(3)} = \dots = \text{пред. } X_r^{(2k+1)} = \dots \\ \text{пред. } X_r^{(2)} &= \left\{ \frac{1}{2} (1+l) - \frac{1}{2} \right\} \sigma + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1+l\sigma) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1+l\sigma)\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\mu^2}{1+l\sigma}} \mu^2 d\mu,$$

пред. $X_r^{(4)} = \left\{ \frac{3}{4} (1-l)^2 - \frac{3}{2} l - \frac{3}{4} \right\} \sigma^2 + \frac{3}{2} l\sigma + \frac{3}{4} =$

$$= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} (1+l\sigma)^2 = \frac{1}{\sqrt{(1+l\sigma)\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\mu^2}{1+l\sigma}} \mu^4 d\mu,$$

.....

пред. $X_r^{(2m-2)} = \frac{1}{\sqrt{(1+l\sigma)\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\mu^2}{1+l\sigma}} \mu^{2m-2} d\mu =$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-3)}{2^{m-1}} (1+l\sigma)^{m-1} = \sum_{i=0}^{i=m} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-3)}{2^{m-1}} \times$$

$$\times \frac{(m-1)(m-2) \cdots (m-i)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots i} (l\sigma)^{m-i-1},$$

пред. $X_r^{(2m)} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{2^m} \left\{ l^m \sigma^m + \right.$

$$\left. \sum_{i=0}^{i=m} \frac{m(m-1) \cdots (m-i)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (i+1)} \right\} (l\sigma)^{m-i-1} =$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{2^m} (1+l\sigma)^m = \frac{1}{\sqrt{(1+l\sigma)\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\mu^2}{1+l\sigma}} \mu^m d\mu.$$

Итак, имеем

пред. м. о. $\mu^m = \frac{1}{\sqrt{(1+l\sigma)\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\mu^2}{1+l\sigma}} \mu^m d\mu,$

и на основании известной теоремы можем утверждать, что интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{(1+l\sigma)\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{\mu^2}{1+l\sigma}} d\mu$$

должен быть пределом вероятности неравенств

$$t_1 < \mu < t_2$$

для любых данных значений t_1 и $t_2 > t_1$.

Разбор этого частного случая у Лапласа связан с вышеуказанным общим разложением искомой функции по полиномам $\varphi_m(\mu)$ и приводит к такой формуле:

$$\frac{1}{\sqrt{1+h}} e^{-\frac{\mu^2}{1+h}} = e^{-\mu^2} \sum \frac{h^k \varphi_{2k}(\mu)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}.$$

Случай

$$U = A \Delta \mu \cdot e^{-b(\mu-g)^2},$$

где g не нуль, Лаплас рассматривает совершенно независимо от общего, доказывая, что выражение

$$U = \frac{\Delta \mu}{\sqrt{(1+le^{-4\rho})} \pi} \cdot e^{-\frac{(\mu - ae^{-2\rho})^2}{1+le^{-4\rho}}}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = 2U + 2\mu \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 U}{\partial \mu^2}.$$

Но при помощи только что приведенной формулы нетрудно связать и этот случай с общим.

Действительно, на основании ее имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+l\theta^2}} e^{-\frac{(\mu-a\theta)^2}{1+l\theta^2} + \mu^2 + \frac{a^2}{l}} &= \frac{1}{\sqrt{1+l\theta^2}} e^{\left(\mu + \frac{a}{l\theta}\right)^2 \frac{l\theta^2}{1+l\theta^2}} = \\ &= \sum \frac{l^k \theta^{2k} \varphi_{2k}\left(\mu + \frac{a}{l\theta}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}, \end{aligned}$$

откуда, принимая во внимание простую формулу

$$\varphi_m\left(\mu + \frac{a}{l\theta}\right) = \varphi_m(\mu) + \frac{ma}{l\theta} \varphi_{m-1}(\mu) + \frac{m(m-1)a^2}{1 \cdot 2l^2\theta^2} \varphi_{m-2}(\mu) + \dots,$$

выводим разложение по степеням θ такого вида

$$\frac{1}{\sqrt{1+l\theta^2}} e^{-\frac{(\mu-a\theta^2)}{1+l\theta^2}} = e^{-\mu^2} \sum D_m \theta^m \varphi_m(\mu),$$

где коэффициенты D_m не зависят ни от θ , ни от μ .

Для нашей цели нет надобности останавливаться на исследовании количеств D_m и на приведении их к возможно простому виду, а достаточно только установить, что разложение по степеням θ функции

$$\frac{1}{\sqrt{1+l\theta^2}} e^{-\frac{(\mu-a\theta^2)}{1+l\theta^2} + \mu^2}$$

переменных μ и θ оказывается вместе с тем разложением по полиномам $\varphi_m(\mu)$.

Установив совпадение двух разложений, мы заключаем, что ряд

$$1 + L_1 e^{-2\rho} \varphi_1(\mu) + L_2 e^{-4\rho} \varphi_2(\mu) + L_3 e^{-6\rho} \varphi_3(\mu) + \dots$$

даст разложение по полиномам Лапласа—Чебышева—Эрмита для

$$\frac{1}{\sqrt{1+le^{-4\rho}}} e^{-\frac{(\mu-ae^{-2\rho})^2}{1+le^{-4\rho}} + \mu^2},$$

если ряд

$$1 + L_1 \varphi_1(\mu) + L_2 \varphi_2(\mu) + L_3 \varphi_3(\mu) + \dots$$

будет разложением по тем же полиномам

$$\frac{1}{\sqrt{1+l}} e^{-\frac{(\mu-a)^2}{1+l} + \mu^2},$$

что и доставляет нам результат Лапласа: если при $\rho=0$ имеем

$$U = \frac{\Delta\mu}{\sqrt{(1+l)\pi}} e^{-\frac{(\mu-a)^2}{1+l}},$$

то вообще

$$U = \frac{\Delta\mu}{\sqrt{(1+le^{-4\rho})\pi}} e^{-\frac{(\mu-ae^{-2\rho})^2}{1+le^{-4\rho}}}.$$

Переходя от вероятности к математическим ожиданиям и принимая во внимание выясненную связь наших выводов, относящихся к математическим ожиданиям, с дифференциальным выражением вероятности по Лапласу

$$\frac{e^{-\mu^2} \Delta\mu}{\sqrt{\pi}} \{1 + L_1 e^{-2\rho} \varphi_1(\mu) + L_2 e^{-4\rho} \varphi_2(\mu) + \dots\},$$

можем сделать затем такое заключение: если значения $X_0^{(m)}$ установлены формулою

$$X_0^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{(1+l)\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\mu-a)^2}{1+l}} \mu^m d\mu,$$

то

$$\text{пред. } X_r^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{1+le^{-4\rho}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\mu-ae^{-2\rho})^2}{1+le^{-4\rho}}} \mu^m d\mu.$$

А отсюда, наконец, можем сделать переход к интегральному выражению вероятности:

$$\frac{1}{\sqrt{1+le^{-4\rho}}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{(\mu-ae^{-2\rho})^2}{1+le^{-4\rho}}} d\mu$$

служит пределом вероятности неравенств

$$t_1 < \mu < t_2.$$

Число $1+l$ в этих формулах не может быть отрицательным. Вывод Лапласа принимает парадоксальный характер

и при $l = -1$, так как выражение

$$\frac{1}{\sqrt{1 - e^{-4\rho}}} e^{-\frac{(\mu - ae^{-2\rho})^2}{1 - e^{-4\rho}}}$$

теряет определенный смысл при $\rho = 0$. Рассмотрение же математических ожиданий степеней μ обнаруживает возможность случая $l = -1$, по крайней мере при $a = 0$; но к нему не применимо дифференциальное выражение вероятности

$$\frac{e^{-\mu^2} \Delta\mu}{\sqrt{\pi}} (1 + L_1 \varphi_1(\mu) + L_2 \varphi_2(\mu) + \dots,$$

ибо до обмена шаров между сосудами μ имеет только одно значение нуль.

Такой особый случай представляется, если сосуды наполнены шарами так, что в первом находится ровно np белых и nq черных шаров, а во втором, конечно, $n_1 p$ белых и $n_1 q$ черных.

Тогда все значения

$$X_0^{(m)} \text{ и } \varepsilon_0^{(m)}$$

точно равны нулю и наши формулы дают

$$\begin{aligned} \text{пред. } X_r^{(2k-1)} &= 0, \\ \text{пред. } X_r^{2k} &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2^k} (1 - e^{-4\rho})^k. \end{aligned}$$

Откуда при всяком ρ , отличном от нуля, можем заключить, что вероятность неравенств

$$t_1 < \mu < t_2$$

должна стремиться к пределу, равному

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{\mu^2}{1 - e^{-4\rho}}} d\mu,$$

если t_1 , t_2 и ρ будут оставаться неизменными, а n и n_1 будут беспредельно возрастать.

Можно указать и такие случаи, к которым заключения Лапласа совсем не применимы, но мы на них не остановимся.

4 января 1915 г.

О НЕКОТОРЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ФОРМУЛАХ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

*Доложено в заседании Отделения физико-математических наук
18 января 1917 г.*



В исследованиях о повторении испытаний весьма важную роль играет случай, когда число испытаний увеличивается беспредельно без изменения остальных элементов задачи. К этому, именно, случаю относится известное предельное выражение вероятности в виде интеграла Моавра—Лапласа.

Однако могут представлять интерес и такие случаи, в которых с увеличением числа испытаний изменяются также другие элементы. Например, если дело идет о последовательном извлечении шаров из сосуда, состав которого не восстанавливается, а постепенно исчерпывается, то мы не можем увеличивать беспредельно число испытаний (извлечений), не увеличивая, также беспредельно, первоначального числа шаров в сосуде. Этому случаю в известном трактате А. Мейера (A. Mayer. Vorlesungen über Wahrscheinlichkeiten) посвящено особое прибавление под заглавием „Ausdehnung des Bernoullischen Theorems auf Factoriellen von Binomen“, там выведена приближенная формула, которая может служить также предельною, если только *sehr grosse Zahlen* Мейера заменить бесконечно большими числами. Заметим кстати, что с тем же случаем связывает Пирсон свои эмпирические формулы. Другая замечательная предельная формула была указана Пуассоном в его „Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile“ и получила довольно большую известность в математической статистике благодаря работе Л. Борткевича „Gesetz der kleinen Zahlen“; она относится к случаю, когда для независимых испытаний общая постоянная вероятность события

предполагается убывающею при беспредельном возрастании числа испытаний, так что произведение ее на число испытаний остается неизменным.

Указанные случаи связаны с тою совокупностью, на которой мы предполагаем остановиться и могли бы быть к ней причислены; но мы исключим их, предполагая, что вместо сосуда неизменного или исчерпываемого состава взят постоянно пополняемый сосуд растущего состава. Заметим еще, что формулы, относящиеся к нашей совокупности, заключают, как частный случай, также известное выражение вероятности будущих событий (*a posteriori*). Некоторая величина будет у нас целым положительным числом, в указанных же случаях она равна 0 или -1 ; наконец, в формуле для вероятности *a posteriori* она приводится к $+1$.

Мы предполагаем, что в сосуде находится первоначально a белых и b черных шаров и нет никаких других. Из него вынимают, последовательно, n шаров, причем каждый вынутый шар немедленно заменяют в сосуде $\alpha + 1$ шарами того же цвета. Возможное число белых шаров, среди вынутых таким образом n шаров, обозначим буквою m , а число черных шаров, равное $n - m$, буквою l ; наконец, символом

$$P_{m,n}^{a,b}$$

обозначим вероятность ^[1] каждого значения m . При таких условиях и обозначениях не трудно установить общую формулу

$$\begin{aligned} P_{m,n}^{a,b} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots m \cdot 1 \cdot 2 \cdots l} \times \\ &\times \frac{a(a+\alpha) \cdots (a+(m-1)\alpha) b(b+\alpha) \cdots (b+(l-1)\alpha)}{(a+b)(a+b+\alpha) \cdots (a+b+(n-1)\alpha)} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots m \cdot 1 \cdot 2 \cdots l} \frac{\mu(\mu+1) \cdots (\mu+m-1) \lambda(\lambda+1) \cdots (\lambda+l-1)}{(\mu+\lambda)(\mu+\lambda+1) \cdots (\mu+\lambda+n-1)} = \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1) \Gamma(l+1)} \cdot \frac{\Gamma(\mu+m) \Gamma(\lambda+l) \Gamma(\mu+\lambda)}{\Gamma(\mu) \Gamma(\lambda) \Gamma(\mu+\lambda+n)}, \end{aligned}$$

где

$$\mu = \frac{a}{\alpha} \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{b}{\alpha},$$

а символ Γ означает известные функции гамма.

В частном случае, когда $a = b = \alpha$, это выражение

$$P_{m,n}^{a,b}$$

не зависит от m и приводится к $\frac{1}{n+1}$. Если же такого двойного равенства нет, то отношение

$$\frac{P_{m+1,n}^{a,b}}{P_{m,n}^{a,b}} = \frac{a + m\alpha}{m+1} \frac{n-m}{b + (n-m-1)\alpha}$$

может быть постоянно больше единицы, или постоянно меньше единицы, и может также один раз переходить, при постепенном возрастании числа m , от значений бóльших единицы к значениям меньшим ее, или наоборот — от значений меньших единицы к значениям бóльшим ее, соответственно тому, сохраняет ли разность

$$(a + m\alpha)(n - m) - (m + 1)(b + (n - m - 1)\alpha),$$

равная

$$(a - \alpha)n - (a + b - 2\alpha)m - b + \alpha,$$

постоянно один знак $+$ или $-$ или же переходит от значений положительных к отрицательным, или, наоборот, — от отрицательных значений к положительным. Вместе с тем, конечно, в средней части совокупности

$$P_{0,n}^{a,b}, \quad P_{1,n}^{a,b}, \quad \dots, \quad P_{n-1,n}^{a,b}, \quad P_{n,n}^{a,b}$$

может не быть ни наибольшего, ни наименьшего ее числа или там будет лежать одно из них.

Предположим сначала, что a , b и α остаются неизменными. В таком случае, при достаточно больших значениях n ,

в средней части совокупности

$$P_{0,n}^{a,b}, P_{1,n}^{a,b}, \dots, P_{n-1,n}^{a,b}, P_{n,n}^{a,b},$$

как нетрудно убедиться, будет лежать наибольшее число, если обе разности $a - \alpha$ и $b - \alpha$ больше нуля, и напротив — наименьшее, если обе разности $a - \alpha$ и $b - \alpha$ меньше нуля. Если же $(a - \alpha)(b - \alpha) \leq 0$, то как наибольшее, так и наименьшее число приходятся на крайние члены

$$P_{0,n}^{a,b} \text{ и } P_{n,n}^{a,b},$$

как бы ни было велико число n . И нетрудно видеть, что отношение наивероятнейшего значения m при $a - \alpha > 0$ и $b - \alpha > 0$ или наименее вероятного значения [2] m при $a - \alpha < 0$ и $b - \alpha < 0$ к числу n приближается к пределу

$$\frac{a - \alpha}{a + b - 2\alpha},$$

когда n возрастает беспредельно; а отношение математического ожидания m к n во всех случаях равно дроби [3]

$$\frac{a}{a + b}.$$

И даже при максимуме вероятности в средней части нашей совокупности не оказывается около него такого соединения вероятных значений m , какое имеет место для задачи Я. Бернулли; так что первый закон больших чисел здесь не применяется, как было уже указано в моей заметке „Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга“ (Изв. Физ.-мат. общ. при Казанском унив., 2 сер., XV, № 4 [4]).

Обращаясь к выводу предельной формулы для постоянных значений отношений

$$\frac{a}{\alpha} = \mu \text{ и } \frac{b}{\alpha} = \lambda$$

и беспредельно возрастающих значений n , остановимся на таких значениях m , для которых дроби

$$\frac{m}{n} = \xi \quad \text{и} \quad \frac{n-m}{n} = \frac{l}{n} = \eta = 1 - \xi$$

не приближаются произвольно близко к нулю; так что, следовательно, оба числа m и $n-m=l$ возрастают у нас беспредельно вместе с n . При таких условиях и обозначениях мы можем применить к гаммам $\Gamma(n+1)$, $\Gamma(m+1)$, $\Gamma(l+1)$, $\Gamma(\mu+m)$, $\Gamma(\lambda+l)$, $\Gamma(\lambda+\mu+n)$ известную предельную формулу, называемую формулой Стирлинга

$$\text{пред.} \left\{ \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}} \right\}_{x=\infty} = 1,$$

что доставит нам вместо $P_{m,n}^{a,b}$ выражение

$$P = \frac{1}{n} \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \left\{ \frac{\mu+m}{\lambda+\mu+n} \right\}^{\mu-1} \left\{ \frac{\lambda+l}{\lambda+\mu+n} \right\}^{\lambda-1} \left\{ \frac{(\mu+m)n}{(\lambda+\mu+n)m} \right\}^m \left\{ \frac{(\lambda+l)n}{(\lambda+\mu+n)l} \right\}^l,$$

а затем — еще более простое выражение

$$P' = \frac{1}{n} \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \xi^{\mu-1} (1-\xi)^{\lambda-1},$$

которые для рассматриваемых нами значений ξ удовлетворяют условию

$$\text{пред.} \left\{ \frac{P_{m,n}^{a,b}}{P} \right\}_{n=\infty} = \text{пред.} \left\{ \frac{P_{m,n}^{a,b}}{P'} \right\}_{n=\infty} = 1$$

в силу вышеприведенной формулы Стирлинга и простых предельных равенств

$$\text{пред.} e^{\frac{(\lambda+\mu)m}{n} - \mu} \left\{ \frac{(\mu+m)n}{(\lambda+\mu+n)m} \right\}_{n=\infty}^m = 1,$$

$$\text{пред.} e^{\frac{(\lambda+\mu)l}{n} - \lambda} \left\{ \frac{(\lambda+l)n}{(\lambda+\mu+n)l} \right\}_{n=\infty}^l = 1.$$

Отсюда немедленно заключаем, что для любых данных чисел c и $d > c$, лежащих между нулем и единицей, вероятность неравенств

$$c < \frac{m}{n} < d$$

стремится, при рассматриваемых нами условиях, к пределу, равному

$$\frac{\Gamma(\lambda + \mu)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \int_c^d \xi^{\mu-1} (1 - \xi)^{\lambda-1} d\xi.$$

Что касается исключенных нами значений m , для которых

$$\text{пред.} \left(\frac{m}{n} \right)_{n=\infty} = 0 \text{ или } 1,$$

то вероятность их должна иметь пределом нуль ввиду того, что найденное нами выражение

$$\frac{\Gamma(\lambda + \mu)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \int_c^d \xi^{\mu-1} (1 - \xi)^{\lambda-1} d\xi$$

отличается от единицы сколь угодно мало; если c и $1 - d$ достаточно близки к нулю.

Перейдем к предположению, что при беспредельном возрастании числа n число λ возрастает беспредельно, а μ остается неизменным. Относительно быстроты возрастания числа различим три случая:

$$1) \text{ пред.} \left(\frac{\lambda}{n} \right)_{n=\infty} = 0, \quad 2) \text{ пред.} \left(\frac{\lambda}{n} \right)_{n=\infty} = g$$

$$\text{и } 3) \text{ пред.} \left(\frac{n}{\lambda} \right)_{n=\infty} = 0,$$

где g — какое-нибудь данное положительное число.

В первом случае наши вычисления будут относиться, подобно прежнему, к значениям m и $n - m$, возрастающим

беспредельно вместе с n , но вместо отношения $\frac{m}{n}$ приходится ввести другую величину

$$\frac{m\lambda}{n} = x,$$

для которой мы будем рассматривать вероятность неравенств

$$c < x < d,$$

при любых данных положительных числах c и $d - c$.

Ввиду того, что λ и $\lambda + \mu$ возрастают теперь беспредельно, мы можем применить формулу Стирлинга также к

$$\Gamma(\lambda) \text{ и } \Gamma(\lambda + \mu);$$

таким образом, вместо прежнего выражения P получим новое

$$P = \frac{\lambda e^{-\mu}}{n \Gamma(\mu)} \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda} \right)^\lambda \left(\frac{(\lambda + \mu)(\mu + m)}{\lambda + \mu + n} \right)^{\mu-1} \left(\frac{\lambda + l}{\lambda + \mu + n} \right)^\lambda \left(\frac{(\mu + m)n}{(\lambda + \mu + n)m} \right)^m \left(\frac{(\lambda + l)n}{(\lambda + \mu + n)l} \right)^l,$$

для которого имеем:

$$\text{пред. } \left\{ \frac{P_{m,n}^{a,b}}{P} \right\}_{n=\infty} = 1.$$

И так как в данном случае произведения

$$e^{-\mu} \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda} \right)^\lambda, \left(\frac{\lambda + l}{\lambda + \mu + n} \right)^\lambda e^{\frac{m\lambda}{n}}, \left(\frac{(\mu + m)n}{(\lambda + \mu + n)m} \right)^m e^{\frac{m\lambda}{n} - \mu},$$

$$\left(\frac{(\lambda + l)n}{(\lambda + \mu + n)l} \right)^l e^{\mu - \frac{m\lambda}{n}}$$

стремятся к пределу 1, то простое выражение

$$P' = \frac{\lambda}{n \Gamma(\mu)} e^{-x} x^{\mu-1},$$

где $x = \frac{m\lambda}{n}$ также удовлетворяет условию

$$\text{пред. } \left\{ \frac{P_{m,n}^{a,b}}{P'} \right\}_{n=\infty} = 1.$$

Отсюда тотчас следует, что в рассматриваемом нами случае вероятность неравенств

$$c < \frac{m\lambda}{n} < d,$$

где c и d — произвольные данные положительные числа и $d > c$ стремится к пределу

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_c^d e^{-x} x^{\mu-1} dx,$$

когда n возрастает беспредельно. Этот результат показывает также, что вероятность тех предположений о величине m , для которых отношение $\frac{m\lambda}{n}$ имеет пределом нуль или возрастает беспредельно, должна при рассматриваемых нами сейчас условиях стремиться к пределу 0, ибо

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\mu-1} dx = 1.$$

Если же λ возрастает настолько быстро, что отношение $\frac{\lambda}{n}$ стремится к некоторому пределу $g > 0$, то мы должны рассматривать уже определенные величины m , так как в этом случае каждому данному значению m соответствует некоторое предельное выражение вероятности, отличное от нуля. При данных μ и m формулу Стирлинга мы можем применить только к

$$\Gamma(n+1), \Gamma(l+1), \Gamma(\lambda+\mu), \Gamma(\lambda), \Gamma(\lambda+l), \Gamma(\lambda+\mu+n),$$

что доставляет нам такое выражение

$$P = \frac{\Gamma(\mu+m)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\mu)} \left\{ \frac{n}{\lambda+\mu+n} \right\}^m \left\{ \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu+n} \right\}^{\mu} \left\{ \frac{(\lambda+l)(\lambda+\mu)}{(\lambda+\mu+n)\lambda} \right\}^{\lambda} \left\{ \frac{n(l+\lambda)}{l(\lambda+\mu+n)} \right\}^l$$

и затем еще более простое выражение

$$P' = \frac{\Gamma(\mu + m)}{\Gamma(m + 1) \Gamma(\mu)} \left\{ \frac{1}{g + 1} \right\}^m \left\{ \frac{g}{g + 1} \right\}^\mu,$$

которое в разбираемом случае служит пределом для вероятности

$$P_{m, n}^{a, b}$$

в силу простых равенств

$$\text{пред. } \left\{ \frac{n}{\lambda + \mu + n} \right\}_{n=\infty}^m = \left\{ \frac{1}{g + 1} \right\}^m,$$

$$\text{пред. } \left\{ \frac{\lambda + \mu}{\lambda + \mu + n} \right\}_{n=\infty}^\mu = \left\{ \frac{g}{g + 1} \right\}^\mu,$$

$$\text{пред. } \left\{ \frac{(\lambda + l)(\lambda + \mu)}{(\lambda + \mu + n)\lambda} \right\}_{n=\infty}^\lambda = e^{-\frac{mg + \mu}{g + 1}},$$

$$\text{пред. } \left\{ \frac{n(l + \lambda)}{l(\lambda + \mu + n)} \right\}^l = e^{\frac{mg - \mu}{\mu + 1}}.$$

Наконец, если отношение $\frac{\lambda}{n}$ возрастает беспредельно вместе с n , то вероятность одного значения $m=0$ стремится, как нетрудно убедиться, к пределу 1.

Остается рассмотреть те случаи, когда оба числа μ и λ возрастают беспредельно вместе с n . Ход возрастания трех чисел λ , μ , n может быть различным, и потому нам опять придется различить несколько случаев.

Если λ , μ , n — бесконечно большие величины одного и того же порядка, то, повторяя известный вывод, относящийся к вероятностям *a posteriori* [5], мы легко находим для вероятности неравенств

$$t_1 \sqrt{\frac{2\lambda\mu n(n + \lambda + \mu)}{(\lambda + \mu)^3}} < m - n \frac{\lambda}{\lambda + \mu} < t_2 \sqrt{\frac{2\lambda\mu n(n + \lambda + \mu)}{(\lambda + \mu)^3}},$$

при любых данных значениях t_1 и $t_2 > t_1$, предельное выражение в виде известного интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt.$$

Тот же результат остается в силе* и при различных порядках λ , μ , n , если оба произведения $n \frac{\lambda}{\mu}$ и $n \frac{\mu}{\lambda}$ также бесконечно велики. Но в этих случаях его можно еще несколько упростить: а именно под знаком $\sqrt{}$ можно в сумме $n + \lambda + \mu$ из двух слагаемых n и $\lambda + \mu$ сохранить только величину высшего порядка или в сумме $\lambda + \mu$ отбросить одно из слагаемых, или, наконец, соединить обе эти операции.

Пусть, наконец, μ — величина низшего порядка, а произведение $n\mu$ — того же порядка, как λ . Тогда опять приходится рассматривать вероятность данного любого значения m . Вычисления подобны предыдущим, и потому мы не станем их приводить, а укажем только предельное выражение вероятности

$$\frac{e^{-g} g^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m},$$

где $g = \text{пред.} \left\{ \frac{n\mu}{\lambda} \right\}_{n=\infty}$. Это самое предельное выражение дано Пуассоном для независимых одинаковых испытаний, при условии, что вероятность события при каждом испытании, в отдельности, стремится к пределу нуль, а произведение ее на число испытаний стремится к пределу g .

Если же не только μ , но и произведение $n\mu$ — величина низшего порядка, чем λ , то, как нетрудно убедиться, вероятность одного предположения $m=0$ имеет уже пределом единицу [6].

* См. мою заметку „О вероятности a posteriori“ в XIV томе 2-й серии „Собраний Харьковского математического общества“.

Таким образом, нами исчерпаны все предельные формулы, которые можно получить из вышеприведенного выражения вероятности $P_{m,n}^{a,b}$, если беспрестанно увеличивать число испытаний n , а другие элементы задачи $\lambda = \frac{b}{a}$ и $\mu = \frac{a}{a}$ оставлять неизменными или увеличивать число испытаний n , а другие элементы задачи $\lambda = \frac{b}{a}$ и $\mu = \frac{a}{a}$ оставлять неизменными или увеличивать беспрестанно с различной быстротой.

Для других задач [7] могут быть и иные предельные формулы; но среди всех этих формул особое место занимает формула Моавра—Лапласа для случая независимых или связанных испытаний с постоянною вероятностью.

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ОБМЕНЕ ШАРОВ

*Доложено в заседании Отделения физико-математических
наук 8 ноября 1917 г.*

В статье „Применение способа математических ожиданий к связанным рядам величин“ (Изв. Акад. Наук, 1915) была рассмотрена задача о последовательном обмене шаров в двух сосудах.

Мы выяснили, что к этой задаче с полным успехом применяется способ математических ожиданий: точное выражение вероятности, по существу вопроса, весьма сложно, а предельные величины математических ожиданий дают возможность установить известное предельное выражение вероятности, которое при продолжительном обмене может служить приближенной величиной вероятности. Размер погрешности, конечно, остается неопределенным, но мы можем утверждать, что при достаточно продолжительном обмене он будет сколь угодно мал. Рассматривая последовательный обмен шаров между несколькими сосудами, мы можем придать нашей задаче значительно более общий характер. При таком обобщении вычисления, требуемые способом математических ожиданий, весьма усложняются, ибо приходится последовательно рассматривать не отдельные уравнения, как в случае двух сосудов, а целые совокупности уравнений с несколькими неизвестными. Однако при удачном выборе неизвестных можно и в общем случае прийти к довольно простым предельным выводам.

Если обозначим число сосудов буквой m , количества белых и всех шаров буквами a и s с номерами $1, 2, 3, \dots, m$, число произведенных одновременно перекладываний — из 1-го сосуда во 2-й, из 2-го в 3-й, $\dots$, из $m-1$ -го в m -й

и из m -го сосуда в 1-й — через n и, наконец, символом

$$P_n^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}$$

вероятность, что при этих перекладываниях будет вынуто белых шаров — из первого сосуда α_1 , из второго $\alpha_2, \dots$, из m -го α_m и, следовательно, шаров другого цвета $n - \alpha_1, n - \alpha_2, \dots, n - \alpha_m$, то общее уравнение между вероятностями, служащее для последовательного увеличения числа n , можно представить сокращенно так [1]:

$$P_{n+1}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} s_1 s_2 \dots s_m = \\ = \sum C_1 C_2 \dots C_i \dots C_m P_n^{\alpha_1 - \varepsilon_1, \alpha_2 - \varepsilon_2, \dots, \alpha_i - \varepsilon_i, \dots, \alpha_m - \varepsilon_m},$$

где множители $C_1, C_2, \dots, C_m$ определяются формулой

$$C_i = (1 - \varepsilon_i) s_i + (2\varepsilon_i - 1)(\alpha_i - \alpha_i + \alpha_{i-1} + \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}),$$

и суммирование $\sum$ должно быть распространено на все совокупности чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m = \varepsilon_i$, равных 0 и 1.

На основании этого общего уравнения между вероятностями мы получим ряд уравнений между математическими ожиданиями различных выражений, которые последовательно будем рассматривать. Такими выражениями будут разности [2]

$$x_1 = \alpha_1 - (\alpha_1 - \alpha_m) = \alpha_1 - (\alpha_1 - \alpha_0), \quad x_2 = \alpha_2 - (\alpha_2 - \alpha_1), \dots, \\ \dots, \quad x_m = \alpha_m - (\alpha_m - \alpha_{m-1}), \quad y = \alpha_1 - np,$$

где

$$p = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m}{s_1 + s_2 + \dots + s_m}$$

произведения вида

$$x_1(x_1 - 1), \quad x_1(x_1 - 1)(x_1 - 2), \dots, \quad x_m(x_m - 1), \\ x_m(x_m - 1)(x_m - 2), \dots;$$

Переходя к произведениям

$$x_1(x_1 - 1), x_2(x_2 - 1), \dots, x_m(x_m - 1), x_1 x_2, x_1 x_3, \dots \\ \dots, x_{m-1} x_m,$$

составляем $\frac{m(m+1)}{2}$ уравнений:

$$s_1 s_m (x_1(x_1 - 1))_{n+1} = (s_1 - 2) s_m (x_1(x_1 - 1))_n + 2(s_1 - 1)(x_1 x_m)_n, \\ s_2 s_1 (x_2(x_2 - 1))_{n+1} = (s_2 - 2) s_1 (x_2(x_2 - 1))_n + 2(s_2 - 1)(x_1 x_2)_n, \\ \dots$$

$$s_1 s_2 s_m (x_1 x_2)_{n+1} = (s_1 - 1)(s_2 - 1) s_m (x_1 x_2)_n + \\ + s_2 s_m (x_1(x_1 - 1))_n + s_2 (x_1 x_m)_n + s_1 (s_2 - 1)(x_2 x_m)_n, \\ s_1 s_2 s_3 s_m (x_1 x_3)_{n+1} = (s_1 - 1)(s_3 - 1) s_2 s_m (x_1 x_3)_n + \\ + (s_1 - 1) s_3 s_m (x_1 x_2)_n + (s_3 - 1) s_1 s_2 (x_3 x_4)_n + s_1 s_3 (x_2 x_m),$$

и т. д.

На основании их и тождества

$$x_1(x_1 - 1) + \dots + x_m(x_m - 1) + 2\sum x_i x_j = \\ = (a_1 + a_2 + \dots + a_m)(a_1 + a_2 + \dots + a_m - 1),$$

где суммирование Σ распространяется на все пары различных чисел $i(1, 2, 3, \dots, m)$ и $j(1, 2, 3, \dots, m)$, получаем систему уравнений между предельными величинами рассматриваемых произведений при $n = \infty$:

$$\frac{(x_1(x_1 - 1))_\infty}{s_1 - 1} = \frac{(x_1 x_m)_\infty}{s_m}, \quad \frac{(x_2(x_2 - 1))_\infty}{s_2 - 1} = \frac{(x_1 x_2)_\infty}{s_1}, \dots \\ s_2 \left\{ \frac{(x_1 x_2)_\infty}{s_2} - \frac{(x_1 x_m)_\infty}{s_m} \right\} + (s_2 - 1) \left\{ \frac{(x_1 x_2)_\infty}{s_1} - \frac{(x_2 x_m)_\infty}{s_m} \right\} = 0, \\ (s_1 - 1) \left\{ \frac{(x_1 x_3)_\infty}{s_1 s_3} - \frac{(x_1 x_2)_\infty}{s_1 s_2} \right\} + (s_3 - 1) \left\{ \frac{(x_1 x_3)_\infty}{s_1 s_3} - \frac{(x_3 x_m)_\infty}{s_3 s_m} \right\} = \\ = \frac{(x_2 x_m)_\infty}{s_2 s_m} - \frac{(x_1 x_3)_\infty}{s_1 s_3}, \\ \dots$$

$$(x_1(x_1-1))_\infty + \dots + (x_m(x_m-1))_\infty + \dots + 2\Sigma(x_i x_j)_\infty = \\ = (a_1 + a_2 + \dots + a_m)(a_1 + a_2 + \dots + a_m - 1),$$

которая разрешается общими формулами

$$\frac{(x_i(x_i-1))_\infty}{s_i(s_i-1)} = \frac{(x_i x_j)_\infty}{s_i s_j} = p \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m - 1}{s_1 + s_2 + \dots + s_m - 1}.$$

На доказательстве, что эта система уравнений не допускает других решений, мы не станем останавливаться; но необходимо отметить, что все разности

$$(x_i(x_i-1))_n - (x_i(x_i-1))_\infty \text{ и } (x_i x_j)_n - (x_i x_j)_\infty$$

также должны разлагаться на слагаемые вида

$$A\xi^n,$$

где A и ξ не зависят от n и модуль ξ меньше единицы.

Для $y = \alpha_1 - np$ получаем простое уравнение

$$s_1(y)_{n+1} = s_1(y)_n + (x_1)_n - s_1 p,$$

на основании которого и вышесказанного о разности $(x_1)_n - (x_1)_\infty$ заключаем, что при беспредельном возрастании n количество $(y)_n$ должно стремиться к некоторому пределу $(y)_\infty$ и что разность $(y)_n - (y)_\infty$ разлагается на слагаемые того же типа $A\xi^n$.

Затем для произведений

$$(yx_1)_n, (yx_2)_n, \dots, (yx_m)_n$$

получаем следующие уравнения:

$$s_1 s_m (yx_1)_{n+1} = (s_1 - 1) s_m (yx_1)_n + s_1 (yx_m)_n + s_m (x_1(x_1-1))_n + \\ + (x_1 x_m)_n - p(s_1 - 1) s_m (x_1)_n - p s_1 (x_m)_n, \\ s_1 s_2 (yx_2)_{n+1} = (s_2 - 1) s_1 (yx_2)_n + s_2 (yx_1)_n + \\ + (s_2 - 1) (x_1 x_2)_n - p s_1 (s_2 - 1) (x_2)_n + (1 - p) s_2 (x_1)_n,$$

отношения $\frac{(y^2)_n}{n}$ при $n = \infty$

$$\left\{ \frac{(y^2)_n}{n} \right\}_{n=\infty} = pq \left\{ 1 - \frac{2 \sum s_i s_j}{(s_1 + s_2 + \dots + s_m)(s_1 + s_2 + \dots + s_m - 1)} \right\}.$$

В частности, при $m=2$ последняя формула вполне совпадает с найденной нами в вышеупомянутой статье

$$\text{пред. } \left\{ \frac{(y^2)_n}{n} \right\}_{n=\infty} = pq \left\{ 1 - \frac{2s_1 s_2}{(s_1 + s_2)(s_1 + s_2 - 1)} \right\}.$$

И по аналогии с прежними выводами, относящимися к частному случаю $m=2$, можем установить соответствующие предельные формулы для вероятности.

Для сообщения такому заключению полной строгости следовало бы рассмотреть и высшие степени y , но мы на этом не остановимся.

15 октября 1917 г.

П Р И Л О Ж Е Н И Я



БИОГРАФИЯ А. А. МАРКОВА

Мой отец, Андрей Андреевич Марков, родился 2 июня (ст. ст.) 1856 г. в Рязани. Он был сыном чиновника Андрея Григорьевича Маркова, служившего в Лесном департаменте в чине коллежского советника, а затем вышедшего в отставку и работавшего частным поверенным, или „ходатаем по делам“, как тогда называлась эта профессия. Отец Андрея Григорьевича, Григорий Маркович Марков, был сельским дьяконом где-то близ Рязани.¹

Отставка Андрея Григорьевича была связана с тем, что им были раскрыты злоупотребления вышестоящих служащих Лесного департамента. Чтобы скрыть следы своих проделок, влиятельные жулики заставили его подать в отставку.

Андрей Григорьевич был женат дважды. От первой жены, дочери чиновника, Надежды Петровны, он имел шестерых детей: Петра, Павла (умершего в детстве), Марию, Евгению, Андрея и Михаила; от второй жены, Анны Иосифовны, — трех: Владимира, Лидию и Екатерину.

Из братьев отца стал известным Владимир Андреевич (1871—1897). Он показал себя первоклассным математиком, но туберкулез свел его в могилу в возрасте 26 лет.

¹ В биографии отца, вошедшей в посмертное издание его книги „Исчисление вероятностей“ (М., 1924), ошибочно сообщается, что Андрей Григорьевич сам был сельским дьяконом. К сожалению, эта ошибка перешла и в некоторые другие биографии отца.

Сестра отца, Евгения Андреевна, была одной из первых русских женщин-врачей. По специальности психиатр, она долгие годы работала в различных больницах для душевнобольных. Умерла она в 1920 г.

Врачом является и ныне живущая в Ленинграде сестра отца Екатерина Андреевна (род. в 1875 г.). Сестра Лидия Андреевна была учительницей в средних школах. Она умерла в Ленинграде в начале 1942 г. Брат отца, Михаил Андреевич, умерший в глубокой старости незадолго до Великой Отечественной войны, был многие годы лесничим на Украине.

В начале 60-х годов прошлого века Андрей Григорьевич переселился с семьей в Петербург. По выходе в отставку он устроился управляющим имением Екатерины Александровны Вальватъевой. У нее было две дочери: Мария (1860—1942) и Елизавета.

Андрюша Марков был болезненным ребенком. Он страдал туберкулезом коленного сустава и ходил на костылях. Впрочем, он умел обходиться и без них, но тогда скакал на одной ноге, — другая была согнута в колене и не разгибалась. В этих способах передвижения он достиг, однако, большого совершенства и мог даже с успехом играть в горелки.

Когда Андрюше было 10 лет, ему сделали операцию. Известный хирург Кадэ разогнул ему ногу, и он получил возможность ходить нормально. Правда, он потом, всю жизнь, слегка прихрамывал, но это не помешало ему стать хорошим пешеходом, любителем дальних прогулок. „Будешь жив, пока на ходу“, — любил он цитировать слова одного врача, сказанные какому-то почтальону.

В 1866 г. Андрюшу отдали в Петербургскую 5-ю гимназию. Это „классическое“ учебное заведение с его казенщиной пришлось мальчику не по вкусу. На всю жизнь он сохранил мрачное воспоминание об этом месте, где его старались не столько учить, сколько муштровать и отуплять, чему в особенности способствовало преподавание древ-



А. А. Марков (1886).

них языков (латинского и греческого), построенное на зубрежке бесчисленных правил и исключений — всевозможных „много есть имен на *is — masculini generis*“, и т. п. По большинству предметов он учился плоховато и часто получал неудовлетворительные отметки. Исключение составлял только один предмет — математика, по которому Андрюша неизменно получал пятерки.

— Насчет дочерей Маши и Ени я спокоен, — говорил как-то Андрей Григорьевич, — они учатся хорошо. А вот с Андреем беда! Опять меня вызывали к директору. Ничем Андрей не хочет заниматься, кроме математики!

Андрей действительно был очень увлечен математикой еще в школьный период и изучал эту науку самостоятельно. Одно время ему казалось, что он изобрел новый метод интегрирования обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Об этом своем открытии он сообщил известным русским математикам того времени: Буняковскому, Золотареву и Коркину. Из них первый ничего не ответил на письмо гимназиста Маркова, а два других подробно и обстоятельно разъяснили ему, что этот способ в действительности не является новым. Так завязалось знакомство моего отца с профессорами Петербургского университета А. Н. Коркиным и Е. И. Золотаревым.

Андрей Григорьевич Марков, однако, ошибался, когда полагал, что его Андрей ничем кроме математики не интересуется. На самом деле он зачитывался статьями великих публицистов-шестидесятников — Чернышевского, Добролюбова, Писарева, под влиянием которых находилась тогда лучшая часть учащейся молодежи. В одном из своих школьных сочинений об „Евгении Онегине“ он трактовал это произведение в духе Писарева, за что удостоился следующей ремарки педагога: „Вы начитались борзописцев, отрицающих чувство прекрасного“.

Во время пребывания Андрея в выпускном классе произошел инцидент, едва не окончившийся исключением его из

школы. Как-то раз во время молитвы после учения он складывал книги в портфель. На его беду последний урок вел „немец“, усердно искавший повода для придирок. Он не столько молился сам, сколько следил за поведением учеников во время молитвы. „Вы нарушаете благоговейное чувство класса, — заявил он ему по окончании молитвы. — Я сообщу директору“. Когда товарищ Андрея, Капустин (впоследствии физик, профессор Петербургского университета), пытаясь заступиться за него, сказал преподавателю, что благоговейное чувство класса не было нарушено, рассвирепевший учитель закричал: „Вы никакой адвокат! Ступайте в карцер!“. Педагог пожаловался директору; директор вызвал Андрея Григорьевича Маркова и заявил ему, что не потерпит у себя в гимназии „атеистов и нигилистов“. История умалчивает о средствах, к которым пришлось прибегнуть Андрею Григорьевичу, чтобы утишить гнев директора — тройного ренегата, несколько раз менявшего религию и в конце концов остановившегося на православии.

В 1874 г. отец окончил гимназию и поступил в Петербургский университет. Там он слушал лекции Пафнутия Львовича Чебышева, влияние которого отразилось на всей его научной деятельности. Слушал он также профессоров А. Н. Коркина и Е. И. Золотарева, которые помимо лекций вели кружковые занятия с лучшими студентами. Он участвовал в этих занятиях, быстро решая трудные задачи, которые там ставились. По его собственному признанию, беседы с Коркиным послужили началом для многих его самостоятельных трудов.

31 мая 1878 г. он окончил Петербургский университет по математическому разряду физико-математического факультета со степенью кандидата. В том же году он был награжден золотой медалью за сочинение на предложенную факультетом тему „Об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей“ и был оставлен при Университете „для приготовления к профессорскому званию“.

В 1880 г. он защитил свою знаменитую магистерскую диссертацию „О бинарных квадратичных формах положительного определителя“, сразу выдвинувшую его в первые ряды русских математиков.

В 1881 г. он защитил докторскую диссертацию „О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей“.

В 1880 г. началась его преподавательская деятельность в Петербургском университете в качестве приват-доцента. В учебных 1880/81 и 1881/82 гг. он читал повторительный курс дифференциального и интегрального исчислений. В 1883 г. ему был передан курс „Введения в анализ“, до того читавшийся Ю. В. Сохоцким и К. А. Поссе. В том же году из Университета ушел Чебышев, и отец первый раз читал курс теории вероятностей. С учебного 1885/86 г. он читал этот курс непрерывно из года в год.

В 1883 г. он женился на Марии Ивановне Вальватъевой. Знакомство моих родителей началось еще в их детские годы. на даче Екатерины Александровны Вальватъевой. Потом, когда отец уже был студентом, а мать училась в гимназии и ей не давалась математика, Екатерина Александровна Вальватъева пригласила „сына управляющего“ в качестве учителя математики к своей дочери.

Вскоре он просил у Екатерины Александровны руки ее дочери. Он, однако, не сразу получил согласие. Бабушка долго колебалась, опасаясь выдать дочь за человека, по ее мнению, недостаточно обеспеченного, не имеющего определенного „места“. Лишь в 1883 г., когда отец был уже приват-доцентом, собирался защищать докторскую диссертацию и в перспективе намечалась профессура, Екатерина Александровна дала согласие, и свадьба состоялась.

13 декабря 1886 г., по предложению Чебышева, отец был избран адъюнктом Академии Наук, 3 марта 1890 г. — экстраординарным академиком, 2 марта 1896 — ординарным академиком. В 1886 г. он был назначен экстраординарным профессором Петербургского университета, а в 1893 г. — орди-

нарным. В 1905 г. отец вышел из Университета в отставку со званием заслуженного профессора, но курс теории вероятностей продолжал читать. Стремясь найти полезное практическое применение для этой своей основной научной специальности, он принимал деятельное участие в расчетах Эмеритальной кассы Министерства юстиции при ее основании и обзорах ее действий.

Значение работ отца для науки подробно освещено в статье настоящего сборника „Очерк работ А. А. Маркова по теории чисел и теории вероятностей“, и я не буду здесь касаться этого. Мне хочется осветить другие стороны его деятельности и рассказать о том, каким он был как человек и гражданин.

Это был человек открытый, прямой и смелый, никогда не изменявший своим убеждениям, всю жизнь яростно боровшийся со всем, что считал глупым и вредным. Его гражданское мужество было очень стойким: он не считался ни с лицами, против которых выступал, ни с последствиями, которые его выступления могли иметь для него самого. Когда ему возразили как-то на одно его предложение, что оно идет вразрез с „высочайшим постановлением“, он во всеуслышание сказал: „Я вам дело говорю, а вы мне — высочайшее постановление!“.

Вот несколько фактов и документов, характеризующих отца.

Как известно, 25 февраля 1902 г. на соединенном заседании Отделения русского языка и словесности и Разряда изящной словесности Академии Наук был избран почетным академиком А. М. Горький. 1 марта в „Правительственном вестнике“ об этом появилось официальное сообщение. Оно взбесило царя Николая II, который решил немедленно кассировать выборы. С этой целью царь через министра народного просвещения П. С. Ванновского потребовал от „августейшего“ президента Академии Наук вел. кн. Константина Константиновича Романова опубликования в том же „Пра-

вительственном вестнике“ объявления о кассации выборов от имени самой Академии Наук. Такое объявление и было опубликовано, правда сначала (10 марта) не от лица Академии Наук и лишь затем (12 марта), по новому настоянию Ванновского, от ее лица. В качестве мотива кассации в объявлении делалась ссылка на то, что Горький находится-де под гласным надзором полиции. На этот акт грубого произвола „самодержца“ и трепетавшего перед ним президента Академии Наук, действовавшего от лица Академии без ведома и согласия ее Общего собрания, отец реагировал следующим заявлением:

В Общее собрание Академии Наук.

Честь имею предложить Собранию настаивать, чтобы объявление о кассации выбора г. Пешкова в почетные академики было объявлено недействительным или исправлено, так как, во-первых, это объявление сделано от имени Академии, которая в действительности не кассировала выбора г. Пешкова, и, во-вторых, приведенный в объявлении мотив кассации лишен значения.

А. Марков.

6 апреля 1902 г.

Свое заявление он хотел прочесть на заседании Общего собрания Академии Наук, однако волей президента это не было допущено. Тогдашний неперемный секретарь Академии Н. Дубровин на заявлении наложил резолюцию: „Оставить под протокольными бумагами“. Это означало, что заявление не будет опубликовано в протоколах Академии Наук. Так прислужники царя старались тогда заглушить всякие публичные выступления ученых против царского произвола.

Отец предпринял тогда дальнейший шаг: 8 апреля 1902 г. он подал на имя президента прошение об отставке. Мне не известен текст этого прошения, и о самом его существовании известно лишь по другим документам. Президент, разумеется, постарался скрыть его от общественности. В связи с отставкой отец заявил также о том, что не будет прини-

мать дальнейшего участия в издании Академией Наук трудов Чебышева. Отставка его, однако, не была принята, и он возобновил свою работу по изданию трудов Чебышева, опасаясь, по всей вероятности, передавать это ответственное дело в другие руки.

В начале 1905 г. он возобновил свой протест против кассации выборов Горького. Он направил в Академию Наук следующее заявление:

В Общее собрание Академии Наук.

Желая верить и надеяться, что высочайший указ 12 декабря 1904 г., в котором признано неотложным „... принять действительные меры к охранению полной силы закона, ... дабы ненарушимое и одинаковое для всех исполнение его почиталось первейшею обязанностью всех подчиненных нам властей и мест...“, открывает новую для России эру законности, считаю своим долгом напомнить Общему собранию о беспримерном случае нарушения закона, касающемся почетного академика г. Пешкова, который до сих пор не внесен в академический список и лишен возможности пользоваться правами почетного академика.

Конечно, о кассации выбора г. Пешкова в почетные академики было объявлено в газетах, как будто, Академией Наук, но мы знаем, что это объявление ложно. Подобные объявления могут иметь силу только там, где царит неограниченный произвол, и падают сами собой с устранением последнего.

Поэтому я предлагаю внести имя г. Пешкова в список почетных академиков и пригласить его принять участие в жизни Академии согласно закону.

Академик А. Марков.

8 января 1905 г.

Это заявление также не было допущено к оглашению на основании §§ 97 и 98 устава Академии. Горький был приглашен на заседание Отделения русского языка и словесности и разряда изящной словесности лишь после февральской революции 1917 г.

В марте 1903 г. отец подал в Правление Академии Наук следующее заявление:

В Правление Академии Наук.

Ввиду присланного мне, по определению Правления, уведомления о порядке производства вычета за ордена, честь имею

покорнейше просить Правление принять во внимание, что я никаких орденов не прошу и не желаю получать.

А. Марков.

23 марта 1903 г.

Суть этого заявления состояла, конечно, не в том, что отец не хотел платить вычетов за ордена, взимавшихся тогда у орденосцев, — эти вычеты были весьма незначительными. Она состояла в его отказе от дальнейшего получения орденов от царского правительства и в его пренебрежительном отношении к орденам имевшимся. Он воспользовался первым представившимся поводом, чтобы заявить об этом.

Как известно, 3 июня 1907 г. царское правительство распустило негодную ему II Государственную думу и издало новый закон о выборах в III Государственную думу, нарушив тем самым свой манифест 17 октября 1905 г., согласно которому оно должно было издавать новые законы только с согласия Думы. В связи с этим отец обратился в Правление Академии Наук со следующей просьбой:

Правлению Академии Наук.

Просьба академика А. А. Маркова

Ввиду того, что созыв III Государственной думы соединен с нарушением закона и потому она будет не собранием народных представителей, а каким-то незаконным сборищем, честь имею покорнейше просить Правление не вносить мое имя в списки избирателей.

Академик А. Марков.

11 июня 1907 г.

Вильманstrand (Финляндия)

Имение Скинарилла.¹

На этом заявлении тогдашним непременным секретарем Академии Наук С. Ольденбургом была наложена резолюция: „Оставить без последствий“.

¹ В этом имении на берегу озера Сайма отец снимал дачу в 1907 и 1908 гг.

В 1908 г. Министерство народного просвещения издало в связи со студенческими волнениями циркуляр, в котором пыталось возложить на профессоров Университетов полицейские функции. В связи с этим отец подал в Министерство следующее заявление:

Его превосходительству господину министру
народного просвещения

Заявление Андрея Маркова

Ввиду известного циркуляра, который основан на разъяснении Сената и был мне предъявлен в канцелярии С.-Петербургского университета 25 сентября, считаю своим долгом сообщить вашему превосходительству, что я решительно отказываюсь быть в Университете агентом правительства, хотя согласно желанию Физико-математического факультета сохраняю за собой чтение лекций по теории вероятностей.

Академик А. Марков.

2 октября 1908 г.

В. О., 7 линия, 2.

На этом документе имеется резолюция министерства: „Возвратить заявление академику Маркову, как неподлежащее поданное“.

Как известно, „святейший“ Синод отлучил от православной церкви великого русского писателя — Л. Н. Толстого. Чтобы выявить всю смехотворность этой пахнувшей средневековьем акции, отец 12 февраля 1912 г. сам подал в Синод прошение об отлучении его от церкви.

Вот полный текст этого прошения.¹

Святейшему Правительствующему Синоду

Прошение

академика А. А. Маркова

Честь имею покорнейше просить Святейший Синод об отлучении меня от церкви.

Надеюсь, что достаточным основанием для отлучения может служить ссылка на мою книгу „Исчисление вероятностей“, где ясно выражено

¹ Архив АН СССР, Ф. 173, оп. 1, № 65.



А. А. Марков (1918).

мое отрицательное отношение к сказаниям, лежащим в основании еврейской и христианской религии.

Вот выдержка из этой книги (стр. 213—214): „Независимо от математических формул, на которых мы не остановимся, не придавая им большого значения, ясно, что к рассказам о невероятных событиях, будто бы происшедших в давно минувшее время, следует относиться с крайним сомнением. И мы никак не можем согласиться с акад. Буняковским, («Основания математической теории вероятностей», стр. 326), что необходимо выделить известный класс рассказов, сомневаться в которых он считает предосудительным.

„Чтобы не иметь дело с еще более строгими судьями и избежать обвинений в потрясении основ, мы не останавливаемся на этом предмете, не относящемся непосредственно к математике.“

Чтобы не оставалось никаких сомнений, о чем идет здесь речь, приведу соответствующую выписку из книги Буняковского: „Некоторые философы, в видах предосудительных, пытались применять формулы, относящиеся к ослаблению вероятности свидетельств и преданий, к верованиям религиозным и тем поколебать их“.

Если приведенной выдержки недостаточно, то покорнейше прошу принять во внимание, что я не усматриваю существенной разницы между иконами и идолами, которые, конечно, не боги, а их изображения, и не сочувствую всем религиям, которые подобно православию поддерживаются огнем и мечом и сами служат им.

Академик А. Марков.

12-го февраля 1912 года.

С.-Петербург, В. О., 7 линия, 2 (Академия Наук).

Это заявление отца уже невозможно было возвратить, как „неподлежащее поданное“. Оно вызвало страшный переполох в правительственном лагере. Черносотенные газеты подняли дикий вой. Петербургский митрополит прислал к отцу для „наставления и увещания“ „духовного пастыря“ — протоиерея Орнатского. Отец заявил, однако, протоиерею, что согласен разговаривать с ним лишь о математических вопросах, а это совсем не устраивало священнослужителя. Синоду пришлось удовлетворить прошение отца, в связи с чем производилось забавное расследование того, не был ли он сектантом, был ли он крещен, кем были его родители, и т. п.

В 1913 г. по указке правительства праздновался юбилей 300-летия дома Романовых. В противовес этому фальшивому, черносотенному юбилею отец организовал юбилей научный: 200-летие закона больших чисел.

В одном из своих писем к С. Ф. Ольденбургу Алексей Николаевич Крылов так пишет об этой борьбе отца с бывшим правительством „за правду“:

„Вы, конечно, помните его резкий протест, заявленный Академии по поводу исключения, по распоряжению министра Сипягина, Горького из Академии. Наверное вы помните также, что в первое же мартовское 1917 г. заседание Академии Наук Андрей Андреевич внес предложение, единогласно принятое, о включении вновь Горького в число почетных академиков. Сколько раз выступал Марков в университете с протестами против мероприятий бывшего правительства и полиции по отношению к университету и студентам, — одно время он даже был отставлен от должности профессора за эти выступления. Припомните его протест против Синода по поводу отлучения Толстого от церкви; ведь таких протестов, всегда заявлявшихся открыто и явно, не перечислить, и, конечно, самое имя и ученая слава Маркова придавали им силу и распространение, не способствовавшие упрочению бывшего правительства“.¹

Очень большое внимание уделял отец постановке преподавания математики в средней школе. Он энергично протестовал против различных вредных экспериментов в этой области. В частности, такие эксперименты пытался проводить профессор Московского университета П. А. Некрасов, черносотенец и мистик, стремившийся сделать из математики опору православию и самодержавию. В 1915 г. Некрасов, связанный с руководством Министерства народного просвещения и бывший попечителем одного учебного округа, выступил совместно с П. С. Флоровым с проектом введения теории вероятностей в курс средней школы. По существу этот проект сводился к внедрению в умы школьников путаных, лженаучных воззрений его авторов на теорию вероятностей, математическую статистику и математику вообще. По

¹ А. Н. Крылов, Собр. трудов, т. I, ч. 2, стр. 320.

инициативе отца, в Академии Наук была создана „Комиссия по обсуждению некоторых вопросов, касающихся преподавания математики в средней школе“, подвергшая проект уничтожающей критике.

Проект не был осуществлен, хотя некоторые опыты в этом направлении и делал Флоров в руководимом им Урюпинском реальном училище.

В учебном 1917/18 г. отец сам преподавал в средней школе. В сентябре 1917 г. он решил прямо с дачи (мы жили тогда на даче около города Старица в б. Тверской губ.) ехать в город Зарайск (б. Рязанской губ.), где жили тогда его родственники. Он испросил у Академии Наук командировку „для продолжения научных занятий, на год внутрь России“, и зиму 1917/18 г. мы провели в Зарайске. („Мы“ — это в данном случае мои родители, тетя моей матери, Серафима Александровна Москвина, и я). Мне пришлось перейти из 5-го класса Петроградской 8-й гимназии в 6-й класс Зарайского реального училища. Математику в 6-м классе преподавал директор училища Гильвег, старательный и педантичный. Он неукоснительно требовал на уроках геометрии, чтобы все чертежи делались тщательно: чтобы прямые проводились обязательно по линейке, окружности обязательно циркулем, и т. п. Неожиданно он вышел в отставку, и старшие классы остались без математики. Чтобы выручить училище, а быть может, и для удовлетворения своей постоянной потребности в педагогической деятельности (ведь он до этого 37 лет подряд преподавал в университете!) отец безвозмездно предложил свои услуги в качестве преподавателя математики. Это предложение было с благодарностью принято, и я стал таким образом официальным учеником отца.

Первый его урок несколько испугал и озадачил нас. Тут не было ничего похожего на внешнюю аккуратность его предшественника. Даже формулы писались отцом не очень в ранжир. Потом к „профессору“ (так называли отца его

юные ученики) стали привыкать, однако усвоенные от Гильвега навыки некоторое время мешали взаимному пониманию. Так, однажды отец, вызвав к доске на уроке геометрии одного из лучших учеников, пришел в ярость, когда тот, вместо изложения решения задачи, стал медленно делать на доске тщательный чертеж циркулем и линейкой. „У нас тут урок геометрии, а не черчения!“ — гневно крикнул отец.

Главный упор отец делал на решение задач. Для желающих усовершенствоваться в этом деле он вел дополнительные занятия во время каникул и по воскресеньям. Эти необязательные занятия охотно посещались многими учениками и принесли им пользу. За всю эту свою краткую, но интенсивную деятельность отец получил от педагогического совета Зарайского реального училища благодарственный адрес, до сих пор хранящийся у автора этих строк.

Осенью 1918 г. наше семейство вернулось в Петроград. Отца, всегда стремившегося отдать все свои силы на благо Родины, непреодолимо потянуло к любимой педагогической работе в университете, начавшей в это время налаживаться.

В Петрограде ему пришлось сделать глазную операцию. Он уже несколько лет страдал глаукомой — тяжелой глазной болезнью, проявлявшейся под старость у многих представителей нашего рода.

Глазная операция была сделана удачно доктором Выгодским. Зрение отца улучшилось, и он возобновил чтение лекций в Петроградском университете. Однако переезд из Зарайска в Петроград плохо отразился на общем состоянии здоровья отца. В 1920/21 учебном году я водил его на лекции под руку, чего раньше никогда не требовалось. Это были лекции по теории вероятностей, соответствовавшие его известной книге. Как один из слушателей, я могу засвидетельствовать, что они читались безукоризненно, несмотря на то, что лектор едва держался на ногах.

В этот же период отец напряженно работал над четвертым (вышедшим уже после его смерти) изданием своей книги

„Исчисление вероятностей“. Как известно, это издание значительно отличается от предыдущего.

Осенью 1921 г. отец слег в постель. У него была тяжелая форма радикулита с мучительными болями. Весной 1922 г. к этому присоединилась новая болезнь — аневризма, образовавшаяся в ноге. Начались кровотечения. Отцу, однако, к этому времени очень надоело лежать в постели. Он стал стремиться на воздух, на лоно природы. Лечивший его доктор разрешил переезд в находившийся в Детском Селе (ныне г. Пушкин) санаторий Комиссии по улучшению быта ученых. Вероятно, это было ошибкой, так как езда в машине подействовала на отца неблагоприятно. Кровотечения усилились, и главный врач санатория признал необходимым немедленное возвращение в Петроград для операции — удаления аневризмы. После операции отец чувствовал себя лучше, температура снизилась. Но через несколько дней появились угрожающие симптомы, резко повысилась температура. Консилиум врачей установил общее заражение крови и признал состояние отца безнадежным. 20 июля 1922 г. в 10 часов вечера отец скончался.

Он похоронен на Митрофаниевском кладбище в Ленинграде.

В 1923 г. в Академии Наук отмечалась годовщина со дня его смерти. С яркой речью об отце как ученом, человеке и гражданине выступил его друг, тогдашний вице-президент Академии Наук Владимир Андреевич Стеклов.

Прошло уже 30 лет со дня смерти Андрея Андреевича Маркова. Но Марков-ученый не умер и не умрет. Его идеи и результаты — знаменитые „марковские цепи“, доказательство закона больших чисел, теоремы о минимумах квадратичных форм и другие блестящие достижения — вошли в основной фонд науки и будут жить века.

А. Марков.

ОЧЕРК РАБОТ А. А. МАРКОВА ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Научное творчество академика Андрея Андреевича Маркова по своему стилю и духу относится к тому направлению в математике, начало которому было положено П. Л. Чебышевым и главные результаты в котором принадлежат ему и его ученикам — представителям знаменитой Петербургской математической школы. Будучи одним из виднейших учеников П. Л. Чебышева, А. А. Марков в значительной степени вдохновлялся идеями своего великого учителя.

Научные интересы Андрея Андреевича были широки и разнообразны. Ему принадлежит около 70 работ, относящихся к теории чисел, конструктивной теории функций, дифференциальным уравнениям, теории вероятностей, в том числе две классические книги „Исчисление конечных разностей“ и „Исчисление вероятностей“. В каждой из названных областей творчество А. А. Маркова оставило глубокие следы и до сих пор оказывает и долго еще будет оказывать большое влияние на исследования других ученых. В особенности им обогащены теория чисел и теория вероятностей.

Отличительной чертой работы Андрея Андреевича как представителя Петербургской математической школы является конкретность в выборе предмета исследования, соединенная с большой общностью постановок задач и доведением решения до числа и алгоритма. Вместе с тем исследуемые А. А.

Марковым вопросы всегда представляли большое научное значение. Например, его идеи о зависимых случайных величинах, лежащие в основе современной теории стохастических процессов, играют фундаментальную роль в новейших схемах физики и некоторых вопросах техники.

Для стиля работ Андрея Андреевича характерна ясность и четкость языка, тщательная отделка деталей и доведение результатов до возможности практических приложений. Его рассуждения и доказательства весьма эффективны и дают определенные оценки рассматриваемых величин.

Подобно некоторым другим крупным ученым А. А. Марков любил и умел вычислять. Непревзойденными образчиками его вычислений являются: таблица комплексных единиц чисто кубического поля, таблица неопределенных тройничных квадратичных форм, не представляющих нуль, для всех определителей $D \leq 50$, таблица значений интеграла Лапласа, вычисленных с 11 знаками после запятой.

Настоящий очерк научных трудов А. А. Маркова посвящен его работам в двух областях, представленных в этом сборнике: теории чисел и теории вероятностей.

1. Теория чисел

1. Работы А. А. Маркова в этой области относятся главным образом к теории неопределенных квадратичных форм, причем почти все они посвящены решению очень трудного вопроса — нахождению экстремальных неопределенных квадратичных форм данного определителя.

Для неопределенных двойничных квадратичных форм этот вопрос был впервые поставлен А. Н. Коркиным и Е. И. Золотаревым. В работе „*Sur les formes quadratiques*“ (1878) ими указаны две первые экстремальные формы положительного определителя, а также замечено существенное различие между точными верхними границами минимумов форм отрицательного и положительного определителей.

Для двойничных квадратичных форм отрицательного определителя D точной верхней границей минимумов является $\sqrt{\frac{4}{3}|D|}$, причем между двойничными квадратичными формами определителя D можно найти для всякого данного положительного числа l , меньшего $\frac{4}{3}$, такие формы, минимум которых равен $\sqrt{l|D|}$. Для двойничных квадратичных форм положительного определителя D картина совершенно иная. А именно, точной верхней границей минимумов здесь является $\sqrt{\frac{4}{5}D}$, минимум формы $\sqrt{\frac{4}{5}D}(x^2 - xy - x^2)$ определителя D ; если же исключить форму $\sqrt{\frac{4}{3}D}(x^2 - xy - y^2)$ и ей эквивалентные, то точной верхней границей будет уже $\sqrt{\frac{1}{2}D}$.

А. А. Марков в своей магистерской диссертации „О бинарных квадратичных формах положительного определителя“ (1880) показал, что числа $\frac{4}{5}$ и $\frac{1}{2}$ являются лишь первыми членами бесконечного убывающего ряда чисел

$$N_1, N_2, N_3, \dots, N_k, \dots,$$

обладающих следующими свойствами:

1) для каждого из этих чисел N_k существует класс неопределенных двойничных квадратичных форм определителя D , минимум которых равен $\sqrt{N_k D}$;

2) если значение неопределенной двойничной квадратичной формы определителя D не может быть сделано по абсолютной величине меньше $\sqrt{N_k D}$, то ее минимум равен одному из чисел

$$\sqrt{N_1 D}, \sqrt{N_2 D}, \sqrt{N_3 D}, \dots, \sqrt{N_k D};$$

3) предел N_k при $k \rightarrow \infty$ равен $\frac{4}{9}$.

Для предельного значения чисел N_k существует бесчисленное множество классов неопределенных двойничных квадратичных форм определителя D , минимум которых равен $\frac{2}{3} \sqrt{D}$.

Кроме того, в своей диссертации А. А. Марков находит замечательную связь чисел N_k с решениями неопределенного уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

Как доказывает А. А. Марков, любое число N_k может быть представлено в виде

$$\frac{1}{\frac{9}{4} - \frac{1}{m^2}},$$

где m — целое число, причем для чисел m можно подобрать бесчисленное множество пар целых чисел n и p , таких, что

$$m^2 + n^2 + p^2 = 3mnp,$$

и обратно, если целые числа m, n, p удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz,$$

тогда среди чисел N_k содержатся числа

$$\frac{1}{\frac{9}{4} - \frac{1}{m^2}}, \quad \frac{1}{\frac{9}{4} - \frac{1}{n^2}}, \quad \frac{1}{\frac{9}{4} - \frac{1}{p^2}}.$$

Введенные А. А. Марковым непрерывные дроби позволяют находить все решения уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ в целых числах x, y, z , не превосходящих заданного предела.

Отметим основные идеи диссертации. В начале ее Андрей Андреевич излагает теорию приведения неопределенных

двойничных квадратичных форм. Выясняется, что нахождение форм, минимум которых равен $\sqrt{lD}$, сводится к нахождению рядов

$$\dots \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \quad J$$

таких, что для любого μ должно быть выполнено неравенство

$$\alpha_\mu + \frac{1}{\alpha_{\mu+1} + \frac{1}{\alpha_{\mu+2} + \dots}} + \frac{1}{\alpha_{\mu-1} + \frac{1}{\alpha_{\mu-2} + \dots}} = \frac{2}{L_\mu} \leq \frac{2}{l}.$$

Далее исследуются ряды J при $L_\mu \geq \frac{2}{3}$ и доказывается, что они могут состоять только из единиц и двоек.

Исследуется структура рядов J и обнаруживается их периодичность.

Далее вводятся некоторые непрерывные дроби, соответствующие периодам неполных частных рядов J . Устанавливается связь между знаменателями этих дробей и решениями неопределенного уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ в целых числах.

Эта работа А. А. Маркова положила начало новой области экстремальных задач в теории диофантовых приближений.

2. Дав полную картину распределения минимумов для неопределенных двойничных квадратичных форм (по крайней мере для $L_\mu \geq \frac{2}{3}$), Андрей Андреевич рассматривает аналогичный вопрос для неопределенных квадратичных форм с тремя и четырьмя переменными.

В 1901 г. в работе „О неопределенных тройничных квадратичных формах“ он дает первые две экстремальные формы и приводит без доказательства третью экстремальную форму; доказательство экстремальности последней было проведено

в его работе „Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies“ (1903). В 1909 г. А. А. Марков снова возвращается к этому вопросу и в работе „Table des formes quadratiques ternaires indéfinies ne représentant pas zéro, pour tous les déterminants positifs $D \leq 50$ “ приводит (без доказательства) четвертую экстремальную форму. Там же он особо отмечает две формы, которые, как это выяснилось из работы проф. Б. А. Венкова (1945),¹ являются шестой и седьмой экстремальными формами.

Для случая четырех переменных А. А. Марков в работе „О неопределенных квадратичных формах с четырьмя переменными“ (1902) устанавливает первые две экстремальные формы.

3. Несколько в стороне от этого основного направления в теории чисел — исследование минимумов квадратичных форм — стоят работы Андрея Андреевича: „Доказательство трансцендентности чисел e и π “ (1883) и „Sur les nombres entiers dépendants d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire“ (1892).

В первой из них А. А. Марков, используя метод Эрмита и Линдемманна, дает сравнительно простое и отчетливо выделяющее основные идеи доказательство трансцендентности констант e и π .

Во второй работе Андрей Андреевич изучает арифметику чисто кубических полей, т. е. полей, образованных $\sqrt[3]{A}$, где A — целое рациональное число.

Здесь им дается исчерпывающий результат относительно разложимости целых рациональных чисел на идеальные множители в поле $(\sqrt[3]{A})$. К работе приложена таблица кубических единиц для всех $A \leq 70$.

¹ Б. А. Венков. Об экстремальной проблеме Маркова для неопределенных тройничных квадратичных форм. Изв. АН СССР, серия матем., № 9, 1945.

II. Теория вероятностей

1. Работы А. А. Маркова по теории вероятностей относятся главным образом к центральной предельной теореме для сумм независимых величин, к предельным теоремам для зависимых величин, в том числе связанных по введенной им схеме цепи, к урновым схемам и к вопросам математической статистики, куда, в частности, входит обоснование им способа наименьших квадратов.

2. Вопросы, связанные с теоремой, которая теперь называется центральной предельной теоремой для случая независимых слагаемых, занимают А. А. Маркова в течение десятка лет — с 1898 по 1908 г. Последовательно преодолевая значительные трудности и не считаясь со сложностью вычислений, он в эти годы применяет метод моментов П. Л. Чебышева к изучению распределения суммы независимых слагаемых и показывает, что этим методом можно получить результаты почти исчерпывающей общности.

В начале указанного периода деятельности Андрей Андреевич изучает лишь суммы таких независимых слагаемых, для которых существуют любые моменты, а в конце этого периода находит способ избавиться от этого отягочающего предположения и тем придать выводам нужную общность.

В письме к А. В. Васильеву от 23 сентября 1898 г. А. А. Марков рассматривает сумму независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ таких, что $M(X_i) = 0$ и для всякого целого k существует k -тый момент $M(X_n^k)$, и он ограничен по абсолютной величине числом C_k , зависящим, вообще говоря, от k , но не от n .

Пусть $Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$. А. А. Марков доказывает, что при $n \rightarrow \infty$

$$M(Y_n^m) - A_m \{M(Y_n^2)\}^{\frac{m}{2}} \rightarrow 0, \quad (1)$$

где

$$A_m = \frac{2^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^m e^{-t^2} dt.$$

Подобный вопрос рассматривался еще в мемуаре П. Л. Чебышева „О двух теоремах относительно вероятностей“, однако в формулировках и доказательствах имеется пробел, которого нет у А. А. Маркова.

Доказательство (1) основано на простых свойствах обобщенной формулы бинома Ньютона и математических ожиданий. Это доказательство сохраняет свое значение как составная часть во всех работах А. А. Маркова, касающихся центральной предельной теоремы для независимых величин, соответствующие видоизменения которого применяются им в последующих работах о величинах зависимых по схеме цепи и другим схемам.

3. Дальнейшие работы Андрея Андреевича завершаются достижением успеха в двух направлениях:

1) построение аппарата, дающего возможность находить из соотношений типа (1), касающихся предельного поведения математического ожидания различных целых степеней суммы, предельное распределение вероятностей нормированной суммы.

Этот аппарат основывается на аналитической теории непрерывных дробей и относящихся к ним „неравенствах Чебышева“;

2) освобождение от ограничений, связанных с существованием и равномерной ограниченностью моментов высоких степеней. Оно проводится с помощью „срезанных“ случайных величин.

Неравенствами Чебышева в теории непрерывных дробей А. А. Марков занимался еще в 1883 г., а подробное применение их к проблеме моментов с теоретико-вероятностными приложениями дано им впоследствии. Эти исследования не

относятся непосредственно к теории вероятностей, но их удобно формулировать в теоретико-вероятностной терминологии.

4. По существу, рассматриваются два различных случая: величин, имеющих дискретное распределение, и величин, имеющих непрерывную плотность вероятности. Рассмотрение общего случая вывело бы доказательство из рамок классического анализа XIX в., которых оно придерживается.

В случае дискретного распределения рассматривается последовательность случайных величин X , для которых существуют все моменты целых степеней

$$\sum_x p x^k.$$

Далее рассматривается разложение суммы $\sum_x \frac{p}{z-x}$ в формальную непрерывную дробь для каждой из случайных величин последовательности и устанавливаются свойства $m-X$ подходящих дробей $\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)}$. Знаменатель имеет простые реальные корни ξ , и получается разложение подходящих дробей на простейшие:

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)} = \sum_{\xi} \frac{p}{z-\xi},$$

и равенство, годное для любого полинома $\Omega(z)$ степени $\leq 2m-1$:

$$\sum_{\xi} p \Omega(\xi) = \sum_x p \Omega(x).$$

Из него с помощью весьма тонких соображений выводятся следующие неравенства Чебышева:

если α лежит между двумя смежными корнями ξ' и ξ''

полинома $\omega_m(z)$, то

$$\sum_{\xi < \xi'} \rho \leq \sum_{x \leq \alpha} p \leq \sum_{\xi \leq \xi''} \rho; \quad (2)$$

если вместо дискретного распределения рассматривается распределение с непрерывной плотностью $f(x)$, то вместо

$\sum_x \frac{p}{z-x}$ надлежит рассматривать формальный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{z-x} dx$; тогда получается

$$\sum_{\xi < \xi'} \rho \leq \int_{-\infty}^{\alpha} f(x) dx \leq \sum_{\xi \leq \xi''} \rho. \quad (3)$$

В частности, можно рассматривать таким образом формальное разложение $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{dz}{z-x}$, и для него получим

$$\sum_{\bar{\xi} < \bar{\xi}'} \bar{\rho} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2} dx \leq \sum_{\bar{\xi} \leq \bar{\xi}''} \bar{\rho}, \quad (4)$$

где через $\bar{\rho}$ и $\bar{\xi}$ обозначены соответствующие коэффициенты и корни. Если m неограниченно возрастает, то коэффициенты ρ или $\bar{\rho}$ становятся сколь угодно малыми.

Если теперь в последовательности случайных величин выполняются для каждого целого k соотношения

$$\sum_x p x^k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^k dx,$$

при X , пробегающем последовательность, то из конструкции легко усмотреть, что при фиксированном m будем иметь

$$\sum_{\xi < \xi'} \rho \rightarrow \sum_{\bar{\xi} < \bar{\xi}'} \bar{\rho}; \quad \sum_{\xi \leq \xi''} \rho \rightarrow \sum_{\bar{\xi} \leq \bar{\xi}''} \bar{\rho}.$$

Различие кратных сумм в (3) и (4) состоит лишь в коэффициентах ρ или $\bar{\rho}$ для корней ξ' , ξ'' или $\bar{\xi}'$, $\bar{\xi}''$, и так как ρ и $\bar{\rho} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то этим доказывается основное соотношение

$$\sum_{x \leq \alpha} \rho \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt,$$

когда X пробегает последовательность.

5. Это давало полное доказательство предельной теоремы для случая, рассмотренного А. А. Марковым в 1898 г., когда предполагались существование и равномерная ограниченность всех моментов и ограниченность снизу отношения дисперсии суммы к числу слагаемых.

Такая теорема имела меньшую общность, чем центральная теорема А. М. Ляпунова, но зато метод доказательства позволял вывести соотношения о зависимости приближения распределений от приближения моментов, которые центральная предельная теорема не дает.

Фундаментальные работы А. М. Ляпунова появились в 1900 и 1901 гг. В них автор пользуется методом характеристических функций и не использует метода моментов Чебышева—Маркова.

Для независимых случайных величин $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ с

$$M(Z_k) = a_k, \quad D(Z_k) = b_k$$

предполагается еще существование

$$b_k^{(2+\delta)} = M\{|Z_k - a_k|^{2+\delta}\},$$

где $\delta > 0$ — какая-либо константа. Для выполнения предельной теоремы требуется лишь условие:

$$\frac{\sum_{k=1}^n b_k^{(2+\delta)}}{\left(\sum_{k=1}^n b_k\right)^{1+\frac{\delta}{2}}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Последующие исследования показали, что здесь достигается почти исчерпывающая общность.

Как указывает А. А. Марков в работе „Теорема о пределе вероятности для случаев академика А. М. Ляпунова“, „общность выводов в последней работе А. М. Ляпунова далеко превзошла ту, которая была достигнута методом математических ожиданий. Достигнуть столь общих выводов методом математических ожиданий казалось даже невозможным, ибо он основан на рассмотрении таких математических ожиданий, в неограниченном числе, существование которых в случаях А. М. Ляпунова не предполагается“.¹

В течение около 8 лет — с 1900 по 1908 г. — А. А. Марков работал над таким приложением метода моментов, которое дало бы возможность доказать предельную теорему в условиях А. М. Ляпунова. В 1908 г. он достиг успеха. Основной идеей нового приложения метода моментов было введение, наряду с основными величинами $Z_k - a_k$, вспомогательных „срезанных“ случайных величин

$$X_k = Z_k - a_k \quad \text{при} \quad |Z_k - a_k| < N$$

и

$$X_k = 0 \quad \text{при} \quad |Z_k - a_k| \geq N.$$

Такие величины имеют уже любые моменты, а распределение суммы их при подходящем выборе числа N мало отличается от распределения исходной суммы. Эта идея Андрея Андреевича и по сие время с успехом применяется в теоретико-вероятностных исследованиях.

6. Выяснению условий приложимости предельной теоремы для суммы случайных величин А. А. Марков придавал большое значение; еще в 1898 г. в письмах к А. В. Васильеву он строит примеры сумм независимых случайных величин, не приближающихся к нормальному распределению ввиду

¹ Стр. 322 наст. сборника.

сравнительной медленности роста дисперсии суммы; в этих же письмах он критикует взгляды А. Пуанкаре на обоснование приложимости нормального закона в теории ошибок наблюдений.

В работе „Теорема о пределе вероятности для случаев академика А. М. Ляпунова“ А. А. Марков приводит примеры сумм, не приближающихся к нормальному распределению ввиду нарушения условий, которые в современной терминологии называются условиями Линдеберга—Феллера.

Заметим еще, что Андрей Андреевич занимался, хотя и не решил его до конца, вопросом распространения предельной теоремы для сумм независимых двумерных векторов. В работе 1915 г. „Применение способа математических ожиданий к связанным рядам величин“ он изучает суммы

$$S_n = (s_{n1}, s_{n2}) = \sum_{i=1}^n (x_i, y_i) \text{ одинаково распределенных неза-}$$

висимых случайных векторов (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots$ и доказывает, что смешанные моменты всех порядков величин s_{n1}, s_{n2} при надлежащей нормировке стремятся к соответствующим смешанным моментам двумерного нормального распределения. Первое строгое доказательство двумерной предельной теоремы принадлежит С. Н. Бернштейну (Усп. матем. наук, вып. X, 1944).

7. А. А. Маркова следует считать основателем очень важного и большого отдела современной теории вероятностей, посвященного изучению зависимых случайных величин. Основные вопросы, интересовавшие его здесь, относятся к закону больших чисел и центральной предельной теореме

$$\text{для сумм } S_n = \sum_{i=1}^n X_i \text{ зависимых величин } X_i.$$

8. В работе „Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга“ (1907) указывается несколько достаточных условий, когда к суммам S_n зависимых

величин X_i закон больших чисел применим. Эти условия получаются как следствие применимости закона больших чисел

к $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, каковы бы ни были величины X_i , обладающие вторыми моментами, лишь бы только

$$\frac{D(S_n)}{n^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $D(S_n)$ — дисперсия S_n .

Самая возможность существования достаточно общих условий, при которых закон больших чисел оказывается при-

менимым к суммам зависимых величин $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, повиди-

мому, не была до появления рассматриваемой работы вполне ясной, и А. А. Марков счел нужным в конце своей работы специально подчеркнуть, что „... независимость величин не составляет необходимого условия для существования закона больших чисел“.¹

В § 1 этой работы доказывается, что закон больших чисел применим к $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, если дисперсии $D(X_i)$, $i = 1, 2, \dots$

ограничены и связь величин X_i такова, что увеличение значения, принимаемого одной из этих величин, влечет за собой уменьшение математического ожидания любой другой из них. В конце § 1 указывается, что закон больших чисел остается применимым также и в том случае, когда математическое ожидание $M(X_i)$ каждой величины X_i убывает с увеличением

значения суммы $\sum_{k=1}^{i-1} X_k$.

¹ Стр. 361 наст. сборника.

В качестве следующего примера зависимых величин, подчиняющихся закону больших чисел, рассматривается последовательность случайных величин

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots,$$

связанных, по современной терминологии, в простую и однородную цепь Маркова, причем предполагается, что каждая из величин X_i принимает только одно из двух значений: 0 или 1. Такого рода последовательности зависимых величин (или зависимых испытаний), названные позднее самим Андреем Андреевичем цепями, вводятся им впервые именно в этой работе, хотя само наименование цепь здесь еще не употребляется. По существу говоря, вывод о применимости

закона больших чисел к $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ в рассматриваемом слу-

чае получен как следствие эргодического свойства простой и однородной цепи с двумя возможными состояниями, всегда имеющего место, если вероятности перехода отличны от 0 и 1.

В § 4 приведен пример неприменимости закона больших чисел для зависимых ограниченных величин X_i . Сущность этого примера состоит в том, что закон больших чисел не

применим к $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, если величины X_i ограничены,

$|X_i| < L$ при всех i и $D(S_n) > cn^2$, где постоянная $c > 0$.

Наконец, в конце работы речь идет о величинах, связанных в простую и однородную цепь, но число возможных значений величин X_i уже не ограничено двумя. Закон боль-

ших чисел для $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ и в этом случае получен опять-таки

как следствие эргодического свойства рассматриваемой цепи.

9. В том же 1907 г. А. А. Марков публикует в „Известиях Академии Наук“ работу „Исследование замечательного случая зависимых испытаний“, где доказывает применимость

центральной предельной теоремы к суммам $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ случайных величин X_i , связанных в простую однородную цепь, принимающих только два возможных значения 0 и 1 и вероятности перехода для которой отличны от 0 и 1.

Андрей Андреевич отмечает, что этот случай доставляет пример, и, насколько известно, первый пример применимости предельной теоремы к суммам зависимых величин. Доказательство результата получено с помощью метода моментов, причем оно основано на симметрии некоторых выражений относительно p и q , где p и q суть, соответственно, вероятности равенств

$$X_i = 1 \quad \text{и} \quad X_i = 0.$$

Указанная симметрия, обусловленная особенностью разбираемого случая, состоящего в том, что X_i имеет только два возможных значения, не может быть использована при других предположениях о числе возможных значений $m > 2$ величин X_i .

10. Разбору этих более общих случаев посвящена работа 1908 г. „Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь“. Здесь А. А. Марков сначала особенно тщательно изучает гипотезу, что величины X_i , образующие простую однородную цепь, имеют только три возможных значения: -1 , 0 , $+1$, и таким образом видоизменяет метод доказательства, использованный в предыдущей работе, что он становится применимым к большому числу новых случаев зависимых величин X_i , рассматриваемых друг за другом в ряде последующих работ Андрея Андреевича.

Интересно обратить внимание на то, что в этой работе А. А. Марков при вычислении моментов сумм $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, по существу говоря, вводит характеристические функции

$$\psi_n(\xi) = M e^{i\xi(S_n - an)}$$

величин $S_n - an$, где постоянная a определена из условия, что математическое ожидание $M(S_n - an)$ остается по абсолютному значению ограниченным при $n \rightarrow \infty$. Действительно, сначала строится функция

$$\frac{f(t, z)}{F(t, z)} = \sum_n \Phi_n(t) z^n, \quad (5)$$

представляющая собою производящую функцию функций

$$\Phi_n(t) = \sum_m P\{S_n = m\} t^m,$$

которые, в свою очередь, являются производящими функциями вероятностей $P\{S_n = m\}$ равенств $S_n = m$. Затем делается замена переменных

$$t = e^u \quad z = z_1 e^{-au},$$

которая превращает функцию (5) в производящую функцию характеристических функций $\psi_n(\xi)$ при мнимом значении аргумента $\xi = -iu'_1$

$$\frac{f(e^u, z_1 e^{-au})}{F(e^u, z_1 e^{-au})} = \sum_n \Phi_n(e^u) (z_1 e^{-au})^n = \sum_n \psi_n(-iu) z_1^n,$$

так как

$$\psi_n(-iu) = \sum_m e^{u(m-an)} P\{S_n = m\} = e^{-aun} \Phi_n(e^u).$$

Прием введения характеристических функций $\psi_n(\xi)$ был в последующем подробно разработан В. И. Романовским, изучавшим с его помощью как случай собственно цепей Маркова, так и различного рода их обобщения; изложение метода и сводка результатов даны в его книге „Дискретные цепи Маркова“ (1949).

В конце рассматриваемой работы А. А. Марков распространяет свой результат о применимости предельной теоремы

к суммам $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ на более общий случай, когда связанные в цепь величины X_i имеют произвольные возможные значения $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

11. Тот же метод, как уже было отмечено, применяется Андреем Андреевичем и в некоторых других работах. В статье 1911 г. „Об одном случае испытаний, связанных в сложную цепь“ рассматривается следующая вероятностная схема. Пусть некоторая система S принимает в зависимости от случая одно из своих возможных состояний

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k,$$

смена которых происходит в дискретно расположенные моменты времени

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$$

Пусть вероятность оказаться этой системе в момент времени t_n в состоянии ϵ_i зависит не только от ее состояния в непосредственно предшествующий момент времени t_{n-1} , как это имеет место в случае простой цепи, но зависит от всех ее состояний за определенное число m предшествующих моментов времени

$$t_{n-m}, t_{n-m+1}, \dots, t_{n-1}$$

и не зависит от n и от ее состояний в моменты t_l , $l < n - m$.

Если каждому моменту t_n относится случайная величина X_n , принимающая значение x_i , когда система находится в состоянии ϵ_i , то последовательность величин

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$$

связана, по определению, в сложную (однородную) цепь.

Задача, привлекавшая внимание А. А. Маркова в этой работе, состоит в изучении сумм $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ такого рода величин, при частных предположениях, состоящих в том, что $m=2$ и каждая из величин X_i имеет только два возможных значения: 0 и 1. Андрей Андреевич доказывает, что к суммам S_n применима при некоторых ограничениях, накладываемых на вероятности перехода, центральная предельная теорема, причем отмечает важное обстоятельство, отличающее случай сложной цепи от простой: дисперсия предельного распределения для сложной цепи может оказаться в точности такой же, какая должна быть для соответствующего ряда независимых величин.

Это показывает, между прочим, что, располагая данными о предельном нормальном распределении $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, нельзя решить, будут ли величины X_i вполне независимыми, или определенным образом связанными в сложную цепь.

12. В работе „О связанных величинах, не образующих настоящей цепи“ (1911), А. А. Марков решает своим методом задачу, изучавшуюся с иной точки зрения Брунсом (1906). Речь идет о величинах

$$X_n = W_n W_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

представляющих собою произведения двух смежных членов W_n и W_{n+1} последовательности

$$W_1, W_2, \dots, W_n, \dots \quad (6)$$

независимых случайных величин W_n , принимающих только значения 1 или 0 с вероятностями, соответственно, α и β , $\alpha + \beta = 1$. Эта последовательность зависимых величин

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots \quad (7)$$

представляет собою простейший случай, как теперь говорят, цепи Маркова—Брунса.

Ряд зависимых величин (7) отличается тем свойством, что зависимыми оказываются только рядом стоящие члены X_i и X_{i+1} . Если $|i-j| > 1$, то величины X_i и X_j независимы.

Это служит А. А. Маркову поводом рассматривать более общий случай произвольно распределенных, ограниченных величин X_n , $n=1, 2, \dots$, каждые две из которых, X_i и X_j , могут быть произвольно связанными друг с другом только при $|i-j| \leq c$, где c — некоторое постоянное число. Если же $|i-j| > c$, то X_i и X_j предполагаются независимыми. С помощью метода моментов Андрей Андреевич доказывает, что

к $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ применима центральная предельная теорема,

если потребовать еще, чтобы

$$B_n = D(S_n) > an,$$

где постоянная $a > 0$.

Существенное развитие такой постановке вопроса дал С. Н. Бернштейн в работе „Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин“ (Усп. матем. наук, вып. X, 1944). Используя метод характеристических функций, автор для широкого класса случаев доказывает применимость центральной предельной теоремы

к $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, где любые величины могут быть связанными,

лишь бы только влияние одних величин X_i на другие X_j было, в известном смысле, достаточно слабым, если расстояние между величинами $|i-j|$ велико.

Возвращаясь к рассматриваемой работе А. А. Маркова, отметим, что в конце ее он дает некоторое обобщение простейшего случая исследованных сначала величин Брунса, а именно допускает, что величины W_n (6) не являются независимыми, а образуют простую однородную цепь.

13. Работа А. А. Маркова „Об испытаниях, связанных в цепь не наблюдаемыми событиями“ (1912) посвящена вопросу, относящемуся, по современной терминологии, к цепям векторов.

Рассмотрим некоторую систему S с возможными состояниями $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$, и пусть процесс изменения состояний этой системы, смена которых происходит в дискретно расположенные моменты времени

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots,$$

представляет собой простую однородную цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей $\|P_{ij}\|_{i,j=\overline{1,k}}$. Отнесем к моментам времени t_n , $n=1, 2, \dots$ случайные векторы

$$X_n = (x_{n1}, \dots, x_{nh}), \quad n=1, 2, \dots$$

из эвклидова h -мерного пространства E_h , каждый из которых имеет одни и те же возможные значения

$$\Xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_h^{(i)}), \quad i=1, 2, \dots, k,$$

причем будем считать, что вектор X_n имеет значение $\Xi^{(i)}$, если система S оказалась в момент времени t_n в состоянии ϵ_i .

Определенная таким образом последовательность связанных векторов

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$$

образует цепь векторов.

Вероятностная схема, изучаемая А. А. Марковым, может рассматриваться как частный случай цепи векторов из эвклидова пространства E_2 .

События A, B, C в комбинации с событиями E и F , рассматриваемые А. А. Марковым, образуют шесть возможных состояний:

$$AE, BE, CE, AF, BF \text{ и } CF.$$

Пусть векторы $X_n = (x_{n1}, x_{n2})$, принадлежащие E_2 , имеют, соответственно, следующие возможные значения:

$$(\xi^{(1)}, 1), (\xi^{(2)}, 1), (\xi^{(3)}, 1), (\xi^{(1)}, 0), (\xi^{(2)}, 0) \text{ и } (\xi^{(3)}, 0),$$

где $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ и $\xi^{(3)}$ — произвольные числа. Задача, решаемая А. А. Марковым, состоящая в исследовании предельного распределения числа появлений события E за n испытаний, когда $n \rightarrow \infty$, превращается, таким образом, в задачу исследования предельного распределения суммы случайных величин

$$s_{n2} = \sum_{i=1}^n x_{i2}.$$

Различие в постановке отдельных задач,

разбираемых А. А. Марковым, сводится к различным предположениям о матрице вероятностей перехода $\|P_{ij}\|_{i,j=\overline{1,k}}$. Решение их Андрей Андреевич получает с помощью своего метода, подробно изложенного в работе „Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь“.

14. Во всех работах, о которых шла речь, А. А. Марков занимался однородными цепями. В работе 1910 г. „Исследование общего случая испытаний, связанных в цепь“ ставится задача изучения предельного распределения суммы

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

величин X_i , образующих неоднородную цепь.

Предполагается, что величины X_i могут принимать только значение 1 или 0 с переходными вероятностями

$$p'_i = P\{X_i = 1 | X_{i-1} = 1\}, \quad p''_i = P\{X_i = 1 | X_{i-1} = 0\}.$$

Доказывается, что центральная предельная теорема применима к S_n , если

$$p_0 < p'_i < 1 - p_0, \quad p_0 < p''_i < 1 - p_0,$$

где p_0 — некоторое положительное постоянное число. Доказательство этого результата снова проводится методом

моментов, но вычисление самих моментов выполняется совсем не так, как это делалось в работах, посвященных однородным цепям. Скорее можно сблизить способ вычисления моментов в этой работе с тем способом, который был применен А. А. Марковым для независимых величин. Он состоит в разложении подлежащего вычислению математического ожидания с помощью формулы Ньютона для степени многочлена на отдельные суммы и выделении из них главных членов. В ходе своего рассуждения Андрей Андреевич использует неравенство

$$D(S_n) > cn, \quad c > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

которое, как выясняется весьма остроумными соображениями в конце работы, всегда имеет место, если введенное выше постоянное число p_0 строго больше нуля. Для распространения в последующем предельной теоремы на более общие неоднородные цепи, когда число возможных значений величин не ограничивается двумя, пришлось прежде всего соответствующим образом обобщить неравенство (8). Это сделано С. Н. Бернштейном в 1936 г.

В связи с рассматриваемой работой Андрея Андреевича отметим, что С. Н. Бернштейну принадлежит другой метод доказательства предельных теорем для неоднородных цепей, с помощью которого удалось существенно обобщить результаты А. А. Маркова. Этот метод применим также и для более общих видов зависимых величин, и подробно изложен в уже упоминавшейся работе „Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин“.

15. Свои общие результаты А. А. Марков чаще всего иллюстрирует на случайных величинах, конструируемых с помощью урновых схем, т. е. с помощью вероятностных схем, реализуемых тем или иным числом урн, содержащих шары различных цветов, которые служат для производства испытаний. Под этим понимается извлечение из урн на удачу

одного или нескольких шаров, производимое по точно предписанным заранее правилам. Задача состоит в исследовании предельного распределения при $n \rightarrow \infty$ числа шаров определенного цвета, появляющихся за n испытаний. Вообще такого рода урновые схемы привлекали внимание А. А. Маркова не только для иллюстраций, но и служили самостоятельным предметом его исследований.

16. После А. А. Маркова многие ученые занимались продолжением и развитием его идей, относящихся к цепям. В особенности подробно, естественно, изучались однородные цепи. Новые важные идеи в этой области внесены Московской школой теории вероятностей. С. Н. Бернштейн и его ученики в Ленинграде продолжали дальнейшее развитие теории неоднородных цепей.

Отметим также, что в особенности важным представляется то дальнейшее развитие идеи А. А. Маркова о величинах, связанных в цепь, которое содержится в теории стохастических процессов марковского типа А. Н. Колмогорова и теории стохастических дифференциальных уравнений С. Н. Бернштейна.

17. Важное место в творчестве Андрея Андреевича занимают идеи, относящиеся к математической статистике. Сюда относятся вопросы обоснования метода наименьших квадратов, разбираемые им в упоминавшихся уже письмах к А. В. Васильеву в 1898 г. и в курсе „Исчисление вероятностей“, а также его исследования о коэффициенте дисперсии.

В своем обосновании метода наименьших квадратов, А. А. Марков, по существу, вводит новые важные понятия, эквивалентные применяющимся теперь понятиям несмещенной и эффективной статистик, для оценки постоянных параметров законов распределения на основании выборки.

Эти понятия вводятся в терминах наблюдений или измерений с погрешностями, употребительных в методе наименьших квадратов. При обосновании этого метода Андрей Андреевич исходит из следующих трех положений:

„1) Мы рассматриваем только такие приближенные равенства, которые, по нашим предположениям, не содержат постоянной погрешности; 2) каждому приближенному равенству мы приписываем определенный вес, причем веса различных приближенных равенств мы считаем обратно пропорциональными математическим ожиданиям квадратов погрешностей; 3) достоинство каждого приближенного равенства мы оцениваем его весом и соответственно этому для каждого неизвестного отыскиваем такое приближенное равенство, вес которого наибольший“.¹

В простейшем случае измерения одной величины a , когда имеются результаты независимых равноточных измерений

$$X_1, X_2, \dots, X_n,$$

причем относительно закона распределения погрешностей $\Delta = X - a$ не делается никаких предположений, кроме существования математического ожидания, дисперсии и равенства $E(\Delta) = 0$ (отсутствие постоянной ошибки), получается „правило среднего арифметического“. Именно, если рассматривать линейные функции $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$ „без постоянной ошибки“ (несмещенные), так что

$$E(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) = a,$$

то среди них наименьшую дисперсию имеет среднее арифметическое, для которого

$$\lambda_i = \frac{1}{n}.$$

Заметим, что, как выяснилось из последующих исследований, если предположить еще нормальность закона распределения ошибок, то среднее арифметическое будет наивыгоднейшим в смысле указанных принципов А. А. Маркова не только среди всех линейных функций наблюдений, но и среди широкого класса всех „регулярных“ и несмещенных статистик.

¹ Наст. сборник, стр. 245.

18. В более общем случае нахождения m чисел (без известных связей)

$$a_1, a_2, \dots, a_m$$

по значениям

$$b^{(l)} = y_l + \Delta l; \quad l = 1, 2, \dots, n; \quad n > m,$$

где

$$y_l = A_1^{(l)} a_1 + \dots + A_m^{(l)} a_m; \quad A_i^{(l)}$$

при $i = 1, 2, \dots, m; l = 1, 2, \dots, n$ — известные числа, а Δ_l — случайные ошибки наблюдений, с условиями

$$E(\Delta l) = 0, \quad D(\Delta l) = \frac{h}{p^{(l)}}$$

($p^{(l)}$ — вес наблюдения), — применяются те же принципы.

Для оценки a_i применяются статистики $\lambda' b_1 + \dots + \lambda^{(n)} b_n$ с условиями несмещенности и минимальности дисперсии.

Эти статистики совпадают с теми, которые находятся по известному способу наименьших квадратов, чем и дается его обоснование с точки зрения принципов А. А. Маркова.

19. В работе о коэффициенте дисперсии рассматривается σ серий независимых испытаний в количествах $S_i (i = 1, 2, \dots, \sigma)$, в которых наблюдается появление события E , имеющего постоянную вероятность P . Если X_i — число

появлений события в i -той серии, $n = \sum_{i=1}^{\sigma} S_i; m = \sum_{i=1}^{\sigma} X_i$, то

коэффициентом дисперсии называется

$$Q = \frac{n(n-1)}{(\sigma-1)m(n-m)} \sum_{i=1}^{\sigma} S_i \left(\frac{X_i}{S_i} - \frac{m}{n} \right)^2.$$

А. А. Марков вычисляет математическое ожидание и дисперсию Q и тем делает возможным применение Q для построения приемов для испытания гипотезы о постоянстве вероятности P (гипотезы однородности серий испытаний).

В более поздней работе дается асимптотическое распределение Q при $n \rightarrow \infty$, что уточняет критерий для больших n .

Надо отметить, что в работах о коэффициенте дисперсии А. А. Марков дает также критику применения выборочного коэффициента корреляции для оценки генерального коэффициента корреляции, в тех случаях, когда неизвестен тип распределения генеральной совокупности.

Ю. В. Линник, Н. А. Сапогов и В. Н. Тимофеев.

КОММЕНТАРИИ И ПРИМЕЧАНИЯ

К работе „О бинарных квадратичных формах положительного определителя“

Работа напечатана отдельной книгой в 1880 г. и представляет магистерскую диссертацию А. А. Маркова. В своей диссертации А. А. Марков дает решение одной из труднейших проблем в области диофантовых приближений — проблемы о распределении минимумов двойных квадратичных форм положительного определителя.

Впервые этот вопрос был поставлен А. Н. Коркиным и Е. И. Золотаревым в работе „Sur les formes quadratiques“ (1878), где они приводят два первых минимума, $\sqrt{\frac{4}{5}}$ и $\sqrt{\frac{1}{2}}$, и указывают на существенное различие между наибольшими минимумами форм положительного и отрицательного определителей. В диссертации А. А. Марков исследует распределение минимумов, больших $\frac{2}{3}$. Вопрос о распределении минимумов, меньших $\frac{2}{3}$, представляет большие трудности, и в настоящее время об этом распределении почти ничего неизвестно.

Легко можно показать, что в интервале $\left(\sqrt{\frac{4}{13}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ нет ни одного минимума, т. е., что какое бы ни было число l из этого интервала, не существует двойной формы положительного определителя D , минимум которой был бы равен $l\sqrt{D}$. Действительно, пусть

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

неопределенная форма определителя D , минимум которой равен $l\sqrt{D}$. Заменим f на эквивалентную форму

$$f_1 = (l\sqrt{D} + \delta)(x + \alpha y)^2 - \varphi y^2,$$

где $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, $\varphi(l\sqrt{D} + \delta) = D$, а δ достаточно мало. Полагая теперь

$$x = 2, \quad y = -1,$$

предположим, что

$$(l\sqrt{D} + \delta)(2 - \alpha)^2 - \varphi < l\sqrt{D},$$

тогда

$$(l\sqrt{D} + \delta)(2 - \alpha)^2 - \varphi \leq -l\sqrt{D},$$

откуда

$$\begin{aligned} D = \varphi(l\sqrt{D} + \delta) &\geq (l\sqrt{D} + \delta)[(l\sqrt{D} + \delta)(2 - \alpha)^2 + l\sqrt{D}] \geq \\ &\geq l^2 D + \frac{9}{4} l^2 D \end{aligned}$$

и значит $l \leq \sqrt{\frac{4}{13}}$. Если же

$$(l\sqrt{D} + \delta)(2 - \alpha)^2 - \varphi \geq l\sqrt{D},$$

то

$$D \leq 3l^2 D + 7\delta l\sqrt{D} + 4\delta^2,$$

откуда следует $l \geq \sqrt{\frac{1}{3}}$. Числа $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{\frac{4}{13}}$ являются минимумами форм

$$\sqrt{\frac{1}{3}} D (x^2 - 3y^2) \text{ и } \sqrt{\frac{4}{13}} D (x^2 + xy - 3y^2)$$

определителя D .

Точно так же можно доказать, что интервал $\left(\sqrt{\frac{225}{754}}, \sqrt{\frac{4}{13}}\right)$ тоже не содержит минимумов, так что дискретность спектра минимумов имеет место и в области, не исследованной А. А. Марковым. При доказательстве существования просветов в спектре минимумов, следующих за минимумами Маркова, мы воспользовались идеей А. Н. Коркина, с помощью которой он в своей работе „О бинарных формах положительного определителя“ (незаконченная рукопись) находит два первых минимума, $\sqrt{\frac{4}{5}}$ и $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Покажем теперь, как, используя эту идею, можно получить и все следующие минимумы Маркова. Будем считать, для простоты изложения, что минимум форм достигается и равен единице. В таком случае можно ограничиться исследованием форм вида

$$f = (x + \alpha y)^2 - \varphi y^2,$$

где

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad \varphi > 0.$$

Положим

$$y = 1, \quad x = -1,$$

тогда

$$f = (1 - \alpha)^2 - \varphi < 1,$$

и значит

$$(1 - \alpha)^2 - \varphi \leq -1,$$

откуда

$$\varphi \geq 1 + (1 - \alpha)^2$$

и далее $\varphi \geq \frac{4}{5}$, причем знак равенства возможен лишь при $\alpha = \frac{1}{2}$.

Таким образом мы получили первую форму Маркова

$$f_1 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{5}{4}y^2$$

и первый минимум $\sqrt{\frac{4}{5}}$.

Исключив теперь из рассмотрения форму f_1 , положим

$$y = 1, \quad x = 1,$$

тогда

$$f = (1 + \alpha)^2 - \varphi < \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 1,$$

значит

$$(1 + \alpha)^2 - \varphi \leq -1,$$

откуда

$$\varphi \geq 1 + (1 + \alpha)^2 \geq 2.$$

Равенство достигается только при $\alpha = 0$, что дает вторую форму Маркова

$$f_2 = x^2 - 2y^2$$

и второй минимум $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Предположим теперь, что $\varphi > 2$. Выбирая x' так, чтобы

$$\frac{5}{2} \leq |x' + 2\alpha| \leq 3$$

и полагая $y = 2$, будем иметь

$$f = (x' + 2\alpha)^2 - 4\varphi < 9 - 8 = 1,$$

$$(x' + 2\alpha)^2 - 4\varphi \leq -1 \quad \text{и} \quad \varphi \geq \frac{1 + (x' + 2\alpha)^2}{4}.$$

Итак, если $\varphi > 2$, то φ должно удовлетворять двум неравенствам

$$\varphi \geq 1 + (1 + \alpha)^2,$$

$$\varphi \geq \frac{1 + (x' + 2\alpha)^2}{4}.$$

Исследуя эти неравенства, найдем, что наименьшее возможное значение φ равно $\frac{221}{100}$ и соответствует $\alpha = \frac{1}{10}$.

Форма

$$f_3 = \left(x + \frac{1}{10}y\right)^2 - \frac{221}{100}y^2$$

является третьей формой Маркова, и соответствующий минимум равен $\sqrt{\frac{100}{221}}$. Для $\varphi > \frac{221}{100}$ положим $y = 5$, а x'' выберем так, чтобы

$$7 \leq |x'' + 5\alpha| \leq \frac{15}{2},$$

тогда φ должно удовлетворять следующим неравенствам:

$$\varphi \geq 1 + (1 + \alpha)^2,$$

$$\varphi \geq \frac{1 + (x' + 2\alpha)^2}{4},$$

$$\varphi \geq \frac{1 + (x'' + 5\alpha)^2}{25},$$

рассматривая которые, найдем четвертую форму и четвертый минимум Маркова.

Продолжая этот процесс, мы последовательно найдем все формы и минимумы Маркова, определяя каждый раз наименьшее значение φ из некоторой системы неравенств.

Исследование А. А. Маркова о двойничных квадратичных формах положило начало целому ряду работ в области диофантовых приближений.

Часть из них, принадлежащая чл.-корр. АН СССР Б. Н. Делоне, Д. С. Горшкову, Ремаку и др., посвящена непосредственно задаче Маркова. Эти математики дают геометрическое истолкование всех результатов А. А. Маркова, а также новые методы их получения.

Другая часть работ относится к нахождению минимумов квадратичных форм с тремя и четырьмя переменными,¹ минимумов произведений линейных однородных и неоднородных форм (задачи Минковского), минимумов двойничных кубических форм.

Для задачи Минковского о произведении линейных однородных форм получены только два первых минимума, когда $n=3$. Первый минимум был найден Морделлом и Б. Н. Делоне, второй — Давенпортом. Для $n=4$ не найден даже первый минимум.

Что касается задачи Минковского о произведении линейных неоднородных форм, то здесь основные результаты принадлежат Минковскому, Ремаку, Давенпорту, Н. Г. Чеботареву, Б. Н. Делоне и Диссону.

Точная константа для $n=2$ была получена Минковским, для $n=3$ — Ремаком и для $n=4$ — Диссоном. Для $n>4$ точная константа не найдена. Весьма сложное доказательство Ремака впоследствии было значительно упрощено Давенпортом.

Н. Г. Чеботарев в заметке „К одной теореме Минковского“ доказал, что для любого n константа Минковского меньше $2^{-\frac{n}{2}} + \varepsilon$.

Для двойничных кубических форм первый минимум был найден Морделлом и Давенпортом. Здесь, как показал Давенпорт, первый минимум не является изолированным, т. е. существуют формы, минимумы которых сколь угодно близки к наибольшему. Первый минимум для форм положительного определителя получен также Б. Н. Делоне в работе „Локальный метод в геометрии чисел“. Двойничные формы высших степеней не исследовались.

Все перечисленные результаты были получены геометрически, так как геометрическое исследование рассматриваемых задач является наиболее простым и естественным. В целом ряде работ Б. Н. Делоне дает общую чисто геометрическую постановку задачи, которая объединяет, по существу, все вопросы теории диофантовых приближений и которую Б. Н. Делоне называет общей задачей Маркова.

Приведем формулировку этой задачи.

Пусть в n -мерном пространстве задана некоторая область γ и рассматриваются все n -мерные решетки, вовсе не имеющие точек в области γ , кроме точек, обусловленных некоторым так называемым дополни-

¹ О работах, относящихся к квадратичным формам с тремя и четырьмя переменными, см. в этом сборнике комментариев к работе „О неопределенных тройничных квадратичных формах“ (стр. 649).

тельным условием. Такие решетки мы будем называть допустимыми. Всякое непрерывное преобразование допустимой решетки, при котором она все время остается допустимой решеткой, мы будем называть допустимым преобразованием. Допустимые решетки, не имеющие таких допустимых преобразований, которые лишь уменьшают объем основного параллелепипеда, будем называть предельными. Задача состоит в нахождении всех предельных решеток для данного n , данной области γ и данного дополнительного условия.

С этой точки зрения А. А. Марков в своей диссертации дает все предельные решетки для случая, когда $n=2$, а область γ есть область точек (u, v) , для которых $|uv| < 1$; дополнительным условием здесь является:

- 1) площадь основного параллелограмма не должна превышать 3;
- 2) центр области γ находится в точке решетки.

В задаче о минимумах тройничных форм $n=3$, γ — область точек (u, v, w) , для которых $|u^2 + v^2 - w^2| < 1$, дополнительное условие — центр области γ находится в точке решетки. Здесь А. А. Марков нашел четыре первые предельные решетки, а в дальнейшем Б. А. Венков — еще семь. Теория минимумов положительных квадратичных форм, данная А. Н. Коркиным, Е. И. Золотаревым и Г. Ф. Вороным является также частным случаем задачи Маркова; здесь область γ — n -мерный шар, дополнительное условие — центр шара находится в точке решетки.

Решение общей задачи Маркова представляет значительные трудности, и пока в этом направлении получен лишь ряд частных результатов, наиболее глубокими из которых являются результаты А. А. Маркова.

В. Тимофеев.

К работе

„О целых числах, зависящих от корня кубического из целого рационального числа“

Перевод с французского языка мемуара А. А. Маркова „Sur les nombres entiers dépendants d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire“, напечатанного в 1892 г. в „Mémoires de l'Académie impériale des sciences de st.-Petersbourg“ (VII^e série, t. XXXVIII, № 9, pp. 1—37).

В мемуаре дается полное решение вопроса о разложении целых чисел чисто кубического поля на простые множители.

Работа А. А. Маркова непосредственно связана с работами Е. И. Золотарева „Об одном неопределенном уравнении третьей степени“ (1869) и „Sur la théorie des nombres completes“ (1885).

В первой из этих работ Е. И. Золотарев дает алгоритм для нахождения основной единицы чисто кубического поля, во второй — разрабатывает полную теорию идеальных чисел.

А. А. Марков приводит обширную таблицу комплексных единиц для всех $A \leq 70$. По поводу вычисления единиц он пишет: „Не останавливаясь на верных, но трудных методах нахождения основной комплексной единицы, мы заметим, что для малых значений a и b легко найти комплексные единицы путем подбора, рассматривая несколько чисел ξ , содержащих одни и те же простые множители“.

Наиболее простой алгоритм нахождения основной комплексной единицы для кубических полей был дан Г. Ф. Вороным в докторской диссертации „Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей“ (1897). Этот алгоритм и по настоящее время является наиболее удобным. Вычисления А. А. Маркова числа классов, проведенные им для $A = 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19$, были продолжены Дедекиндом для $A = 20, 21, 22, 23, 28, 44, 45, 63$.

Приведем примечания к некоторым местам работы.

1 (стр. 88). Докажем это независимо от общей теории алгебраических чисел. Заметив, что

$$x^3 + Ay^3 + Bz^3 - 3abxyz = \begin{vmatrix} x & y\sqrt[3]{A} & z\sqrt[3]{B} \\ z\sqrt[3]{B} & x & y\sqrt[3]{A} \\ y\sqrt[3]{A} & z\sqrt[3]{B} & x \end{vmatrix},$$

мы получим

$$\begin{aligned} & (x_1^3 + Ay_1^3 + Bz_1^3 - 3abx_1y_1z_1)(x_2^3 + Ay_2^3 + Bz_2^3 - 3abx_2y_2z_2) = \\ & = \begin{vmatrix} x_1 & y_1\sqrt[3]{A} & z_1\sqrt[3]{B} \\ z_1\sqrt[3]{B} & x_1 & y_1\sqrt[3]{A} \\ y_1\sqrt[3]{A} & z_1\sqrt[3]{B} & x_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2\sqrt[3]{A} & z_2\sqrt[3]{B} \\ z_2\sqrt[3]{B} & x_2 & y_2\sqrt[3]{A} \\ y_2\sqrt[3]{A} & z_2\sqrt[3]{B} & x_2 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} x_1x_2 + ab y_1z_2 + ab z_1y_2, & (x_1y_2 + y_1x_2 + az_1z_2)\sqrt[3]{A}, & (x_1z_2 + by_1y_2 + z_1x_2)\sqrt[3]{B} \\ (x_1z_2 + by_1y_2 + z_1x_2)\sqrt[3]{B}, & x_1x_2 + ab y_1z_2 + ab z_1y_2, & (x_1y_2 + y_1x_2 + az_1z_2)\sqrt[3]{A} \\ (x_1y_2 + y_1x_2 + az_1z_2)\sqrt[3]{A}, & (x_1z_2 + by_1y_2 + z_1x_2)\sqrt[3]{B}, & x_1x_2 + ab y_1z_2 + ab z_1y_2 \end{vmatrix} \\ & = (x_1x_2 + ab y_1z_2 + ab z_1y_2)^3 + A(x_1y_2 + y_1x_2 + az_1z_2)^3 + \\ & + B(x_1z_2 + by_1y_2 + z_1x_2)^3 - 3ab(x_1x_2 + ab y_1z_2 + ab z_1y_2)(x_1y_2 + \\ & + y_1x_2 + az_1z_2)(x_1z_2 + by_1y_2 + z_1x_2), \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение, приведенное в работе.

2 (стр. 101). Действительно, из равенства

$$\frac{\tau^3 - A}{p} \frac{x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B}}{3} = (\tau - \sqrt[3]{A}) \left[\frac{x\tau^2 + ab z\tau + ab^2 y}{3p} + \right. \\ \left. + \frac{x\tau + y\tau^2 + abz}{3p} \sqrt[3]{A} + \frac{bx + bx\tau + z\tau^2}{3p} \sqrt[3]{B} \right]$$

мы заключаем, что необходимое и достаточное условие делимости ξ на γ_p приводится к трем сравнениям:

$$\begin{aligned} x\tau^2 + ab z\tau + ab^2 y &\equiv 0 \pmod{p}, \\ x\tau + y\tau^2 + ab z &\equiv 0 \pmod{p}, \\ bx + by\tau + z\tau^2 &\equiv 0 \pmod{p}, \end{aligned}$$

которые, в свою очередь, в силу $\tau^3 \equiv A = ab^2 \pmod{p}$ приводятся к одному:

$$b(x + y\tau) + z\tau^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

указанному в работе.

3 (стр. 103). Докажем делимость числа $\tau_1^2 - \tau_2 \tau_3 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \sqrt[3]{A}$ на p . Из сравнений

$$\tau_1^3 \equiv \tau_2^3 \equiv \tau_3^3 \equiv A \pmod{p}$$

и из того факта, что τ_1, τ_2, τ_3 несравнимы попарно по мод. p , следует

$$\begin{aligned} \tau_1^2 + \tau_1 \tau_2 + \tau_2^2 &\equiv 0 \pmod{p}, \\ \tau_2^2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_3^2 &\equiv 0 \pmod{p}, \\ \tau_3^2 + \tau_3 \tau_1 + \tau_1^2 &\equiv 0 \pmod{p}, \end{aligned}$$

откуда легко получим

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \equiv 0 \pmod{p} \text{ и } \tau_1^2 - \tau_2 \tau_3 \equiv 0 \pmod{p},$$

что и доказывает делимость числа $\tau_1^2 - \tau_2 \tau_3 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \sqrt[3]{A}$ на p .

4 (стр. 112). Оба сравнения

$$ay + bz - 2x \equiv 0 \pmod{9} \text{ и } x + ay + bz \equiv 0 \pmod{9}$$

легко можно получить, рассматривая коэффициенты X, Y, Z и X', Y', Z' в соответствующих равенствах

$$\frac{ab(64a^2 - b^2)^2}{27} \frac{(x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B})}{3} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4ab + b \sqrt[3]{A} + 16a \sqrt[3]{B}}{3} (X + Y \sqrt[3]{A} + Z \sqrt[3]{B}), \\
&\quad \frac{ab(64a^2 - b^2)^2}{27} \frac{(x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{B})}{3} = \\
&= \frac{b \sqrt[3]{A} + 16a \sqrt[3]{B} - 8ab}{3} (X' + Y' \sqrt[3]{A} + Z' \sqrt[3]{B}).
\end{aligned}$$

В. Тимофеев.

К работе „О простых делителях чисел вида $1 + 4x^2$ “

Эта работа напечатана в 1895 г. в „Известиях Академии Наук“ (т. III, № 1, стр. 55—58) и является переводом письма А. А. Маркова к Эрмиту. В том же томе „Известий“ (стр. 361—366) опубликована работа И. И. Иванова, обобщающая теорему П. Л. Чебышева на простые делители чисел вида $A + x^2$.

И. И. Иванов доказывает следующую теорему:

Если A — целое положительное число и μ — наибольший простой делитель чисел

$$A + 1^2, \quad A + 2^2, \dots, \quad A + Z^2,$$

то отношение

$$\frac{\mu}{Z}$$

неограниченно возрастает вместе с Z .

Доказательство проводится, в основном, при помощи тех же рассуждений, что и в работе А. А. Маркова.

В. Тимофеев.

К работе „О неопределенных тройничных квадратичных формах“

Работа была напечатана в 1901 г. в „Известиях Академии Наук“ (т. XIV, № 5, стр. 509—523).

А. А. Марков здесь впервые ставит вопрос о нахождении экстремальных неопределенных тройничных квадратичных форм. Используя результаты своей магистерской диссертации, А. А. Марков находит в работе две первые экстремальные формы

$$- \sqrt[3]{\frac{2}{3}} D \{x^2 + xy + y^2 - 2z^2\} \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{\frac{2}{5}} D \{x^2 - xy - y^2 - 2z^2\}.$$

В конце работы он указывает третью экстремальную форму

$$-\sqrt[3]{\frac{1}{3}} D \{x^2 + y^2 + 3z^2\},$$

экстремальность которой доказывает в мемуаре „Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies“ (Mathem. Annalen, 1903, B. 53). В 1909 г. в „Table des formes quadratiques ternaires indéfinies ne représentant pas zéro, pour tous les déterminants positifs $D \leq 50$ “ (наст. сборник, стр. 165). А. А. Марков приводит без доказательства еще одну экстремальную форму $\sqrt[3]{\frac{D}{25}} \{-2x^2 - 2xy + 2y^2 - 5z^2\}$ и подчеркивает трудность нахождения полного ряда последовательных минимумов

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \sqrt[3]{\frac{2}{5}}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{\frac{8}{25}}, \dots$$

После работ А. А. Маркова до самого последнего времени не было найдено ни одной экстремальной формы. Только в 1945 г. проф. Б. А. Венкову в работе „Об экстремальной проблеме Маркова для неопределенных тройничных квадратичных форм“ (Изв. АН СССР, т. 9, 1945, стр. 429—494) удалось продолжить ряд экстремальных форм, не используя при этом существенное предположение А. А. Маркова, что данная тройничная форма достигает своего минимума. Б. А. Венков в своей работе доказал следующую теорему.

Пусть дана неопределенная тройничная форма

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{pmatrix} = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2b''xy + 2b'xz + 2byz$$

определителя

$$d = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} > 0$$

с произвольными вещественными коэффициентами. Если f не эквивалентна одиннадцати формам вида $a\psi_k$ (a — постоянная), $k=1, 2, \dots, 11$, то переменным x, y, z можно дать такие целые, не равные одновременно нулю значения, при которых

$$|f(x, y, z)| < \sqrt[3]{\frac{2}{9}} d$$

Формы Ψ_k имеют вид:

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad d = \frac{3}{2} = 1.5;$$

$$\Psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad d = \frac{5}{2} = 2.5;$$

$$\Psi_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad d = 3;$$

$$\Psi_4 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad d = \frac{25}{8} = 3.125;$$

$$\Psi_5 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & -1 & \frac{9}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{9}{7} & \frac{17}{7} \end{pmatrix}, \quad d = \frac{1200}{7^3} = 3.496\dots;$$

$$\Psi_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}, \quad d = \frac{7}{2} = 3.5;$$

$$\Psi_7 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad d = \frac{15}{4} = 3.75;$$

$$\Psi_8 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} & 1 & \frac{9}{10} \\ 1 & -\frac{11}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \frac{3 \cdot 13^2}{5^3} = 4.056;$$

$$\Psi_9 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}, \quad d = \frac{112}{3^3} = 4.143\dots;$$

$$\Psi_{10} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{21}{8} \end{pmatrix}, \quad d = \frac{135}{2^5} = 4.218\dots;$$

$$\Psi_{11} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad d = \frac{9}{2} = 4.5.$$

Для всех этих форм минимум $|\Psi_k(x, y, z)|$ равен 1 при целых x, y, z , не равных одновременно нулю.

Доказательство Б. А. Венкова чисто геометрическое и основано на введенном им понятии внешней вершины для совокупности целых точек, лежащих вне асимптотического конуса $f(x, y, z) = 0$. Что касается экстремальных неопределенных квадратичных форм с четырьмя переменными, то и здесь первые две формы были найдены А. А. Марковым в 1902 г. в работе „О неопределенных квадратичных формах с четырьмя переменными“ (Изв. Акад. Наук, т. XIV, № 3, стр. 97—108). Дальнейших результатов для форм с тремя и четырьмя переменными пока не получено.

1 (стр. 145). См. стр. 9 наст. сборника.

**К работе „Таблица неопределенных тройничных
квадратичных форм, не представляющих нуль, для всех
положительных определителей $D \leq 50$ “**

Печатается на русском языке впервые. Эта работа А. А. Маркова была опубликована в 1909 г. на французском языке в „Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St.-Petersbourg“ (VIII^e série, т. XXIII, № 7, стр. 1—24).

А. А. Марковым найдены не только все формы с определителем $D \leq 50$, не представляющие нуль, но также вычислены все производящие автоморфизмы форм с определителями $D \leq 36$. Кроме того, для некоторых форм в таблице указаны характеристические свойства этих форм, с помощью которых А. А. Марков устанавливал неэквивалентность форм, приведенных в таблице. Таблица содержит также неравенства, определяющие приведенные представления чисел формами таблицы. На ряде примеров А. А. Марков показал, как, пользуясь этими неравенствами, можем найти все представления данного числа данной формой.

Особый интерес представляют приведенные в таблице производящие автоморфизмы, все они второго порядка. Это, естественно, наводило на мысль, что для любой формы можно найти полную систему производящих автоморфизмов только второго порядка. Однако, как это доказал И. С. Соминский, это справедливо лишь для форм с определителями $D < 46$, и неверно для формы $46x^2 - y^2 - z^2$ определителя $D = 46$. Полная система производящих автоморфизмов этой формы обязательно должна содержать автоморфизмы бесконечного порядка.

Следует отметить, наконец, что в своей работе А. А. Марков указал

впервые четвертую экстремальную форму $\sqrt[3]{\frac{D}{25}}(-2x^2 - 2xy + 2y^2 - 5z^2)$,

минимум которой равен $\sqrt[3]{\frac{8|D|}{25}}$, приведя при этом еще две формы

$$-2x^2 - 2y^2 - 2xz - 2yz + 6z^2 \quad \text{и} \quad -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 10z^2,$$

которые он, несомненно, считал экстремальными. Экстремальность последних установил проф. Б. А. Венков в работе „Об экстремальной проблеме Маркова для неопределенных тройничных квадратичных форм“ (Изв. АН СССР, т. 9, 1945, стр. 429—494).

В. Тимофеев.

К статье „Доказательство трансцендентности чисел e и π “

Издана отдельной брошюрой в 1883 г. (СПб., типография Академии Наук).

В статье дается подробно и просто изложенный вариант доказательства теорем Эрмита и Линдемманна.

Ю. В. Линник.

К статье „Закон больших чисел и способ наименьших квадратов“

Статья А. А. Маркова, опубликованная в 1898 г. в „Известиях Физико-математического общества при Казанском университете“ (серия вторая, т. VIII, № 3, стр. 110—128), представляет собою извлечение из писем к А. В. Васильеву, профессору Казанского университета.

1 (стр. 233). См.: Полн. собр. соч. П. Л. Чебышева, т. II, Изд. АН СССР, М.—Л., 1948.

2 (стр. 234). Эта формулировка А. А. Маркова выгодно отличается от не совсем правильной формулировки П. Л. Чебышева в указанном мемуаре.

3 (стр. 240). Такой вывод дан в статье А. А. Маркова „О корнях уравнения $e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$ “ (см. стр. 255 наст. сборника).

4 (стр. 246). В приведенных примерах даны случаи, когда нарушается условие, называемое теперь „пределной пренебрегаемостью“. Примеры, где оно не нарушено, а математические ожидания квадратов представляют расходящиеся ряды, даны в конце статьи. Эти примеры нужны во второй части статьи (письмо от 5 октября 1898 г.), где критикуется обоснование нормального закона для распределения ошибок наблюдений с помощью „гипотезы элементарных ошибок“.

5 (стр. 246). Применение принципа Маркова для вывода известных расчетов способа наименьших квадратов в простейших случаях протекает так: пусть измеряются неизвестные величины $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ посредством измерения линейных функций $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{ir}\alpha_r (i=1, 2, \dots, n)$ и получаются ошибки Δ_i , так что

$$y_i = \Delta_i + a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{ir}\alpha_r$$

случайные величины. Пусть м. о. $\Delta_i = 0$ и дисперсии Δ_i равны $\frac{\sigma^2}{p_i}$

(p_i — „веса“ наблюдений). Тогда в качестве приближенного значения α_k будем брать линейную функцию

$$\lambda_1^{(k)} y_1 + \dots + \lambda_n^{(k)} y_n = T_k$$

при условиях:

1) м. о. $T_k = \alpha_k$ (отсутствие постоянной погрешности), 2) дисперсия T_k минимальна.

[6] (стр. 247). Перевод:

„Впрочем, то, что я впоследствии оставил обоснование метода наименьших квадратов, применяемое в «Theoria Motus corp. coel.», произошло на основании, которое я не указывал в явном виде. Именно, я должен считать, что во всех смыслах менее важно найти то значение неизвестной величины, вероятность коего наибольшая, и все же бесконечно малая, чем такое, при котором получается наименее убыточная игра; или если $f(a)$ означает вероятность значения a неизвестной x , то следует придавать меньшее значение тому, чтобы $f(a)$ был максимумом, чем тому, чтобы $\int f(x) F(x-a) dx$, распространенный по всем возможным значениям x , был минимумом, причем за F выбирается функция всегда положительная и при увеличении аргумента подходящим образом увеличивающаяся. То, что избирается квадрат, — вполне произвольно, и этот произвол лежит в основе дела. Если бы не было известных, исключительно больших преимуществ, доставляемых выбором квадрата, можно было бы взять всякую другую функцию, удовлетворяющую указанным условиям“.

[7] (стр. 247). Вычисление „вероятной ошибки“ требует знания дисперсий ошибок наблюдений, а не только относительных весов.

[8] (стр. 250). В современной математической статистике этому утверждению придается иной смысл („способ максимального подобия“). При этом предполагается, что ошибки наблюдений распределены по нормальному закону и независимы.

В этих условиях возможно установить некоторую связь указанного способа с принципом Маркова.

Ю. В. Линник.

К статье „О корнях уравнения $e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$ “

Статья опубликована на французском языке в 1898 г. в „Известиях Академии Наук“ (серия V, т. IX, № 5, стр. 435—446) под названием „Sur les racines de l'equation $e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$ “.

Более подробное изложение соображений, приводящих к теоремам 1—4, имеется в статье „Неравенства Чебышева и основная теорема“, помещенной в настоящем сборнике (см. стр. 271).

Ю. В. Линник.

К работе „Неравенства Чебышева и основная теорема“

Настоящая статья взята из приложения к посмертному, четвертому изданию книги А. А. Маркова „Исчисление вероятностей“ (Гос. изд., М., 1924). Работа была впервые опубликована в 1913 г., в третьем издании той же книги. Доказанные в работе теоремы служат основой для следующей статьи „Теорема о пределе вероятности для случая академика Ляпунова“ (см. наст. сборник, стр. 319). Основой доказательства первой из теорем служит рассмотрение разложения интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{z - t} dt$$

в формальную непрерывную дробь, рассмотрение подходящих дробей и неравенства Чебышева (в обобщенном виде найденного А. А. Марковым), которое связывает значение

$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-t^2} dt$ при любом α , с коэффициентами в разложении подходящих дробей на простейшие.

1 (стр. 275). Указанные соотношения принадлежат к элементам аналитической теории непрерывных дробей. По этому поводу см. указанный в конце работы список литературы (стр. 318).

2 (стр. 278). Имеется в виду, что будут употребляться такие системы чисел $S_0, S_1, S_2, \dots$ что система уравнений

$$[\varphi(x)] = 0, [x\varphi(x)] = 0, \dots, [x^{m-1}\varphi(x)] = 0$$

не может быть удовлетворена никаким полиномом $\varphi(x)$ степени $\leq m-1$, неравным 0 тождественно. Тогда определители

$$S_n, \quad \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}, \dots$$

будут все $\neq 0$.

3 (стр. 281). Такое утверждение получается при дополнительном требовании положительности всех чисел p . Это требование и выдвигается в дальнейшем.

4 (стр. 281). Иначе было бы, в частности, $\sum_x p \varphi(x) \varphi(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ для всех x , и полином степени $m-1$ имел бы больше $m-1$ корней.

5 (стр. 282). Действительно, $c_1, c_2, \dots, c_k$ предполагаются корнями нечетной кратности, чтобы всегда было $(z - c_1) \dots (z - c_k) \omega_m(z) \geq 0$. Могут быть еще вещественные корни четной кратности, число которых меньше или равно $\frac{m-k}{2}$.

6 (стр. 284). Формула (6) следует из общей теории, изложенной вначале. Для получения (7) и (8) умножаем первую из формул (6) сперва на $\omega_{m-1}(z)$, полагаем $z = x$, при каждом x умножаем на p и суммируем по x . Тогда

$$\sum_x p \omega_{m-1}(x) \omega_{m-2}(x) = 0 \quad \text{и} \quad \sum_x p \omega_m(x) \omega_{m-1}(x) = 0$$

по общей теории полиномов $\omega_m(x)$. Оставшиеся члены определяют b_m . При помножении той же формулы на $p \omega_{m-2}(x)$ и суммировании по x при $z = x$, получается сперва

$$a_m = \frac{\sum_x p x \omega_{m-1}(x) \omega_{m-2}(x)}{\sum_x p \omega_{m-2}(x) \omega_{m-2}(x)}.$$

Далее из уравнения

$$\omega_{m-1}(z) = (z + b_{m-1}) \omega_{m-2}(z) - a_{m-1} \omega_{m-3}(z)$$

при помножении на $\omega_{m-1}(x)$ тем же приемом находим

$$\sum_x p x \omega_{m-1}(x) \omega_{m-2}(x) = \sum_x p \omega_{m-1}(x) \omega_{m-1}(x),$$

что дает (8).

7 (стр. 285). В (9) при $z = \xi$ исчезает второй член слева, и получается выражение для $\psi_m(\xi)$.

8 (стр. 286). Вещественность корней $\omega_m(z)$ доказана для любых систем x и $p > 0$.

9 (стр. 288). Следствие (5) при $\Omega(z) \equiv 1$.

10 (стр. 289). $\Omega'(z)$ есть полином степени $2m - 3$. Он не обращается в нуль в полуоткрытом интервале (ξ^0, ξ') , ибо обязан обращаться в 0 при всех $\xi \neq \xi'$ и еще $m - 2$ раза в промежутках между корнями $\omega_m(z)$, согласно теореме Ролля. Но $\Omega(\xi^0) = 1$, $\Omega(\xi') = 0$. Значит, $\Omega(z)$ убывает в указанном промежутке, и $\Omega'(z) < 0$ там.

Далее, при $z < \xi'$, непременно $\Omega(z) \leq 1$. Ибо имеем $\Omega(\xi) = 1$ при $\xi < \xi'$, что дает нам соответствующее количество корней $\Omega'(z)$ при $z < \xi'$. Если бы было где-либо $\Omega(z) > 1$ при $z < \xi'$, появилось бы значение z' с $\Omega(z') = 1$, где $z' \neq \xi$, что добавило бы, по крайней мере, один лиш- ний корень к $\Omega'(z)$. Это невозможно. Аналогично убеждаемся, что $\Omega(z) \leq 0$ при $z > \xi'$.

11 (стр. 291). Объединение обоих типов распределений может быть совершено с помощью интегралов Стильеса. Однако А. А. Марков придерживается рамок старых классических понятий анализа.

12 (стр. 292). Числа $S_0, S_1, S_2, \dots$ связаны с формальным разложе- нием интеграла $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{z - t} dt$ в ряд по степеням $\frac{1}{z}$; полином $\omega_m(z)$ —

с его формальным разложением в непрерывную дробь.

13 (стр. 297). См. наст. сборник, стр. 255.

14 (стр. 306). См.: А. А. М а р к о в. Исчисление вероятностей, 1924.

15 (стр. 306). См. наст. сборник, стр. 319.

16 (стр. 310). Первое неравенство следует из неотрицательности $f(x)$ и $\Omega(x)$. Второе — из того, что $\Omega(\xi_i) \leq 1$ для $\xi_i < c$ и $\xi_i > d$, а в проме- жутке между c и d нет чисел ξ_i по предположению.

17 (стр. 316). Здесь следует заметить еще, что у смежных $\omega_i(x)$ и $\omega_j(x)$ нет общих корней $\neq 0$. Ибо, по соотношениям между $\omega_m(x)$, $\omega_{m-1}(x)$ и $\omega_{m-2}(x)$, они оказались бы корнями всех $\omega_m(x)$ с меньшими номерами, включая $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$. Поэтому при обращении числителя наших дробей в 0, знаменатели в 0 не обращаются.

Ю. В. Линник.

К работе „Теорема о пределе вероятности для случаев академика А. М. Ляпунова“

Работа впервые опубликована в 1913 г. в третьем издании книги А. А. Маркова „Исчисление вероятностей“. В настоящем сборнике воспроизво- дится по посмертному, четвертому изданию той же книги (Гос. изд., М., 1924).

1 (стр. 321). См.: А. А. М а р к о в. Исчисление вероятностей, 1924.

2 (стр. 321). См. также: Полн. собр. соч. П. Л. Чебышева, т. II, Изд. АН СССР, М.—Л., 1948, стр. 233.

3 (стр. 321). См. наст. сборник, стр. 233.

4 (стр. 322). См. также: А. М. Ляпунов. Избранные труды. Изд. АН СССР, 1948, стр. 179 и 219.

5 (стр. 322). Комментируемая статья А. А. Маркова непосредственно примыкает к предыдущей. В ней метод математических ожиданий впервые приводится в такую форму, которая позволяет доказать „центральную предельную теорему теории вероятностей“ А. М. Ляпунова. Эта теорема была доказана А. М. Ляпуновым методом характеристических функций, который имеет то преимущество, что характеристические функции существуют для любой случайной переменной, в то время как математические ожидания каких-либо степеней ее не всегда обязаны существовать. А. А. Марков вводит здесь „срезанные“ случайные величины X_k — такие функции исходных случайных величин $Z_k - a_k$, что для них существуют моменты любых целых степеней X_k , а сумма их имеет то же предельное распределение, что и сумма исходных в условиях

Ляпунова. Далее к $\sum_{k=1}^n X_k$ применяется метод математических ожиданий, выводы которого основаны на предыдущей статье. В конце статьи приводится пример, когда предельная теорема не имеет места; при этом, разумеется, условия Ляпунова не выполнены.

6 (стр. 324). Если предположить для простоты, что $Z_k - a_k$ не принимает значения 0 и имеет дискретное распределение, то имеет для распределений X_k и Y_k

$$\begin{aligned} P\{X_k = Z - a_k\} &= P\{Z_k - a_k = Z - a_k\} \quad \text{при} \quad |Z - a| < N; \\ P\{X_k = 0\} &= P\{|Z_k - a_k| \geq N\}; \\ P\{Y_k = Z - a_k\} &= P\{Z_k - a_k = Z - a_k\}; \\ P\{Y_k = 0\} &= P\{|Z_k - a_k| \leq N\}, \end{aligned}$$

откуда сразу вытекает равенство

$$b_k^{(2+\delta)} = \text{м. о. } |X_k|^{2+\delta} + \text{м. о. } |Y_k|^{2+\delta}.$$

Общий случай трактуется аналогично.

7 (стр. 326). В этой главе книги „Исчисление вероятностей“ доказывается предельная теорема для гораздо более узких условий.

8 (стр. 332). См. примеч. 7.

9 (стр. 338). Пример, приведенный А. А. Марковым, возможно также исследовать с помощью современной теоремы Линдеберга—Феллера—С. Н. Бернштейна, которая дает также возможность выяснить неразо-

бранный случай $\nu = 1$. Согласно этой теореме, обозначая закон распределения $Z_k - a_k$ через $F_k(x)$, считая, что $\max_{k \leq n} \frac{b_k}{B_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, необходимым и достаточным условием применимости указанной предельной теоремы будет

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k \leq n} \int_{|x| > \varepsilon \sqrt{B_n}} x^2 dF_k(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

и любом фиксированном $\varepsilon > 0$. При всяком таком ε и $\nu < 1$, ввиду того, что $\frac{\sqrt{B_n}}{(\ln n)^{\mu + \frac{1-\nu}{2}}}$ заключен между положительными константами, для

достаточно больших n неравенство $|Z_k| > \varepsilon \sqrt{B_n}$ невозможно, и условие выполнено. При $\nu > 1$ имеем: для достаточно малого $\eta > 0$, $k > e^{\eta \ln n}$, $k \leq n$ и при достаточно большем n , будет

$$\int_{|x| > \varepsilon \sqrt{B_n}} x^2 dF_k(x) = b_k \quad \text{и} \quad \frac{1}{B_n} \sum_{i \leq e^{\eta \ln n}} b_i < K_0 \eta^{2\mu - \nu + 1},$$

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k \leq n} \int_{|x| > \varepsilon \sqrt{B_n}} x^2 dF_k(x) > \frac{1}{2}.$$

Условие нарушено. $K_0, K_1, \dots$ — положительные константы. При $\nu = 1$ и заданном ε , для $k > e^{K_1 \varepsilon \ln n}$ получим

$$\int_{|x| > \varepsilon \sqrt{B_n}} x^2 dF_k(x) = b_k \quad \text{и} \quad \frac{1}{B_n} \sum_{i \leq e^{K_1 \varepsilon \ln n}} b_i < K_2 \varepsilon^{2\mu},$$

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k \leq n} \int_{|x| > \varepsilon \sqrt{B_n}} x^2 dF_k(x) > \frac{1}{2}.$$

Условие нарушено, и предельная теорема не применима.

Ю. В. Линник.

К работе „Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга“

Опубликовано в „Известиях Физико-математического общества при Казанском университете“ (серия вторая, т. XV, № 4, стр. 135—156).

В этой работе рассматриваются условия применимости закона больших чисел к суммам $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ случайных зависимых величин X_i , причем речь идет только о достаточных условиях. Результаты основаны на простом, но важном замечании, что закон больших чисел применим к S_n , если

$$\frac{D(S_n)}{n^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где знаком $D(X)$ обозначена дисперсия величины X .

В начале работы используется одно неравенство Чебышева, которое в нужной для Маркова форме читается так:
если

$$z_l^{(1)} \leq z_l^{(2)} \leq \dots \leq z_l^{(\omega)}; \quad a_k^{(1)} \geq a_k^{(2)} \geq \dots \geq a_k^{(\omega)};$$

$$p_l^{(i)} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, \omega; \quad \sum_{i=1}^{\omega} p_l^{(i)} = 1,$$

то

$$\sum_i p_l^{(i)} z_l^{(i)} a_k^{(i)} \leq \sum_i p_l^{(i)} z_l^{(i)} \cdot \sum_i p_l^{(i)} a_k^{(i)}. \quad (1)$$

Считая $\omega > 1$, убеждаемся в справедливости этого неравенства следующим образом.

Ясно, что

$$a_k^{(1)} \geq \sum_{i=1}^{\omega} p_l^{(i)} a_k^{(i)} \geq a_k^{(\omega)},$$

поэтому существует индекс i_0 , $1 \leq i_0 \leq \omega$, для которого

$$a_k^{(i)} - \sum_{i=1}^{\omega} p_l^{(i)} a_k^{(i)} \geq 0, \quad i \leq i_0,$$

$$a_k^{(i)} - \sum_{i=1}^{\omega} p_l^{(i)} a_k^{(i)} < 0, \quad i > i_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\omega} p_l^{(i)} z_l^{(i)} \left[a_k^{(i)} - \sum_{i=1}^{\omega} p_l^{(i)} a_k^{(i)} \right] &= \sum_{i=1}^{i_0} p_l^{(i)} z_l^{(i)} \left[a_k^{(i)} - \sum_{i=1}^{\omega} p_l^{(i)} a_k^{(i)} \right] + \\ &+ \sum_{i=i_0+1}^{\omega} p_l^{(i)} z_l^{(i)} \left[a_k^{(i)} - \sum_{i=1}^{\omega} p_l^{(i)} a_k^{(i)} \right] \leq \\ &\leq z_l^{(i_0)} \sum_{i=1}^{\omega} p_l^{(i)} \left[a_k^{(i)} - \sum_{i=1}^{\omega} p_l^{(i)} a_k^{(i)} \right] = 0, \end{aligned}$$

откуда и вытекает (1).

Одним из примеров зависимых величин, к которым применим закон больших чисел, для Маркова служит простая и однородная цепь, рассматриваемая впервые именно в этой работе. В § 5 работы рассматривается такая цепь при условии, что все вероятности перехода $p_{\alpha\beta}$ положительны. Следует отметить, что это сильное ограничение не вызвано необходимостью. Все рассуждение и выводы Маркова остаются без изменения, если требовать только, чтобы существовал хотя бы один индекс ν такой, что

$$p_{\mu\nu} > 0,$$

каков бы ни был индекс μ .

Из последующих работ других авторов, посвященных закону больших чисел для зависимых величин, укажем на работу С. Н. Бернштейна „О законе больших чисел“ (Сообщ. Харьковск. матем. общ., т. XVI, 1918, стр. 82—87) и работу автора этих строк „О законе больших чисел для зависимых случайных величин“ (Изв. АН СССР, серия матем., т. 14, № 2, 1950, стр. 145—154).

1 (стр. 341). См. также: Полн. собр. соч. П. Л. Чебышева, т. 2, Изд. АН СССР, 1947, стр. 431—437 (на переплете стоит 1948 г.).

2 (стр. 344). См. также: Полн. собр. соч. П. Л. Чебышева, т. 3, Изд. АН СССР, 1948, стр. 128—131.

3 (стр. 361). На обложке № 4 „Известий“ указан 1906 г.

Н. Сапогов.

К работам „Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь“, „О связанных величинах, не образующих настоящей цепи“, „Об одном случае испытаний, связанных в сложную цепь“, „Об испытаниях, связанных в цепь не наблюдаемыми событиями“

Задачи, решаемые в этих работах, состоят в доказательстве применимости центральной предельной теоремы теории вероятностей

к суммам $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ случайных величин X_i : 1) связанных в простую

однородную цепь; 2) связанных в сложную однородную цепь; 3) представляющих собою двумерные векторы, связанные в цепь; 4) связанных в цепь Маркова—Брунса. Все эти работы объединены единым методом исследования, подробно изложенным в первой из них, а именно в работе „Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь“. В этой работе изучаются величины X_i , образующие простую однородную цепь, причем особенно детально

исследуется предположение, что возможными значениями величин X_i являются $-1, 0, +1$. Для вычисления моментов величины S_n вводятся производящие функции

$$\Phi_n(t) = \sum_m p_{m,n} t^m$$

вероятностей $p_{m,n}$ равенств $S_n = m$ и исследуется производящая функция функций $\Phi_n(t)$

$$\sum_n \Phi_n(t) z^n = \frac{f(t, z)}{F(t, z)}.$$

Главную роль в дальнейших вычислениях играет знаменатель этой дроби $F(t, z)$, который оказывается многочленом третьей степени относительно z , причем, если ввести некоторые общего характера ограничения относительно вероятностей перехода, оказывается, что $F(1, z)$ имеет простой корень $z = 1$ и два других, модули которых больше 1. Функция $f(t, z)$, напротив, не играет большой роли, и ее влияние не сказывается на результатах вычислений при $n \rightarrow \infty$. Относительно моментов $M\left(\frac{S_n - an}{\sqrt{n}}\right)^i$, где a — надлежаще выбранное постоянное число, путем

исследования функции $\frac{f(t, z)}{F(t, z)}$ доказывается, что

$$M\left(\frac{S_n - an}{\sqrt{n}}\right)^i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} C^{\frac{i}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} t^i e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (1)$$

каково бы ни было целое

$$i = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$C = 2 \frac{\frac{\partial^2}{\partial u^2} F(e^u, e^{-au}) \Big|_{u=0}}{\frac{\partial}{\partial z} F(1, z) \Big|_{z=1}}.$$

Доказательство этого основано, главным образом, на том, что $z = 1$ является простым, и притом единственным минимальным по модулю корнем функции $F(1, z)$. Поэтому при этих условиях о корнях функции $F(1, z)$ аналогичное рассуждение, приводящее к (1), может быть воспроизведено и для многих других случаев величин S_n . Это дает основание Маркову в остальных из комментируемых работ опускать подробности в вычислениях; так же он поступает и в некоторых других своих работах.

Сделаем несколько замечаний по поводу отдельных мест рассматриваемых работ.

В конце работы „Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь“, где изучаются связанные в цепь величины X_i , возможные значения которых суть

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots,$$

Марков доказывает применимость к $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ центральной предельной теоремы при условиях, на наш взгляд сформулированных недостаточно отчетливо. На стр. 390 он говорит, что „... мы рассматриваем только такие цепи

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

где появление одних из чисел

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

не исключает окончательно возможности появления прочих“.

Другими словами, по современной терминологии, речь идет об однородных цепях, матрица вероятностей перехода которых (стохастическая матрица) является простой (С. Н. Бернштейн. Теория вероятностей, 1946, Добавление V), или все состояния цепи образуют один класс существенных состояний (А. Н. Колмогоров. Цепи Маркова со счетным множеством возможных состояний. Бюлл. Моск. Гос. унив., 1937).

Далее Марков выставляет такое условие: „... определитель

$$\begin{vmatrix} u & p_{\beta, \alpha} & p_{\gamma, \alpha} & \dots \\ p_{\alpha, \beta} & v & p_{\gamma, \beta} & \dots \\ p_{\alpha, \gamma} & p_{\beta, \gamma} & w & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

с произвольными элементами

$$u, v, w, \dots,$$

не приводится к произведению нескольких определителей того же типа“, а также: „указанный определитель не приводится явным образом к произведению нескольких определителей и при

$$u = p_{\alpha, \alpha}, v = p_{\beta, \beta}, \dots, w = p_{\gamma, \gamma}“.$$

Затем утверждается, что при этих условиях характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{\alpha, \alpha} - \lambda, & p_{\beta, \beta} & , & p_{\alpha, \gamma} & , & \dots \\ p_{\beta, \alpha} & , & p_{\beta, \beta} - \lambda, & p_{\beta, \gamma} & , & \dots \\ p_{\gamma, \alpha} & , & p_{\gamma, \beta} & , & p_{\gamma, \gamma} - \lambda, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

имеет только один корень с модулем $|\lambda| = 1$, а именно $\lambda = 1$, все же остальные корни имеют модуль $|\lambda| < 1$. Как известно, в случае простой стохастической матрицы, необходимым и достаточным условием для того, чтобы уравнение (2) имело только один максимальный по модулю корень, а именно $\lambda = 1$, является, принимая терминологию С. Н. Берштейна, регулярность рассматриваемой стохастической матрицы, другими словами, период ее должен быть равен 1.

Также недостаточно отчетливо выглядит формулировка аналогичного условия, исключающего некоторые особенные случаи рассматриваемой Марковим цепи, даваемая им на стр. 443—444 работы „Об испытаниях, связанных в цепь не наблюдаемыми событиями“. В той же работе, на стр. 462, Марков, иллюстрируя общие выводы, приводит без доказательства формулу

$$\Delta = \frac{ef}{(e+f)^2} \left\{ 1 - \frac{2kl}{(e+f)(e+f-1)} \right\},$$

указывая, что она получена им путем рассмотрения частных случаев, так как общие формулы дают для Δ весьма сложное выражение. В другой своей работе „Применение способа математических ожиданий к связанным рядам величин“ (Изв. Акад. Наук, 1915, № 14) он дает доказательство этой формулы во всех подробностях.

В заключение заметим, что для безукоризненности выводов Маркова о применимости центральной предельной теоремы к $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ необходимо потребовать еще, чтобы неотрицательная постоянная C , вводимая равенством (33) работы „Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь“, и аналогичные величины в других работах были больше нуля.

Н. Сапогов.

К работе „Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь“

1 (стр. 363). Работа опубликована в „Записках Академии Наук“ (по Физико-математическому отделению, т. XXII, № 9).

2 (стр. 365). См. наст. сборник, стр. 339.

К работе „О связанных величинах, не образующих настоящей цепи“

1 (стр. 399). Работа опубликована в 1911 г. в „Известиях Академии Наук“ (серия VI, т. V, стр. 113—126).

2 (стр. 404). См. Изв. Акад. Наук, 1907.

3 (стр. 404). См. наст. сборник, стр. 363.

4 (стр. 406). См. наст. сборник, стр. 231.

5 (стр. 406). См. наст. сборник, стр. 465.

К работе „Об одном случае испытаний, связанных в сложную цепь“

1 (стр. 417). Работа опубликована в 1911 г. в „Известиях Академии Наук“ (серия VI, т. V, стр. 171—186).

2 (стр. 419). См. наст. сборник, стр. 363.

3 (стр. 430). См. наст. сборник, стр. 339.

К работе „Об испытаниях, связанных в цепь ненаблюдаемыми событиями“

1 (стр. 437). Работа опубликована в 1912 г. в „Известиях Академии Наук“ (серия VI, т. VI, стр. 551—572).

2 (стр. 443). См. наст. сборник, стр. 363.

Н. Сапогов.

К работе

„Исследование общего случая испытаний, связанных в цепь“

Опубликована в 1910 г. в „Записках Академии Наук“ (по физико-математическому отделению, т. XXV, № 3).

В этой работе методом моментов доказываемость центральной предельной теоремы к суммам $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ случайных величин X_i , связанных в простую неоднородную цепь при предположении, что возможные значения для X_i суть 0 и 1 и

$$0 < p_0 < p'_i < 1 - p_0, \quad 0 < p_0 < p''_i < 1 - p_0,$$

где p'_i и p''_i — вероятности перехода:

$$p'_i = P\{X_i = 1 | X_{i-1} = 1\}, \quad p''_i = P\{X_i = 1 | X_{i-1} = 0\},$$

а p_0 — постоянное, не зависящее от n число.

Вопрос о применимости центральной предельной теоремы к суммам S_n при условии, когда допускается неограниченное приближение p_0 к нулю, оставлен А. Марковым открытым.

С. Н. Бернштейн в работе 1926 г. „Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин“ (Усп. матем. наук, вып. X, 1944) другим методом получил формулированный выше результат А. Маркова и доказал, что центральная предельная теорема остается применимой к S_n , если

$$p_0 = \frac{1}{n^\alpha},$$

где постоянная $\alpha < \frac{1}{5}$, и может быть не применимой, если $\alpha = \frac{1}{3}$.

В двух других работах, опубликованных в 1926 и в 1928 гг. (Изв. АН СССР, серия VI, т. XX, 1926, стр. 1459—1478; Докл. АН СССР, серия А, 1928, стр. 55—60), С. Н. Бернштейн доказал то же утверждение для случая произвольной постоянной $\alpha < \frac{1}{3}$.

Автором этих строк доказана применимость центральной предельной теоремы (Докл. АН СССР, т. LVIII, № 2, 1947, стр. 193—196) при условии

$$p_0 = \frac{\varphi(n)}{n^{\frac{1}{3}}},$$

где $\varphi(n)$ — произвольная, неограниченно возрастающая при $n \rightarrow \infty$ функция.

Ю. В. Линник (Изв. АН СССР, серия матем., т. XIII, 1949, стр. 65—94) рассматривал более общий случай неоднородной цепи ограниченных величин X_i с произвольным конечным числом возможных значений $x_i^{(k)}$, $1 \leq k \leq k_i$, для каждой величины X_i и доказал применимость центральной предельной теоремы к S_n , если все вероятности перехода отличаются от 0 и 1 не менее, чем на

$$\frac{1}{n^\alpha},$$

где постоянная $\alpha < \frac{1}{3}$ и

$$\frac{1}{k_i} \sum_{k=1}^{k_i} \left[x_i^{(k)} - \frac{1}{k_i} \sum_{k=1}^{k_i} x_i^{(k)} \right]^2 \geq c > 0.$$

Аналогичный результат в дальнейшем был получен и для случая цепи h -мерных векторов (Н. А. Сапогов, Докл. АН СССР, т. LXIX, № 2, 1949, стр. 133—135).

1 (стр. 467). См. наст. сборник, стр. 339.

2 (стр. 467). См. наст. сборник, стр. 363.

Н. Сапогов.

К статье „О задаче Якова Бернулли“

Опубликована в 1914 г. в „Известиях Академии Наук“ (серия VI, т. VIII, стр. 237—246).

В статье исследуется точность аппроксимации биномиального распределения с помощью интеграла Муавра-Лапласа. Основная мысль заключается в том, что дискретный характер биномиального распределения, при аппроксимации его непрерывным распределением всегда вызовет отклонения за счет „скачков вероятности“.

Изучается с помощью числового материала аппроксимация интеграла Муавра-Лапласа в точках скачков, причем делается вывод, что погрешность ее будет порядка максимальных скачков, что говорит в ее пользу.

1 (стр. 513). См.: О двух теоремах относительно вероятностей. Полн. собр. соч. П. Л. Чебышева, т. III, Математический анализ, Изд. АН СССР, М.—Л., 1948. Исследования Чебышева в этой статье относятся к случаю непрерывных распределений, но выводы пригодны и для данного случая.

2 (стр. 514). Числа $M^{(i)}$ в мемуаре П. Л. Чебышева суть коэффициенты разложения логарифма производящей функции суммы случайных величин по степени ее аргумента (в математической статистике они иногда называются полуинвариантами).

3 (стр. 516). Знак $\approx$ означает приближенное равенство.

4 (стр. 518). Знак $\sim$ означает наличие „скачка“.

5 (стр. 521). А. А. Марков имеет в виду свою книгу „Исчисление вероятностей“ (1913).

Ю. В. Линник.

К статье „О коэффициенте дисперсии“

Статья опубликована в 1916 г. в „Известиях Академии Наук“ (серия VI, т. X, № 9, стр. 709—718).

1 (стр. 525). Коэффициент дисперсии Q , введенный в указанной здесь форме А. А. Марковым, дает возможность установить некоторый критерий однородности в сериях независимых опытов — именно критерий для испытания гипотезы о постоянстве вероятности наблюдаемого в этих сериях события.

При верности этой гипотезы, Q будет иметь указанные в этой статье значения математического ожидания и дисперсии, допускающие, например, применение неравенства Чебышева.

2 (стр. 530). Вычисление можно провести так.

При

$$m=1, \quad s_i=s \quad (i=1, 2, \dots, \sigma)$$

имеем

$$n=\sigma \cdot s, \quad x_1+\dots+x_\sigma=1,$$

откуда один из $x_i=1$, а все остальные равны 0. Поэтому Q необходимо иметь вид

$$\begin{aligned} Q &= \frac{n(n-1)}{(\sigma-1)(n-1)} s \left[\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{n} \right)^2 + (\sigma-1) \frac{1}{n^2} \right] = \\ &= \frac{\sigma s^2}{\sigma-1} \left[\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\sigma s} \right)^2 + \frac{\sigma-1}{\sigma^2 s^2} \right] = 1. \end{aligned}$$

При $m=n-1$, один из $x_i=s-1$, а все остальные равны s . В этом случае

$$\begin{aligned} Q &= \frac{n(n-1)s}{(\sigma-1)(n-1)} \left[(\sigma-1) \left(1 - \frac{\sigma s-1}{\sigma s} \right)^2 + \left(\frac{s-1}{s} - \frac{\sigma s-1}{\sigma s} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{\sigma s^2}{\sigma-1} \left[\frac{1}{(\sigma s)^2} (\sigma-1) + \frac{(\sigma-1)^2}{(\sigma s)^2} \right] = 1. \end{aligned}$$

3 (стр. 533). Имеем

$$\frac{2\sigma^2 s(s-1)}{(\sigma s-2)(\sigma s-3)(\sigma-1)} = \frac{2}{\sigma-1} \frac{1-\frac{1}{s}}{\left(1-\frac{2}{\sigma s}\right)\left(1-\frac{3}{\sigma s}\right)}.$$

Остается показать, что при $\sigma \geq 5$

$$1 - \frac{1}{s} < \left(1 - \frac{2}{\sigma s}\right) \left(1 - \frac{3}{\sigma s}\right).$$

Имеем при $\sigma \geq 5$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{\sigma s}\right) \left(1 - \frac{3}{\sigma s}\right) &\geq \left(1 - \frac{2}{5s}\right) \left(1 - \frac{3}{5s}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{s} + \frac{6}{25} \frac{1}{s^2} > 1 - \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

4 (стр. 533). Это утверждение следует, например, из неравенства Чебышева в форме

$$P \{ (m - np) > n\xi \} < \frac{pq}{n\xi^2}$$

при подходящем выборе ξ .

5 (стр. 534). В указанной статье Е. Тихомирова формула К. Пирсона приводится в виде: „вероятная ошибка равна $0.674 \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$ “ (стр. 23).

Буквально понимаемая формула не имеет смысла уже хотя бы потому, что выборочный коэффициент корреляции r — величина случайная. Точный смысл и условия применимости формул К. Пирсона таковы: при выборках из нормальной двумерной генеральной совокупности (X, Y) , где коэффициент корреляции между X и Y равен ρ , и $|\rho| \neq 1$, при объеме выборки $n \rightarrow \infty$, выборочный коэффициент корреляции r приближается к нормальному распределению, причем математическое ожидание r стремится к ρ , а дисперсия r асимптотически равна $\frac{(1-\rho^2)^2}{n}$. (См. по этому поводу: Р. О. Кузьмин, Докл. АН СССР, т. XXII, № 6, 1939, стр. 302—305).

Разумеется, если нет оснований для предположения нормальности генеральной совокупности (X, Y) , формула К. Пирсона не будет иметь научного основания.

6 (стр. 535). А. А. Марков указывает здесь, что нельзя говорить о распределении выборочного коэффициента корреляции, не зная типа исходного „генерального“ распределения (X, Y) . В настоящее время существуют расчеты такого распределения для случая нормальности (X, Y) . Распределение выборочного коэффициента корреляции оказывается при этом зависящим только от „генерального“ коэффициента корреляции ρ и объема выборки n . При большом числе наблюдений это позволяет делать для данного случая оценку ρ .

Ю. В. Линник.

К статье „О коэффициенте дисперсии. (Вторая заметка)“

Статья опубликована в 1920 г. в „Известиях Российской Академии Наук“ (серия VI, т. XIV, стр. 191—198).

В этой статье дается асимптотическая формула для распределения коэффициента дисперсии А. А. Маркова при условии, что числа испытаний в сериях $s_1, s_2, \dots, s_\sigma$ неограниченно возрастают. Это даст новую возможность для составления критерия однородности с помощью коэффициента дисперсии при больших числах $s_1, s_2, \dots, s_\sigma$.

1 (стр. 542). Имеем при $h=1$:

$$\begin{aligned}\Delta f(z) &= f(z+1) - f(z) = (\sigma + 2z + 2) \dots (\sigma + 2z + 2r) - \\ &\quad - (\sigma + 2z) (\sigma + 2z + 2) \dots (\sigma + 2z + 2r + 2) = \\ &= [(\sigma + 2z + 2r) - (\sigma + 2z + 2) \dots (\sigma + 2z + 2r - 2) = \\ &= 2r (\sigma + 2z + 2) \dots (\sigma + 2z + 2r - 2)].\end{aligned}$$

Полагая:

$$\Delta^h f(z) = 2r(2r-2)\dots(2r-2h+2)(\sigma+2z+2h)\dots(\sigma+2z+2r-2),$$

найдем:

$$\begin{aligned}\Delta^{h+1} f(z) &= 2r(2r-2)\dots(2r-2h+2)(\sigma+2z+2+2h)\dots(\sigma+2z+2r) - \\ &\quad - 2r(2r-2)\dots(2r-2h+2)(\sigma+2z+2h)\dots(\sigma+2z+2r-2) = \\ &= 2r(2r-2)\dots(2r-2h+2)(2r-2h)(\sigma+2z+2h+2)\dots(\sigma+2z+2r-2).\end{aligned}$$

Полагая $z=0$, получим требуемый коэффициент.

2 (стр. 546). Более подробно обосновать возможность такой замены можно, например, так.

Полагаем $z = \alpha \sqrt{\sigma-3}$, считая большим числом. Тогда

$$\begin{aligned}e^{-z\sqrt{\sigma-3}} \left(1 + \frac{2z}{\sqrt{\sigma-3}}\right)^{\frac{\sigma-3}{2}} &= \{(1+2\alpha)e^{-2\alpha}\}^{\frac{\sigma-3}{2}} < \\ &< \left(1 + \frac{4\alpha^2}{1+2\alpha}\right)^{-\frac{\sigma-3}{2}}.\end{aligned}$$

Если $|\alpha| > (\sigma-3)^{-\frac{5}{12}}$, то это выражение меньше $e^{-(\sigma-3)\frac{1}{12}}$, т. е. величина эта мала. Если же $|\alpha| < (\sigma-3)^{-\frac{5}{12}}$, то $|z| < \sqrt[12]{(\sigma-3)}$ и

$$\ln e^{-z\sqrt{\sigma-3}} \left(1 + \frac{2z}{\sqrt{\sigma-3}}\right)^{\frac{\sigma-3}{2}} = -z^2 + o\left(\frac{1}{\sigma^{\frac{1}{4}}}\right),$$

т. е. функция e^{-z^2} доставляет хорошее приближение подинтегральной функции там, где эта последняя имеет ощутимые значения, а в других точках обе функции будут весьма малы. Легко подсчитать, что получается

хорошая аппроксимация и самих интегралов, а не только подинтегральных функций.

Ю. В. Линник.

К статье „Об одной задаче Лапласа“

Статья опубликована в 1915 г. в „Известиях Академии Наук“ (серия VI, т. IX, № 2, стр. 87—104.

1 (стр. 551). См. наст. сборник, стр. 439.

2 (стр. 552). Приводим краткий вывод этого основного для всей статьи рекуррентного соотношения.

После $r+1$ перекладывания в первом сосуде может оказаться x белых шаров (вероятность этого $z_{x, r+1}$) только при одном из следующих четырех не совместимых случаев.

1) После r перекладываний в первом сосуде был $x+1$ белый шар (вероятность этого $z_{x+1, r}$), при этом условии из первого сосуда вынут белый шар (вероятность $\frac{x+1}{n}$), а из второго — черный (вероятность этого $\frac{n_1 q - pr + x + 1}{n_1}$); перемножая эти три вероятности, получим первое слагаемое правой части рекуррентного соотношения.

2) После r перекладываний в первом сосуде был $x-1$ белый шар (вероятность этого $z_{x-1, r}$) и при этом условии из первого сосуда был вынут черный шар (вероятность этого $\frac{n-x+1}{n}$), а из второго — белый (вероятность этого $\frac{(n+n_1)p - x + 1}{n_1}$); перемножая эти вероятности, получим второе слагаемое.

3) После r перекладываний в первом сосуде было x белых шаров (вероятность этого $z_{x, r}$), при этом из первого сосуда вынут белый шар (вероятность этого $\frac{x}{n}$) и из второго — белый (вероятность этого $\frac{(n+n_1)p - x}{n_1}$), перемножая эти вероятности, получим третье слагаемое.

4) После r перекладываний в первом сосуде было x белых шаров (вероятность этого $z_{x, r}$), но при этом из первого сосуда вынут черный шар (вероятность этого $\frac{n-x}{n}$) и из второго сосуда — тоже черный шар (вероятность этого $\frac{n_1 q - pr + x}{n_1}$); перемножая эти возможности, получим четвертое, последнее слагаемое.

3 (стр. 553). Вкратце содержание этой статьи А. А. Маркова, изобилующей сложными выкладками, сводится к следующему.

Вместо случайной величины x — числа белых шаров в первом сосуде после r перекладываний — рассматривается линейная функция этой случайной величины (нормированное отклонение, по современной терминологии)

$$\mu = \frac{x - np}{\sqrt{\frac{2pqnn_1}{n + n_1}}}$$

или пропорциональная μ величина $t = x - np$. При условии, что $r \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} \right) \rightarrow \infty$, когда $n \rightarrow \infty$, $n_1 \rightarrow \infty$, показывается, что моменты μ приближаются к моментам нормального закона распределения. При $r \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} \right) = 2\rho = \text{const.}$ моменты μ по мере роста r, n, n_1 приближаются к моментам „обобщенного нормального закона“ с пертурбационным множителем $1 + L_1 e^{-2\rho} \varphi_1(\mu) + L_2 e^{-4\rho} \varphi_2(\mu) + \dots$, разложенным в ряд по полиномам Чебышева — Эрмита $\varphi_1(\mu), \varphi_2(\mu), \dots$

Однако, если только „начальное“ распределение x (до перекладываний) было нормальным, непосредственное суммирование ряда показывает, что и в этом случае предельный закон μ будет нормальным с плотностью

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{1 + l e^{-4\rho}}} e^{-\frac{(\mu - a e^{-2\rho})^2}{1 + l e^{-4\rho}}},$$

центр $a e^{-2\rho}$ и стандарт $\sqrt{1 + l e^{-4\rho}}$ которой зависят от ρ .

4 (стр. 560). Следует обратить внимание читателей на один весьма простой частный случай перекладывания шаров, приведенный в книге С. Н. Бернштейна „Теория вероятностей“ (изд. 4-е, стр. 127—130), где предположен известным состав обоих сосудов до перекладываний.

О. В. Сарманов.

К статье „О некоторых предельных формулах исчисления вероятностей“

Статья опубликована в 1917 г. в „Известиях Академии Наук“ (серия VI, т. XI, № 3, стр. 177—186).

1 (стр. 576). Вывод развернутого выражения вероятности $P_{m,n}^{a,b}$ можно найти, например, в книге С. Н. Бернштейна „Теория вероятностей“ (изд. 4-е, 1946, стр. 74).

2 (стр. 578). Мы можем найти наивероятнейшее (или наименее вероятное) значение m , заменив целочисленные переменные m на непрерывное переменное x в равенстве

$$\frac{P_{m+1, n}^{a, b}}{P_{m, n}^{a, b}} = \frac{a + m\alpha}{m + 1} \cdot \frac{n - m}{b + (n - m - 1)\alpha} = 1.$$

Полученное относительно x уравнение первой степени имеет корень

$$x = \frac{(a - \alpha)n - (b - \alpha)}{(a - \alpha) + (b - \alpha)},$$

если x целое, оно равно m , если x дробное, m отличается от x меньше чем на 1.

Из приведенного выражения очевидно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = \frac{a - \alpha}{(a - \alpha) + (b - \alpha)} = \frac{a - \alpha}{a + b - 2\alpha},$$

причем если $(a - \alpha)(b - \alpha) > 0$, то указанное предельное выражение есть правильная дробь. В этом случае наивероятнейшее (или наименее вероятное) значение m лежит внутри ряда $0, 1, 2, \dots, n$ и поскольку $|m - x| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n}.$$

3 (стр. 578). В том, что

$$\frac{\text{м. о. } m}{n} = \frac{a}{a + b}$$

при всех n можно убедиться, например, следующим образом. Обозначим через x_k число появлений белого шара при k -м вынимании; $x_k = 0$ или 1 с вероятностями $1 - p_k$ и p_k , где p_k — вероятность появления белого шара при k -м вынимании.

$$m = \sum_{k=1}^n x_k,$$

поэтому

$$\text{м. о. } m = \sum_{k=1}^n \text{м. о. } x_k = \sum_{k=1}^n p_k;$$

$p_1 = \frac{a}{a+b}$ по условию; $p_2 = p_1$, что легко проверить непосредственно; если доказано, что

$$p_{k-1} = p_{k-2} = \dots = p_2 = p_1,$$

то легко доказать по индукции, что

$$p_k = p_1.$$

Итак, все

$$p_k = p_1 = \frac{a}{a+b},$$

следовательно,

$$\text{м. о. } m = n \frac{a}{a+b},$$

т. е.

$$\frac{\text{м. о. } m}{n} = \frac{a}{a+b}$$

при всех n .

4 (стр. 578). См. наст. сборник, стр. 339.

5 (стр. 583). Упомянутый в этой фразе „... вывод, относящийся к вероятностям *a posteriori*“, можно найти, например, в добавлении четвертом книги С. Н. Бернштейна „Теория вероятностей“ (изд. 4-е, 1946, стр. 458—461).

6 (стр. 584). Следует рекомендовать вниманию читателей добавление третьей книги С. Н. Бернштейна „Теория вероятностей“ (изд. 4-е, 1946, стр. 448—457), где подробно исследована схема А. А. Маркова при помощи дифференциального уравнения, которому должно удовлетворить предельное выражение

$$n(p_{m+1,n}^{a,b} - p_{m,n}^{a,b}) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

7 (стр. 585). Обобщение задачи А. А. Маркова приведено в книге С. Н. Бернштейна „Теория вероятностей“ (изд. 4-е, стр. 135—139). Обобщение состоит в том, что после каждого вынимания шара из урны в нее добавляется R шаров разного цвета.

О. В. Сарманов.

К статье „Обобщение задачи о последовательном обмене шаров“

Опубликована в 1918 г. в „Известиях Российской Академии Наук“ (серия VI), т. XII, № 5, стр. 261—266.

1 (стр. 590). Приводим вывод этого уравнения для $m=2$.

Событие, состоящее в том, что за $n+1$ перекладывание из первого сосуда было вынуто α_1 белых шаров, а из второго α_2 белых шаров (вероятность этого события $P_{n+1}^{\alpha_1, \alpha_2}$), может произойти в одном из следующих четырех не совместимых случаев.

1) За n перекладываний из первого сосуда вынуто α_1 белых шаров, из второго α_2 белых шаров (вероятность этого $P_n^{\alpha_1, \alpha_2}$) и при этом условии в $n+1$ -м перекладывании из первого сосуда был вынут черный шар (вероятность этого $\frac{s_1 - (a_1 - \alpha_1 + \alpha_2)}{s_1}$) и из второго — тоже черный шар (вероятность этого $\frac{s_2 - (a_2 - \alpha_2 + \alpha_2)}{s_2}$).

Вероятность первого случая

$$P_n^{\alpha_1, \alpha_2} \frac{s_1 - a_1 + \alpha_1 - \alpha_2}{s_1} \frac{s_2 - a_2 + \alpha_2 - \alpha_2}{s_2}.$$

2) За n перекладываний из первого сосуда вынуто $\alpha_1 - 1$ белых шаров, а из второго $\alpha_2 - 1$ белых шаров, при этом в $n+1$ -м перекладывании из обоих сосудов вынут белый шар. Вероятность второго случая равна

$$P_n^{\alpha_1-1, \alpha_2-1} \frac{a_1 - \alpha_1 + \alpha_2}{s_1} \frac{a_2 - \alpha_2 + \alpha_1}{s_2}.$$

3) За n перекладываний из первого сосуда вынуто $\alpha_1 - 1$ белых шаров и α_2 — из второго, при этом в $n+1$ -м перекладывании из первого сосуда вынут белый, а из второго — черный шар. Вероятность третьего случая равна

$$P_n^{\alpha_1-1, \alpha_2} \frac{a_1 - \alpha_1 + 1 + \alpha_2}{s_1} \frac{s_2 - a_2 + \alpha_2 - \alpha_1 + 1}{s_2}.$$

4) За n перекладываний из первого сосуда вынуто α_1 белых шаров и $\alpha_2 - 1$ из второго, при этом в $n+1$ -м перекладывании из первого сосуда вынут черный шар, а из второго белый. Вероятность четвертого случая равна

$$P_n^{\alpha_1, \alpha_2-1} \frac{s_1 - a_1 + \alpha_1 - \alpha_2 + 1}{s_1} \frac{a_2 - \alpha_2 + 1 - \alpha_2}{s_2}.$$

Сумма этих четырех вероятностей равна $P_{n+1}^{a_1, a_2}$; если это равенство умножить на s_1, s_2 , мы и получим уравнение, приведенное А. А. Марковым (для случая $m=2$).

2 (стр. 590). $x_1, x_2, \dots, x_m$ есть числа белых шаров в первом, втором, ..., в m -м сосуде после n перекладываний, их сумма неизменно равна общему числу белых шаров

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Если бы все шары сложить в один сосуд, то величина

$$P = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{s_1 + s_2 + \dots + s_m}$$

дала бы нам вероятность вынуть из этого сосуда белый шар.

3 (стр. 591). Для примера приведем вывод первого из этих уравнений.

Введем следующие обозначения: $X_1^{(n)}$ — число белых шаров в первом сосуде после n перекладываний; $x_1^{(n+1)}$ — число белых шаров, вынутых из первого сосуда при $n+1$ -м перекладывании ($x_1^{(n+1)} = 0$ или 1); $x_m^{(n+1)}$ — то же для m -го сосуда.

$$X_1^{(n+1)} = X_1^{(n)} - x_1^{(n+1)} + x_m^{(n+1)},$$

так как шары, вынутые из m -го сосуда, перекладываются в первый;

$$\text{м. о. } X_1^{(n+1)} = \text{м. о. } X_1^{(n)} - \text{м. о. } x_1^{(n+1)} + \text{м. о. } x_m^{(n+1)},$$

но по определению

$$\text{м. о. } X_1^{(n+1)} = (x_1)_{n+1}, \quad \text{м. о. } X_1^{(n)} = (x_1)_n,$$

$$\text{м. о. } x_1^{(n+1)} = \frac{\text{м. о. } X_1^{(n)}}{s_1} = \frac{(x_1)_n}{s_1},$$

аналогично

$$\text{м. о. } x_m^{(n+1)} = \frac{(x_m)_n}{s_m},$$

следовательно,

$$(x_1)_{n+1} = (x_1)_n - \frac{(x_1)_n}{s_1} + \frac{(x_m)_n}{s_m}$$

или окончательно

$$s_1 s_m (x_1)_{n+1} = s_m (s_1 - 1) (x_1)_n + s_1 (x_m)_n.$$

4 (стр. 591). Предельные значения $(x_i)_\infty$ $i = 1, 2, \dots, m$ можно найти так: заменить $(x_i)_n, (x_i)_{n+1}$ в вышеприведенной системе на $(x_i)_\infty$ и решить полученную систему совместно с соотношением

$$(x_1)_\infty + (x_2)_\infty + \dots + (x_m)_\infty = a_1 + a_2 + \dots + a_m.$$

О. В. Сарманов.

БИБЛИОГРАФИЯ

В настоящую библиографию вошли сведения о трудах академика А. А. Маркова, опубликованных в печати, со времени появления первой работы Андрея Андреевича, напечатанной в 1879 г., до выхода в 1948 г. тома его избранных сочинений „Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля“.

Библиографические описания расположены в предлагаемом указе в хронологическом порядке по годам опубликования работ А. А. Маркова и в алфавите заглавий в пределах года. При этом отзывы и некрологи, принадлежащие перу А. А. Маркова, помещены не в общем алфавите каждого года, а в конце его. Далее в библиографии приведен алфавитный список литографированных курсов лекций, читанных Андреем Андреевичем, литература о его жизни и деятельности и, наконец, сокращенные обозначения названий журналов, принятые в тексте библиографии и полные их названия.

Указатель подготовлен в итоге просмотра книг и журналов Библиотеки Академии Наук СССР, Государственной Публичной Библиотеки им. М. Е. Салтыкова-Щедрина, Научной Библиотеки Ленинградского Государственного университета им. А. А. Жданова и каталогов Библиотеки Математического института Академии Наук СССР в Москве.

Библиография составлена сотрудником Библиографического отдела Библиотеки Академии Наук СССР В. П. Алексеевой под редакцией К. И. Шафрановского.

I. Труды А. А. Маркова, опубликованные в печати

Научные труды

1879

1. Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. — Mathem. Annalen, Lpz., Bd. 15, 1879, SS. 381—406.

Реф.: 1) Netto. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 11 (1879), Brl., 1881, S. 147; 2) F. Meyer. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 12 (1880), Brl., 1882, SS. 143—144.

См. 1880 г., № 3, 5.

1880

2. О Бернуллиевом вопросе. — Речи и протоколы VI-го Съезда русских естествоиспытателей и врачей в С.-Петербурге с 20-го по 30-е декабря 1879 г. СПб. 1880. Стр. 188—189.

3. О бинарных квадратичных формах положительного определителя. Рассуждение А. Маркова. СПб. 1880. VI, 48, 1 стр.

То же. — Успехи матем. наук, М.—Л., т. 3, 1948, вып. 5 (27), стр. 7—51 с илл., 1 л. портр. Вступит. статья Б. Н. Делоне (стр. 3—5).

Магистерская диссертация; изложение содержания диссертации с комментариями см. в кн.: Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. М.—Л. 1947. Стр. 146—193 с фиг.

См. также 1879 г., № 1.

4. $\left[\text{Разложение } \int_0^1 e^{-t^2} \text{ в непрерывную дробь} \right]$. — Речи и протоколы

VI-го Съезда русских естествоиспытателей и врачей в С.-Петербурге с 20-го по 30-е декабря 1879 г. СПб. 1880. Стр. 211.

5. Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. (Second mémoire). — Mathem. Annalen, Lpz., Bd. 17, 1880, SS. 379—399.

Реф.: 1) Netto. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 11 (1879), Brl., 1881, S. 147; 2) F. Meyer. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 12 (1880), Brl., 1882, SS. 143—144; 3) Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-ème série, t. 7, 1883, 2-de partie, pp. 236—237.

См. 1879 г., № 1 и 1880 г., № 3.

1882

6. Sur une question de Jean Bernoulli. — Mathem. Annalen, Lpz., Bd. 19, 1882, SS. 27—36.

Реф.: 1) F. Müller. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 13 (1881), Brl., 1883, S. 313; 2) A. H. — Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-ème série, t. 8, 1884, 2-de partie, p. 124.

1883

7. Доказательство трансцендентности чисел e и π . (Невозможность квадратуры круга). По статьям Эрмита и Линдемманна. Обработка А. Марков. СПб. 1883. 30 стр.

Реф.: A. Wassilieff. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 15 (1883), Brl., 1886, S. 370.

1884

8. Доказательство некоторых неравенств П. Л. Чебышева. — Сообщ. и проток. засед. Матем. общ. при Харьк. унив. 1883 г., II, 1884, стр. 105—114, 1 л. табл.

То же. Отд. оттиск. Харьков. 1884. 10 стр., 1 л. табл.

Démonstration de certaines inégalités de M. Tchébychef. — Mathem. Annalen, Lpz., Bd. 24, 1884, SS. 172—180, ill.

То же. Отд. оттиск. Б. м. и г. 172—180 стр.

То же, на русск. яз. — В кн.: А. А. Марков. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л. 1948. Стр. 15—24 с 2 фиг.; примечания Н. И. Ахиезера (стр. 377—378).

Реф.: 1) A. W a s s i l i e f f. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 17 (1885), Brl., 1888, SS. 168—171; 2) H o p p e. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 16 (1884), Brl., 1887, SS. 236—237; 3) Ах. Н. — Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-ème série, t. 11, 1887, 2-de partie, p. 7.

9. Записка магистра математики А. Маркова (занимающего кафедру Теории вероятностей в С.-Петербургском университете) о расчете вероятных оборотов эмеритальной кассы судебного ведомства. СПб. 1884. 13 стр. (Напечатано по распоряжению Министерства юстиции).

10. О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей. Рассуждение А. Маркова. СПб. 1884. [2], II, 131 стр. с фиг.

Докторская диссертация.

Реф.: A. W a s s i l i e f f. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 17 (1885), Brl., 1888, SS. 168—171.

11. Определение наибольшего и наименьшего значения некоторой величины. — Сообщ. и проток. засед. Матем. общ. при Харьк. унив. 1883 г., II, 1884, стр. 95—104.

То же. Отд. оттиск. Харьков. 1884. 10 стр.

Реф.: A. W a s s i l i e f f. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 17 (1885), Brl., 1888, SS. 168—171.

12. Определение некоторой функции по условию наименее отклоняться от нуля. — Сообщ. и проток. засед. Матем. общ. при Харьк. унив. 1884 г., I, 1884, стр. 83—92.

То же. Отд. оттиск. Харьков. 1884. 10 стр.

Реф.: A. W a s s i l i e f f. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 17 (1885), Brl., 1888, S. 369.

1885

13. Доказательство сходимости многих непрерывных дробей. — Сообщ. и проток. засед. Матем. общ. при Харьк. унив. 1885 г., 1, 1885, стр. 29—33.

То же. Отд. оттиск. Харьков. 1885. 5 стр.

Реф.: A. W a s s i l i e f f. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 17 (1885), Brl., 1888, S. 171.

14. Sur la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales. — Mathem. Annalen, Lpz., Bd. 25, 1885, SS. 427—432.

Реф.: H o p p e. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 17 (1885), Brl., 1888, S. 275.

1886

15. О распределении корней некоторых уравнений. — Сообщ. и проток. засед. Матем. общ. при Харьк. унив. 1885 г., II, 1886, стр. 89—98.

То же. Отд. оттиск. Харьков. 1885. 10 стр.

Реф.: A. W a s s i l i e f f. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 18 (1886), Brl., 1889, S. 161.

См. № 17.

16. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. [О предельных величинах интегралов]. — Ann. sci. de l'Ecole normale supér., Paris, sér. 3, t. 3, 1886, pp. 81—88.

То же, перевод на русск. яз. Л. И. Волковьского под загл. „Выдержка из одного письма Эрмиту“. — В кн.: А. А. М а р к о в. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л. 1948. Стр. 25—33; примечания Н. И. Ахиезера (стр. 378).

Реф.: 1) T o e p l i t z. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 18 (1886), Brl., 1889, SS. 248—249; 2) Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-ème série, t. 12, 1888, 2-de partie, p. 20.

17. Sur les racines de certaines équations. — Mathem. Annalen, Lpz., Bd. 27, 1886, SS. 143—150.

То же, перевод на русск. яз. Л. И. Волковьского под загл. „О корнях некоторых уравнений“. I. — В кн.: А. А. М а р к о в. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л. 1948. Стр. 34—43; примечания Н. И. Ахиезера (стр. 378—382).

Реф.: 1) Netto. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 18 (1886), Brl., 1889, S. 69; 2) Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-ème série, t. 13, 1889, 2-de partie, pp. 59—60.

См. № 15.

18. Sur les racines de certaines équations. Seconde note. — Mathem. Annalen, Lpz., Bd. 27, 1886, SS. 177—182.

То же, перевод на русск. яз. Л. И. Волковьского под загл. „О корнях некоторых уравнений“. II. — В кн.: А. А. Марков. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л. 1948. Стр. 44—50; примечания Н. И. Ахиезера (стр. 378—382).

Реф.: 1) Netto. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 18 (1886), Brl., 1889, S. 69; 2) Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-ème série, t. 13, 1889, 2-de partie, pp. 61—62.

См. также № 17.

19. Sur une question de maximum et de minimum proposée par M. Tchébycheff. — Acta mathem., Stockholm, 9, 1886, pp. 57—70.

Реф.: 1) Toeplitz. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 18 (1886), Brl., 1889, SS. 247—248; 2) E. G.—Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-ème série, t. 14, 1890, 2-de partie, p. 129.

1887

20. О дифференциальном уравнении гипергеометрического ряда. — Сообщ. и проток. засед. Матем. общ. при Харьк. унив. 1886 г., II, 1887, стр. 51—62.

То же. Отд. оттиск. Харьков. 1886. 12 стр.

Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique. (Première note). — Mathem. Annalen, Lpz., Bd. 28, 1887, SS. 586—593.

Реф.: 1) A. Wassilieff. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 19 (1887), Brl., 1890, SS. 330—331; 2) Hamburger. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 19 (1887), Brl., 1890, S. 330; 3) Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-ème série, t. 13, 1889, 2-de partie, p. 82.

См. также № 21.

21. О дифференциальном уравнении гипергеометрического ряда. (Вторая заметка). — Сообщ. и проток. засед. Матем. общ. при Харьк. унив. 1886 г., II, 1887, стр. 95—113.

То же. Отд. оттиск. Харьков. 1887. 20 стр.

Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique. (Seconde note). — Mathem. Annalen., Lpz., Bd. 29, 1887, SS. 247—258.

Реф.: 1) A. Wassilieff. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 19 (1887), Brl., 1890, SS. 330—331; 2) Ham bur-

ger. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. Bd. 19 (1887), Brl. 1890, S. 330; 3) Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-ème série, t. 13, 1889, 2-de partie, pp. 86—87.

См. также № 20.

1888

22. Table des valeurs de l'intégrale $\int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$. St.-Pbg. 1888. [2].

XXVII, [1] 98 p.

Доложено 12 января 1888 г.

Реф.: 1) A. Wassilieff. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 20 (1888), Brl., 1891, SS. 433—434; 2) J. T. — Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-ème série, t. 12, 1888, 1-ère partie, pp. 194—195.

1889

23. Исчисление конечных разностей. Отдел первый — второй. СПб. 1889—1891.

Отдел первый. Интерполирование. 1889. [4], 122 стр.; литература к отдельным главам.

Отдел второй. Уравнения в конечных разностях и суммирование. 1891. [4], 124 стр.; литература к отдельным главам.

Differenzenrechnung. Autorisierte deutsche Übersetzung von Th. Friesendorff und E. Prümm. Mit einem Vorworte von R. Mehmke. Lpz. 1886. V, [1], 194 S., ill.; литература к отдельным главам.

Реф. и рец.: 1) A. Wassilieff. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 21 (1889), Brl., 1892, SS. 285—286; 2) A. Wassilieff. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 23 (1891), Brl., 1894, S. 347; 3) Hamburger. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 27 (1896), Brl., 1899, S. 261; 4) J. T. — Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-me série, t. 21, 1897, 1-ère partie, pp. 137—140; 5) L. Autonne. — Rev. gén. d. sci. pures et appl., Paris, t. 8, 1897, № 18, p. 756; 6) Monatshefte f. Mathem. u. Physik, Wien, 8, 1897, S. 6; 7) G. Bohlmann. — Göttingische gelehrte Anzeigen, Brl., Bd. 1, 1898 № 7, SS. 536—547; 8) R. Fricke. — Zeitschr. f. Mathem. u. Physik, Lpz., 1898, Bd. 43 (Historisch-literarische Abteilung), SS. 143—147; 9) D. A. Murray. — Bull. of the Amer. mathem. soc., Lancaster. — New York 2nd series, vol. 5, 1899, № 6, pp. 313—316.

2-е изд. см. 1910 г., № 93.

24. К вопросу о черчении карт. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, т. 1, 1889, № 3, стр. 113—128.

То же. Отд. оттиск. СПб. 1888. 16 стр.

Реф.: B o b y l e w. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 20 (1888), Brl., 1891, SS. 870—871.

25. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, т. 1, 1889, № 5 и 6, стр. 250—276, 1 л. табл.

То же. Отд. оттиск. Б. м. и. г. 27 стр., 1 л. табл.

Реф.: 1) A. W a s s i l i e f f. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 21 (1889), Brl., 1892, SS. 267—268; 2) B o b y l e w. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 21 (1889), Brl., 1892, S. 383.

Об одном вопросе Д. И. Менделеева. 1889. См. 1890 г., № 27.

26. Sur les séries $\sum \frac{1}{k^2}$, $\sum \frac{1}{k^3}$. (Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite). — Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Paris, t. 109, 1889, pp. 934—935.

Реф.: 1) W e l t z i e n. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 21 (1889), Brl., 1892, S. 249; 2) Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-ème série, t. 15, 1891, 2-de partie, p. 68.

1890

27. Об одном вопросе Д. И. Менделеева. — Зап. Акад. Наук, СПб., т. 62, 1890, стр. 1—24.

То же. Отд. издание. СПб. 1889. 24 стр.

То же. — В кн.: А. А. М а р к о в. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л. 1948. Стр. 51—75; примечания Н. И. Ахиезера (стр. 382—383).

Доложено 24 октября 1889 г.

Реф.: A. W a s s i l i e f f. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 22 (1890), Brl., 1893, SS. 283—284.

28. Пример распространения способа Маклорена решать вопрос о сходимости рядов на многократные суммы. — Дневник VIII-го Съезда русских естествоиспытателей и врачей, 1890, № 6 (3 января), стр. 2.

Реферат сообщения в заседании Секции математики и астрономии Съезда 2 января 1890 г.

29. Mémoire sur la transformation des séries peu convergentes en séries très convergentes. St.-Pbg. 1890. [2], 18 p. (Mémoires de l'Académie des Sciences de St.-Petersbourg, VII série, т. 37, № 9).

Доложено 13 февраля 1890 г.

Реф.: A. W a s s i l i e f f. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 23 (1891), Brl., 1894, SS. 249—250.

1891

Исчисление конечных разностей. Отдел второй. Уравнения в конечных разностях и суммирование. 1891. См. 1889 г., № 23.

30. Sur la théorie des équations différentielles linéaires. Note de M. André Markoff, présentée par M. Hermite. — Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Paris, t. 113, 1891, pp. 790—791.

Реф.: 1) Wallenberg. — Jahrb. üb. d. Fortsch. d. Mathem., Bd. 23 (1891), Brl., 1894, SS. 316; 2) Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-ème série, t. 17, 1893, 2-de partie, p. 86.

31. Sur la théorie des équations différentielles linéaires. Note de M. André Markoff, présentée par M. Hermite. — Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Paris, t. 113, 1891, pp. 1024—1025.

Реф.: Wallenberg. — Jahrb. üb. d. Fortsch. d. Mathem., Bd. 23 (1891), Brl., 1894, S. 316.

32. Sur les équations différentielles linéaires. Note de M. André Markoff, présentée par M. Hermite. — Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Paris, t. 113, 1891, pp. 685—688.

Реф.: 1) Wallenberg. — Jahrb. üb. d. Fortsch. d. Mathem., Bd. 23 (1891), Brl., 1894, S. 316; 2) Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-ème série, t. 17, 1893, 2-de partie, pp. 85—86.

33. Sur une classe de nombres complexes. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. — Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Paris, t. 112, 1891, pp. 780—782, 1049—1050, 1123—1124, 1288.

Реф.: F. Meyer. — Jahrb. üb. d. Fortsch. d. Mathem., Bd. 23 (1891), Brl., 1894, S. 185.

1892

34. О целой функции, равной произведению двух гипергеометрических рядов. (Извлечение из письма к К. А. Андрееву). — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, т. 3, 1892, № 5, стр. 252—256.

То же. Отд. оттиск. Харьков. Б. г. 5 стр.

Реф.: A. Wassilieff. — Jahrb. üb. d. Fortsch. d. Mathem., Bd. 24 (1892), Brl., 1895, SS. 408—409.

35. Об одном линейном уравнении третьего порядка. — Матем. сб., М., т. 16, 1892, вып. 2, стр. 352—355.

То же. Отд. оттиск. Москва. Б. г. 4 стр.

Читано П. А. Некрасовым в заседании Математического общества 18 февраля 1892 г.

Реф.: 1) A. Wassilieff. — Jahrb. üb. d. Fortsch. d. Mathem., Bd. 24 (1892), Brl., 1895, S. 313; 2) B. Młodzieowski. — Rev. trimestr. d. publ. mathém., t. 2, 1-ère partie, Amsterdam, 1894, p. 106.

36. Sur la série hypergéométrique. (Extrait de deux lettres adressées à Mr. F. Klein). — Mathem. Annalen, Lpz., Bd. 40, 1892, SS. 313—316.

Реф.: 1) Hurwitz. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 24 (1892), Brl., 1895, S. 409; 2) J. C. Kluyver. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 1, 1-ère partie, Amsterdam, 1893, pp. 27—28; 3) J. D. — Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-ème série, t. 27, 1903, 2-de partie, p. 63.

37. Sur la série hypergéométrique. Note, présentée par M. Hermite. — Comptes rendus hebd. des séances de l'Acad. des sci., Paris, t. 114, 1892, pp. 54—55.

Реф.: 1) Hurwitz. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 24 (1892), Brl., 1895, SS. 409—410; 2) Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-ème série, t. 18, 1894, 2-de partie, p. 72.

38. Sur les nombres entiers dépendant d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire. (A la mémoire de G. Zolotareff). St.-Pbg. 1892. [2], 37 p. (Mémoires de l'Académie des Sciences de St.-Pétersbourg, VII série, t. 38, № 9).

Доложено 4 декабря 1891 г.

Реф.: 1) A. Wassilieff. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 24 (1892), Brl., 1895, SS. 182—183; 2) P. Molenbroek. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 2, 1-ère partie, Amsterdam, 1894, p. 110.

39. Доклад Комиссии по присуждению в 1890 г. премии им. В. Я. Буняковского. [Отзыв о работах Н. Я. Сонины: 1. „Об определении максимальных и минимальных свойств плоских кривых“. 1886; 2. „О приближенном вычислении определенных интегралов и вычислении входящих при этом целых функций“. 1887; 3. „О Бернуллиевых полиномах и их приложениях“. 1889; 4. „Об одной формуле приведения кратных интегралов“. 1889; 5. „О приведении одного кратного интеграла“. 1889; 6. „О представлении логарифма и Эйлера постоянного определенным интегралом“. 1889; 7. „О прерывной функции (χ) и ее применениях“. 1889]. — Зап. Акад. Наук, СПб., т. 67, 1892, стр. 16—21.

Совместно с В. Г. Имшенецким и П. Л. Чебышевым.

1893

40. Доказательство сходимости многих непрерывных дробей. — Зап. Акад. Наук, СПб., т. 72, 1893, стр. 8—15.

То же. Отд. издание. СПб. 1893. 8 стр.

Доложено 3 марта 1893 г.

Реф.: A. Wassilieff. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 25 (1893—1894), Brl., 1897, SS. 329—330.

41. О целой функции

$$x^n F\left(\frac{-n-\Delta}{2}, \frac{2k-n+1-\Delta}{2}, 1-\Delta, \frac{1}{x}\right) \times \\ \times F\left(\frac{-n+\Delta}{2}, \frac{2k-n+1+\Delta}{2}, 1+\Delta, \frac{1}{x}\right)$$

и о функциях более общего характера. St.-Pbg. 1893. [2], 37 p. (Mémoires de l'Académie des Sciences de St.-Petersbourg, VII série, т. 41, № 2).

Доложено 4 ноября 1892 г.

Реф.: 1) A. W a s s i l i e f f. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 25 (1893—1894), Brl., 1897, SS. 752—753; 2) D. A. G r a v é. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 5, 2-ème partie (Octobre 1896—Avril 1897), Amsterdam, 1897, p. 131.

1894

42. Извлечение из письма академика А. А. Маркова к профессору К. А. Андрееву [по поводу посмертного издания работы В. Г. Имшенецкого „Сравнение способа проф. Н. В. Бугаева с другими приемами разыскивания рациональных дробных решений дифференциальных уравнений“ в Сообщениях Харьковского математического общества, 2-я серия, 1893, т. 4, № 1 и 2]. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, т. 4, 1894, № 4, стр. 146—149.

То же. Отд. оттиск. Харьков. Б. г. 4 стр.

Реф.: 1) S i n t z o w. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 25 (1893—1894), Brl., 1897, S. 537; 2) M. T i k h o m a n d r i t z k y. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 2, 1-ère partie, Amsterdam, 1895, p. 137.

См. также № 44.

43. О функциях, получаемых при обращении рядов в непрерывные дроби. СПб. 1894. [2], 30 стр. (Приложение к 74-му тому Записок Акад. Наук, № 2).

То же. — В кн.: А. А. М а р к о в. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л. 1948. Стр. 76—105; примечания Н. И. Ахиезера (стр. 383—384).

То же, перев. на англ. яз., под загл. „Functions generated by developing power series in continued fractions“. — Duke mathem. Journ., Durham, vol. 7, 1940, pp. 85—96.

Доложено 13 октября 1893 г.

Реф.: A. W a s s i l i e f f. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 25 (1893—1894), Brl., 1897, S. 330.

44. По поводу комментария профессора К. А. Андреева [к статье академика В. Г. Имшенецкого о разыскании рациональных решений нелинейных дифференциальных уравнений, помещенного в Сообщения Харьковского математического общества, 2-я серия, т. 4, 1894, № 4]. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, т. 4, 1894, № 4, стр. 175—176.

То же. Отд. оттиск. Харьков. [1894]. 2 стр.

См. также № 42.

1895

45. О наивыгоднейших изображениях некоторой части данной поверхности вращения на плоскости. — Изв. Акад. Наук., СПб., V серия, т. 2, 1895, № 3, стр. 177—187.

То же. Отд. оттиск. СПб. 1895. 177—187 стр.

Доложено 11 января 1895 г.

Реф.: *Sintzow*. — *Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem.*, Bd. 26 (1895), Brl., 1898, SS. 772—773.

46. О предельных величинах интегралов. — Изв. Акад. Наук, СПб., V серия, т. 2, 1895, № 3, стр. 195—203.

То же. Отд. оттиск. СПб. 1895. 195—203 стр.

Доложено 25 января 1895 г.

Реф.: *A. Wassilieff*. — *Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem.*, Bd. 26 (1895), Brl., 1898, SS. 322—323.

47. О простых делителях чисел вида $1 + 4x^2$. — Изв. Акад. Наук, СПб., V серия, т. 3, 1895, № 1, стр. 55—58.

То же. Отд. оттиск. СПб. 1895. 55—58 стр.

Доложено 19 апреля 1895 г.

Реф.: *A. Wassilieff*. — *Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem.*, Bd. 26 (1895), Brl., 1898, S. 201.

См. также № 49.

48. О псевдоэллиптических интегралах вида $\int \frac{xdx}{(x^3 + c)\sqrt{x^3 + d}}$. — Зап. Акад. Наук, СПб., т. 75, 1895, стр. 111—128.

То же. Отд. издание. СПб. 1894. 18 стр.

Доложено 26 января 1894 г.

Реф.: *A. Wassilieff*. — *Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem.*, Bd. 25 (1893—1894), Brl., 1897, S. 773.

49. Démonstration d'un théorème de Tchébychef. (Extrait des papiers laissés par l'auteur). (Lettre adressée à M. Hermite). — Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Acad. des sci., Paris, t. 120, 1895, pp. 1032—1034.

Доказательство одной теоремы Чебышева. (Письмо к Эрмиту). — Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева. Т. I. Теория чисел. М.—Л. 1944. Стр. 283—284.

То же. — Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева. Т. I. Теория чисел. [Изд. 2-е, стереотипное]. М.—Л. 1946. Стр. 283—284.

Реф.: 1) P. Simon. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 26 (1895), Brl., 1898, SS. 200—201; 2) L. van Elfrinkhof. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 4, 1-ère partie, Amsterdam, 1896, p. 55.

См. также № 47.

50. Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues. — Acta mathem., Stockholm, 19, 1895, pp. 93—104.

То же, перевод на русск. яз. Л. И. Волковического под загл. „Два доказательства сходимости некоторых непрерывных дробей“. — В кн.: А. А. Марков. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л. 1948. Стр. 106—119; примечания Н. И. Ахиезера (стр. 384—387).

Реф.: 1) R. Müller. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 26 (1895), Brl., 1898, S. 234; 2) J. de Vries. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 3, 2-ème partie, Amsterdam, 1895, p. 147; 3) J. Hadamard. — Bull. d. sci. mathém., 2-ème série, t. 22, 1898, 2-de partie, pp. 215—216.

51. Note sur les fractions continues. — Изв. Акад. Наук, СПб., V серия, т. 2, 1895, № 1, стр. 9—13.

То же. Отд. оттиск. St.-Pbg. 1895. 9—13 стр.

Доложено 30 ноября 1894 г.

Реф.: 1) A. Wassilieff. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 26 (1895), Brl., 1898, SS. 233—234; 2) P. Molenbroek. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 3, 2-ème partie, Amsterdam, 1895, p. 146.

1896

52. Новые приложения непрерывных дробей. СПб. 1896. [2], 50 стр. (Записки Акад. Наук по Физико-математическому отделению, VIII серия, т. 3, № 5).

Доложено 30 августа 1895 г.

Реф.: A. Wassilieff. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 27 (1896), Brl., 1899, SS. 174—175.

См. также № 55.

53. О нулях целой функции Эрмита и функций Лямэ. (Извлечение из письма академика А. А. Маркова к проф. А. М. Ляпунову). — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, т. 5, 1896, № 1 и 2, стр. 74—80.

То же. Отд. оттиск. [Харьков]. Б. г. 7 стр.

Реф.: 1) А. W a s s i l i e f f. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 27 (1896), Brl., 1899, S. 334; 2) М. T i k h o m a n d r i t z k y. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 4, 2-ème partie, Amsterdam, 1896, p. 135.

См. также № 56.

54. Об одном дифференциальном уравнении. СПб. 1896. [2], 17 стр. (Записки Акад. Наук по Физико-математическому отделению, VIII серия, т. 3, № 10).

Доложено 10 января 1896 г.

Реф.: 1) А. W a s s i l i e f f. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 27 (1896), Brl., 1899, SS. 256—257; 2) D. G r a v é. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 6, 1-ère partie (1897, Avril — Octobre), Amsterdam, 1898, p. 139.

Differenzenrechnung. 1896. См. 1889 г., № 23.

55. Nouvelles applications des fractions continues. — Mathem. Annalen, Lpz., Bd. 47, 1896, SS. 579—597.

То же, перевод на русск. яз. Л. И. Волковыского под загл. „Новые приложения непрерывных дробей“. — В кн.: А. А. Марков. Избранные труды по теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л. 1948. Стр. 120—145; примечания Н. И. Ахиезера (стр. 387—388).

Реф.: 1) R. M ü l l e r. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 27 (1896), Brl., 1899, SS. 176—177; 2) J. C. K l u y v e r. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 5, 1-ère partie (1896, Avril — Octobre), Amsterdam, 1897, p. 32; 3) J. Drach. — Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-ème série, t. 29, 1905. 2-de partie, p. 97.

См. № 52.

56. Sur l'équation de Lamé. (Extrait d'une lettre adressée à Mr. Klein). — Mathem. Annalen, Lpz., Bd. 47, 1896, SS. 598—603.

Реф.: 1) H a m b u r g e r. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 27 (1896), Brl., 1899, S. 252; 2) J. C. K l u y v e r. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 5, 1-ère partie (1896, Avril — Octobre), Amsterdam, 1897, p. 32; 3) J. Drach. — Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-ème série, t. 29, 1905, 2-de partie, pp. 97—98.

См. также № 53.

1897

57. О дифференциальном уравнении гипергеометрического ряда с пятью параметрами. СПб. 1897. [2], 23 стр. (Записки Акад. Наук по Физико-математическому отделению, VIII серия, т. 5, № 5).

Доложено 9 октября 1896 г.

Реф.: 1) A. W a s s i l i e f f. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 28 (1897), Brl., 1900, SS. 288—289; 2) D. G r a v é. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 6, 1-ère partie (1897, Avril—Octobre), Amsterdam, 1898, p. 139.

1898

58. О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием. СПб. 1898. [2], 69 стр. (Записки Акад. Наук по Физико-математическому отделению, VIII серия, т. 6, № 5).

Recherches sur les valeurs extrêmes des intégrales et sur l'interpolation. — Acta mathem., Stockholm, 28, 1904, pp. 243—301.

То же, на русск. яз. — В кн.: А. А. М а р к о в. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л. 1948. Стр. 146—230; примечания Н. И. Ахиезера (стр. 388—389).

Доложено 15 января 1897 г.

Реф.: 1) S i n t z o w. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 29 (1898), Brl., 1900, SS. 252—253; 2) D. A. G r a v é. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 6, 2-ème partie (Octobre 1897—Avril 1898), Amsterdam, 1898, p. 154; 3) S t ä c k e l. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 35 (1904), Brl., 1906, SS. 372—373; 4) J. d e V r i e s. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 13, 1-ère partie (1904, Avril—Octobre), Amsterdam, 1905, p. 156; 5) P. D r o u i n. — Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-ème série, t. 41, 1917, 2-de partie, pp. 67—69.

59. Sur les racines de l'équation $e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$. — Изв. Акад. Наук, СПб., V серия, т. 9, 1898, № 5, стр. 435—446.

То же, перевод на русск. яз. Л. И. Волковыского, под загл. „О корнях уравнения $e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$ “. — В кн.: А. А. М а р к о в. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л. 1948. Стр. 231—243; примечания Н. И. Ахиезера (стр. 389).

Доложено 4 ноября 1898 г.

Реф.: 1) S i n t z o w. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 29 (1898), Brl., 1900, S. 188; 2) N. N. S a l t y k o w. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 9, 1-ère partie (1900, Avril—Octobre), Amsterdam, 1901, p. 150.

1899

60. Закон больших чисел и способ наименьших квадратов. (Извлечение из писем А. А. Маркова к А. В. Васильеву). — Изв. Физ.-матем. общ. при Казанск. унив., 2-я серия, т. 8, 1899, № 3, стр. 110—128.

То же. Отд. оттиск. Казань. 1898. 19 стр.

Реф.: 1) *Sintzow*. — *Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem.*, Bd. 29 (1898), *Brl.*, 1900, S. 188; 2) *A. Wassilief*. — *Rev. semestr. d. publ. mathém.*, t. 8, 2-ème partie (Octobre 1899 — Avril 1900), Amsterdam, 1900, p. 141.

См. № 63.

61. Записка академика А. А. Маркова по вопросам, рассмотренным IV поверочною эмеритальною комиссиею. [Эмеритальная касса военно-сухопутного ведомства]. Б. м. [1899]. 8 стр.

62. О доказательстве Сильвестера трансцендентности числа π . — Протоколы С.-Петербургского математического общества 1890—1899. СПб. 1899. Стр. 9—10.

Содержание сообщения в заседании Общества 15 февраля 1891.

Реф.: *Sintzow*. — *Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem.*, Bd. 30 (1899), *Brl.*, 1901, S. 386.

63. Ответ [на заметку П. А. Некрасова „По поводу статьи А. А. Маркова «Закон больших чисел и способ наименьших квадратов» и моего сообщения, доложенного Математической секции X-го Съезда русских естествоиспытателей и врачей в Киеве“, помещенную в Известиях Физико-математического общества при Казанском университете, 2-я серия, 1899, т. 9, № 1]. — Изв. Физ.-матем. общ. при Казанск. унив., 2-я серия, т. 9, 1899, № 3, стр. 41—43.

То же. Отд. оттиск. Казань. 1899. 3 стр.

Реф.: 1) *Sintzow*. — *Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem.*, Bd. 30 (1899), *Brl.*, 1901, S. 215; 2) *A. T. Pchéborsky*. — *Rev. semestr. d. publ. mathém.*, t. 11, 1-ère partie (1902, Avril — Octobre), Amsterdam, 1903, p. 142.

См. № 60.

64. Приложение непрерывных дробей к вычислению вероятностей. — Изв. Физ.-матем. общ. при Казанск. унив., 2-я серия, т. 9, 1899, № 2, стр. 29—34.

То же. Отд. оттиск. [Казань]. 1899. 6 стр.

Реф.: 1) *Sintzow*. — *Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem.*, Bd. 30 (1899), *Brl.*, 1901, S. 215; 2) *A. Wassilief*. — *Rev. semestr. d. publ. mathém.*, t. 8, 2-ème partie (Octobre 1899 — Avril 1900), Amsterdam, 1900, p. 142.

65. Сочинения П. Л. Чебышева, изданные под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Сони́на. СПб. 1899—1907.

Т. 1. 1899. VI, 714 стр., 1 л. портр.

Предисловие А. Маркова и Н. Сони́на (стр. III—IV).

Т. 2. 1907. IV, XX, 736 стр. с илл., 2 л. портр.

Oeuvres de P. L. Tchébychef, publiées par les soins de MM. A. Markoff et N. Sonin, membres ordinaires de l'Académie des Sciences. St.-Pbg. 1899—1907.

Т. I. 1899. VI, 714 p., 1 portr.

A. Markoff, N. Sonin. Préface (pp. III—IV).

Т. II. 1907. IV, XX, 736 p., ill., 2 portr.

Реф. и рец.: 1) G. Mannoury. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 9, 2-ème partie (Octobre 1900—Avril 1901), Amsterdam, 1901, p. 155; 2) G. D. — Bull. d. sci. mathém., Paris, 2-me série, t. 24, 1899, 1-ère partie, pp. 28—29; 3) Boll. di bibliogr. e storia d. sci. matem., Palermo — Torino, 1900, pp. 47—48.

1900

66. Исследование о предельных величинах интегралов. СПб. 1900. [2], 34 стр. (Записки Акад. Наук по Физико-математическому отделению, VIII серия, т. 10, № 9).

Доложено 19 апреля 1900 г.

Реф.: 1) Sintzow. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 31 (1900), Brl., 1902, SS. 313—314; 2) D. M. Sintzow. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 10, 2-ème partie (Octobre 1901—Avril 1902), Amsterdam, 1902, p. 153.

67. Исчисление вероятностей. СПб. 1900. [2], 279, [1] стр.

Реф. и рец.: Sintzow. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 31 (1900), Brl., 1902, SS. 228—230; 2) L'Enseignement mathém., Paris — Genève, III, 1900, pp. 299—230.

2-е изд. см. 1908 г., № 86.

3-е изд. см. 1913 г., № 102.

4-е изд. см. 1924 г., № 126.

68. О вероятности a posteriori. — Сообщ. Харьк. матем. общ., 2-я серия, т. 7, 1900, № 1, стр. 23—25.

То же. Отд. оттиск. Харьков. [1900]. 3, [1] стр.

Реф.: 1) Sintzow. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 31 (1900), Brl., 1902, S. 228; 2) M. A. Tikhomandritzky. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 9, 2-ème partie (Octobre 1900—Avril 1901), Amsterdam, 1901, p. 142.

См. 1914 г., № 107.

1901

69. О неопределенных тройничных квадратичных формах. — Изв. Акад. Наук, СПб., V серия, т. 14, 1901, № 5, стр. 509—523.

То же. Отд. оттиск. СПб. 1901. 509—523 стр.

Доложено 25 апреля 1901 г.

Реф.: 1) Sintzow. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 32 (1901), Brl., 1903, S. 212; 2) D. M. Sints of. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 10, 2-ème partie (Octobre 1901—Avril 1902), Amsterdam, 1902, p. 152.

См. 1903 г., № 78.

70. Об одном механизме Чебышева. — Изв. Акад. Наук, СПб., V серия, т. 14, 1901, № 2, стр. 201—214 с илл.

То же. Отд. оттиск. [СПб. 1901]. 201—214 стр. с черт.

Доложено 17 января 1901 г.

Реф.: D. M. Sints of. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 10, 2-ème partie (Octobre 1901—Avril 1902), Amsterdam, 1902, p. 152.

71. Теория сравнений. Сочинение П. Чебышева. Изд. 3-е. [Издатель А. Марков]. СПб. 1901. XVI, 279 стр.

А. Марков. От издателя (стр. III).

72. [Мнение орд. проф. Н. Е. Введенского, проф. А. А. Маркова, засл. проф. Ф. Ф. Петрушевского и других о порядке назначения на открывающиеся кафедры С.-Петербургского университета. СПб. 1901]. 40 стр. (На правах рукописи. Печатано с разрешения ректора С.-Петербургского университета).

1902

73. О неопределенных квадратичных формах с четырьмя переменными. — Изв. Акад. Наук, СПб., V серия, т. 16, 1902, № 3, стр. 97—108.

То же. Отд. оттиск. [СПб. 1902]. 97—108 стр.

Доложено 29 января 1902 г.

Реф.: D. M. Sints of. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 11, 1-ère partie (1902, Avril—Octobre), Amsterdam, 1903, p. 153.

74. О трех неопределенных тройничных квадратичных формах. — Изв. Акад. Наук, СПб., V серия, т. 17, 1902, № 2, стр. 109—119.

То же. Отд. оттиск. [СПб. 1902]. 109—119 стр.

Доложено 24 апреля 1902 г.

Реф.: 1) Sintzow. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 33 (1902), Brl., 1904, SS. 223—224; 2) D. M. Sints of. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 12, 1-ère partie (1903, Avril—Octobre), Amsterdam, 1904, p. 157.

1903

75. К вопросу о разорении игроков. (Из письма к проф. А. Васильеву). — Изв. Физ.-матем. общ. при Казанск. унив., 2-я серия, т. 13, 1903, № 1, стр. 38—45.

То же. Отд. оттиск. [Казань]. 1903. 8 стр.

Реф.: 1) *Sintzow*. — *Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem.*, Bd. 35 (1904), Brl., 1906, SS. 236—237; 2) *A. P. Pchéborsky*. — *Rev. semestr. d. publ. mathém.*, t. 12, 1-ère partie (1903 Avril — Octobre), Amsterdam, 1904, p. 152.

76. Об одном предложении алгебры, которое установлено Чебышевым. — Изв. Акад. Наук, СПб., V серия, т. 18, 1903, № 1, стр. 1—13.

То же. Отд. оттиск. [СПб. 1903]. 13 стр.

Доложено 8 января 1903 г.

Реф.: 1) *Sintzow*. — *Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem.*, Bd. 34 (1903), Brl., 1905, S. 101; 2) *D. M. Sintsof*. — *Rev. semestr. d. publ. mathém.*, t. 12, 1-ère partie (1903 Avril — Octobre), Amsterdam, 1904, p. 157.

77. Прения между академиками Ф. А. Бредихиным, О. А. Баклундом, Б. Б. Голицыным, А. М. Ляпуновым и А. А. Марковым, происходившие в заседаниях 1-го отделения Академии Наук в начале 1903 г. [в связи с избранием Б. Б. Голицына в ординарные академики]. СПб. 1903. 50 стр.

78. Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies. — *Mathem. Annalen*, Lpz., Bd. 56, 1903, SS. 233—251.

То же. Отд. оттиск. [Lpz.]. Б. г. 233—251 стр.

Реф.: 1) *Landau*. — *Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem.*, Bd. 33 (1902), Brl., 1904, S. 223; 2) *J. C. Kluver*. — *Rev. semestr. d. publ. mathém.*, t. 11, 1-ère partie (1902, Avril — Octobre), Amsterdam, 1903, p. 43.

См. также 1901 г., № 69.

1904

79. О предельных величинах отношения двух интегралов. — Изв. Акад. Наук, СПб., V серия, т. 21, 1904, № 1, стр. 23—32 с 1 илл.

То же. Отд. оттиск. [СПб. 1904]. 23—32 стр.

Доложено 1 сентября 1904 г.

Реф.: 1) *Sintzow*. — *Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem.*, Bd. 35 (1904), Brl., 1906, SS. 317—318; 2) *D. M. Sintsof*. — *Rev. semestr. d. publ. mathém.*, t. 14, 2-ème partie (Octobre 1905—Avril 1906), Amsterdam, 1906, p. 128.

Recherches sur les valeurs extrêmes des intégrales et sur l'interpolation. 1904. См. 1898 г., № 58.

1905

80. Tchebychef's theory of congruences. — Bull. of the Amer. mathem. soc., Lancaster — New York, 2nd series, vol. 11, 1905, № 6, p. 337.

Реф.: 1) L a m p e. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 36 (1905), Brl., 1908, S. 291; 2) D. J. K o r t e w e g. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 13, 2-ème partie (Octobre 1904—Avril 1905), Amsterdam, 1905, p. 7.

81. [Отзыв о работах Г. В. Хилля (G. W. Hill) в области небесной механики]. — Изв. Акад. Наук, СПб., V серия, т. 22, 1905, № 5, Отчет о [2-м] присужд. премии Ф. Ф. Шуберта, стр. 5—7.

Совместно с О. А. Баклундом, Н. Я. Сониным, А. М. Ляпуновым, А. А. Белопольским.

1906

82. Новый случай задачи Понселе о приближенном выражении квадратного корня из суммы квадратов. — Изв. Акад. Наук, СПб., V серия, т. 24, 1906, № 1/2, стр. 65—81.

То же. Отд. оттиск. СПб. 1906. 65—81 стр.

Доложено 8 февраля 1906 г.

Реф.: 1) S i n t z o w. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 37 (1906), Brl., 1909, SS. 202—203; 2) D. M. S i n t s o f. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 15, 1-ère partie (1906, Avril — Octobre), Amsterdam, 1907, p. 102.

83. Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга. — Изв. Физ.-матем. общ. при Казанск. унив., 2-я серия, т. 15, 1906, № 4, стр. 135—156.

То же. Отд. издание. Казань. 1907. [2], 22 стр.

Реф.: 1) S i n t z o w. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 37 (1906), Brl., 1909, S. 265; 2) Gr. G r o u s i n z e f f. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 21, 2-ème partie (Octobre 1912—Avril 1913), Amsterdam, 1913, pp. 115—116.

1907

84. Исследование замечательного случая зависимых испытаний. — Изв. Акад. Наук, СПб., VI серия, т. 1, 1907, № 3, стр. 61—80.

Доложено 14 февраля 1907 г.

Реф.: 1) S i n t z o w. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 38 (1907), Brl., 1910, S. 274; 2) D. S i n t s o f. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 16, 1-ère partie (1907, Avril — Octobre), Amsterdam, 1908, p. 118.

См. также 1908 г., № 88 и 1910 г., № 94.

85. О некоторых случаях теорем о пределе математического ожидания и о пределе вероятности. — Изв. Акад. Наук, СПб., VI серия, т. 1, 1907, № 16, стр. 707—714.

Доложено 24 октября 1907 г.

Реф.: 1) Sintzow. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 38 (1907), Brl., 1910, SS. 274—275; 2) D. Sintsof. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 16, 2-ème partie (Octobre 1907—Avril 1908), Amsterdam, 1908, p. 120.

Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга. 1907. См. 1906 г., № 83.

1908

86. Исчисление вероятностей. 2-е издание. СПб. 1908. IV, 283, [1] стр. с черт.; литература к отдельным главам.

Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nach der 2. Auflage des russischen Werkes übersetzt von Heinr. Liebmann. Lpz. u. Brl. 1912. VII, 318 S., ill.

Реф. и рец.: 1) Sintzow. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 39 (1908), Brl., 1911, SS. 291—292; 2) Timerding. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 43 (1912), H. 1, Brl., 1914, SS. 291—292; 3) H. Liebmann. — Jahresber. d. Deutsch. Mathem. Vereinigung, Lpz., Bd. 21, 1912, 2. Abt., S. 100; 4) A. Boulanger. — Bull. d. sci. mathém., Paris, sér. 2, t. 36, 1912, 1-ère partie, pp. 327—328; 5) Nyt tidsskr. f. mathem., København, B, t. 23, 1912, pp. 91—93; 6) A. C. Lunn. — Bull. of the Amer. mathem. soc., Lancaster—New York, 2nd ser., vol. 19, 1913, № 10, pp. 535—536; 7) C. S. Jackson. — The Mathem. gazette, London, vol. 7, 1913, № 105, p. 123; 8) Boll. di bibliogr. e storia d. sci. matem., Palermo—Torino, t. 15, 1913; 9) G. Bohlmann. — Arch. d. Mathem. u. Phys., Lpz. u. Brl., 3-te Reihe, Bd. 23, 1914, 1. Heft, SS. 47—50.

1-е изд. см. 1900 г., № 67.

3-е изд. см. 1913 г., № 102.

4-е изд. см. 1924 г., № 126.

87. О некоторых случаях теоремы о пределе вероятности. — Изв. Акад. Наук, СПб., VI серия, т. 2, 1908, № 6, стр. 483—496.

То же. Отд. оттиск. СПб. 1908. 483—496 стр.

Доложено 5 марта 1908 г.

Реф.: 1) Sintzow. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 39 (1908), Brl., 1911, S. 292; 2) D. Sintsof. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 16, 2-ème partie (Octobre 1907—Avril 1908), Amsterdam, 1908, p. 120.

88. Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь. СПб. 1908. [2], 29 стр. (Записки Акад. Наук по Физико-математическому отделению, VIII серия, т. 22, № 9).

Доложено 5 декабря 1907 г.

Реф.: 1) S i n t z o w. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 39 (1908), Brl., 1911, S. 292; 2) D. M. S i n t s o f. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 17, 1-ère partie (1908, Avril — Octobre), Amsterdam, 1909, p. 105.

89. Г. Ф. Вороной. 1868—1908. Некролог. — Изв. Акад. Наук, СПб., VI серия, т. 2, 1908, № 17, стр. 1247—1248.

Доложено 12 ноября 1908 г.

Реф.: S i n t z o w. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 39 (1908), Brl., 1911, S. 42.

90. [Записка об ученых трудах проф. Г. Ф. Вороного]. — Изв. Акад. Наук, СПб., VI серия, т. 2, 1908, № 1, стр. 11.

1909

91. Table des formes quadratiques ternaires indéfinies ne représentant pas zéro, pour tous les déterminants positifs $D \leq 50$. СПб. 1909. [2], 22 стр. (Записки Акад. Наук по Физико-математическому отделению, VIII серия, т. 23, № 7).

Доложено 26 ноября 1908 г.

Реф.: D. M. S i n t s o f. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 18, 2-ème partie (Octobre 1909—Avril 1910), Amsterdam, 1910, p. 122.

1910

92. Исследование общего случая испытаний, связанных в цепь. СПб. 1910. [2], 33 стр. (Записки Акад. Наук по Физико-математическому отделению, VIII серия, т. 25, № 3).

Доложено 3 февраля 1910 г.

Реф.: 1) S i n t z o w. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 41 (1910), Brl., 1913, SS. 261—262; 2) P. S o m o f f. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 19, 1-ère partie (1910, Avril — Octobre), Amsterdam, 1911, p. 107.

93. Исчисление конечных разностей. 2-е издание, пересмотренное и дополненное автором. Одесса. 1910. [На обложке: 1911]. VI, [2], 274 стр.; литература к отдельным главам.

Числення скінченних різниць. Переклад з другого російського видання Л. М. Матліса. Харків — Київ. ОНТИ. Державне науково-технічне видавництво України. 1936. 234, [1] стр.; література к отдельным главам.

Реф.: S i n t z o w. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 41 (1910), Brl., 1913, SS. 366—367.

1-е изд. см. 1889 г., № 23.

94. Recherches sur un cas remarquable d'épreuves dépendantes. — Acta mathem., Stockholm, 33, 1910, pp. 87—104.

Реф.: 1) L a m p e. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 40 (1909), Brl., 1912, S. 282; 2) J. de V r i e s. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 18, 2-ème partie (Octobre 1909 — Avril 1910), Amsterdam, 1910, p. 132; 3) P. Drouin. — Bull. d. sci. mathém., 2-ème série, t. 42, 1918, 2-de partie, p. 67.

См. также 1907 г., № 84 и 1908 г., № 88.

95. Исправление неточности. [По поводу статьи П. А. Некрасова „Математическая статистика, хозяйственное право и финансовые обороты“, напечатанной в Известиях Русского географического общества, т. 45]. — Изв. Акад. Наук, СПб., VI серия, т. 4, 1910, № 5, стр. 346.

Доложено 17 февраля 1910 г.

Реф.: 1) S i n t z o w. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 41 (1910), Brl., 1913, S. 271; 2) D. M. S i n t s o f. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 18, 2-ème partie (Octobre 1909 — Avril 1910), Amsterdam, 1910, p. 122.

См. также 1899 г., № 63, 64.

1911

96. О связанных величинах, не образующих настоящей цепи. — Изв. Акад. Наук, СПб., VI серия, т. 5, 1911, № 2, стр. 113—126.

Доложено 19 января 1911 г.

Реф.: 1) S i n t z o w. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 42 (1911), H. 1, Brl., 1913, S. 251; 2) P. S o m o f f. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 19, 2-ème partie (Octobre 1910 — Avril 1911), Amsterdam, 1911, p. 114.

97. Об одном случае испытаний, связанных в сложную цепь. — Изв. Акад. Наук, СПб., VI серия, т. 5, 1911, № 3, стр. 171—186.

Доложено 19 января 1911 г.

Реф.: 1) S i n t z o w. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 42 (1911), H. 1, Brl., 1913, SS. 251—252; 2) P. S o m o f f. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 19, 2-ème partie (Octobre 1910 — Avril 1911), Amsterdam, 1911, p. 114.

98. Об основных положениях исчисления вероятностей и о законе больших чисел. — Журн. Мин. народн. просв., СПб., нов. серия, ч. 31, 1911, февр., отд. Критика и библиография, стр. 369 — 374.

По поводу книги А. А. Чупрова „Очерки по теории статистики“.

99. Сочинения А. Н. Коркина, изданные под редакцией проф. В. А. Стеклова и акад. А. А. Маркова, при содействии проф. К. А. Поссе, акад. А. М. Ляпунова и проф. А. Н. Крылова. Издание Физ.-матем. факультета С.-Петербургского университета. Т. I. (С портретами А. Н. Коркина и Е. И. Золотарева). СПб. 1911. [6], V, 469 стр., 2 л. портр.

1912

100. Об испытаниях, связанных в цепь не наблюдаемыми событиями. — Изв. Акад. Наук, СПб., VI серия, т. 6, 1912, № 8, стр. 551—572.

Доложено 11 апреля 1912 г.

Реф.: 1) *Sintzow*. — *Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem.* Bd. 43 (1912), H. 1, Brl., 1914, S. 296; 2) *P. Somoff*. — *Rev. trimestr. d. publ. mathém.*, t. 21, 1-ère partie (1912, Avril — Octobre), Amsterdam, 1913, p. 123.

101. Отповедь П. А. Некрасову. [По поводу статьи П. А. Некрасова „К основам закона больших чисел, способа наименьших квадратов и статистики“, помещенной в Математическом сборнике, т. 27, вып. 4]. — Матем. сб., М., т. 28, 1912, вып. 2, стр. 215—227.

То же. Отд. оттиск. М. 1911. 15 стр.

Реф.: *Sintzow*. — *Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem.*, Bd. 43 (1912), H. 1, Brl., 1914, S. 292.

Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1912. См. 1908 г., № 86.

1913

102. Исчисление вероятностей. 3-е издание, пересмотренное и значительно дополненное. С портретом Якова Бернулли. СПб. 1913. [2], IV, 381, [1] стр. с черт., 1 л. портр. (К 200-летнему юбилею закона больших чисел).

Содержание: Предисловие 3-го издания (стр. I—II), Предисловие 2-го издания (стр. III—IV), Исчисление вероятностей (стр. 1—298), Приложение метода математических ожиданий — метода моментов — к выводу второй предельной теоремы исчисления

вероятностей (стр. 299—374), Таблица значений $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ (стр. 375—381); литература к отдельным главам.

1-е изд. см. 1900 г., № 67.

2-е изд. см. 1908 г., № 86.

4-е изд. см. 1924 г., № 126.

103. Пример статистического исследования над текстом „Евгения Онегина“, иллюстрирующий связь испытаний в цепь. — Изв. Акад. Наук, СПб., VI серия, т. 7, 1913, № 3, стр. 153—162.

То же. Отд. оттиск. СПб. 1913. 153—162 стр.

Доложено 23 января 1913 г.

Реф.: P. Somoff. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 21, 2-ème partie (Octobre 1912—Avril 1913), Amsterdam, 1913, p. 120.

104. Démonstration du second théorème — limite du calcul des probabilités par la méthode les moments. (Supplément à la 3-me édition russe du „Calcul des probabilités“). Avec un portrait de Jacques Bernoulli. St.-Pbg. 1913. IV, 66 p., 1 portrait. (Bicentenaire de la loi des grands nombres. 1713—1913).

Прил.: „Littérature“ (8 назв.).

Реф. и рец.: 1) Pólya. — Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 45 (1914—1915), H. 3, Brl. u. Lpz., 1922, SS. 1262—1263; 2) Boll. di bibliogr. e storia d. sci. matem., Palermo — Torino, 1915, pp. 55—57.

См. также 1913 г., № 102 и 1924 г., № 126.

105. Предисловие. — В кн.: Часть четвертая сочинения Якова Бернулли „Ars coniectandi.“ СПб. 1913. (К 200-летнему юбилею закона больших чисел). Стр. V—VI.

1914

106. Двухсотлетие закона больших чисел. — Вестн. опытно. физ. и элемент. матем., Одесса, 2-й серии 1-го семестра № 3, 1914, № 603, стр. 59—64 с портр.

То же. Отд. оттиск. Одесса. 1914. 8 стр. с портр.

Речь А. А. Маркова на торжественном собрании Академии Наук 1 декабря 1913 г. в ознаменование 200-летия закона больших чисел, включенная в программу заседания под названием „Очерк развития закона больших чисел как совокупности математических теорем“.

107. О вероятности a posteriori. (Вторая заметка). — Сообщ. Харьк. Матем. общ., 2-я серия, т. 14, 1914, № 3, стр. 105—142.

То же. Отд. оттиск. Харьков. Б. г. 8 стр.

Реф.: Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 48 (1921—1922), H. 8, Brl. u. Lpz., 1928, S. 1407.

См. 1900 г., № 68.

108. О задаче Якова Бернулли. — Изв. Акад. Наук, СПб., VI серия, т. 8, 1914, № 3, стр. 237—246.

Доложено 22 января 1914 г.

Реф.: Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 49 (1923), Brl. u. Lpz., 1927/28, S. 727; 2) P. Somoff. — Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 22, 2-ème partie (Octobre 1913—Avril 1914), Amsterdam, 1914, p. 112.

109. Письмо в редакцию [по поводу неправильной справки о мемуаре Бьенемэ „Considérations à l'appui de la découverte de Laplace“, приведенной в заметке И. Ш. „Памяти Якова Бернулли“. (Страх. обозр., 1914, № 1, стр. 16—17)]. — Страх. обозр., Пг., 1914, № 8 (авг.), стр. 558.

1915

110. К вопросу о преподавании математики в средних учебных заведениях. (По поводу одного задачника). — Журн. Мин. народн. просв., СПб., нов. серия, ч. 56, 1915, март, стр. 126—130.

То же. Отд. оттиск. [СПб]. Б. г. 126—130 стр.

111. К вопросу о функциях, наименее уклоняющихся от нуля. — Сообщ. Харьк. Матем. общ., 2-я серия, т. 14, 1915, № 5, стр. 198—199.

То же. Отд. оттиск. Харьков. Б. г. 2 стр.

Реф.: Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 48 (1921—1922), H. 8, Brl. u. Lpz., 1928, S. 1371.

112. О проекте П. С. Флорова и П. А. Некрасова преподавания теории вероятностей в средней школе. — Журн. Мин. народн. просв., СПб., нов. серия, ч. 57, 1915, Май, отд. Современная летопись, стр. 26—34.

113. Об одной задаче Лапласа. — Изв. Акад. Наук, Пг., VI серия, т. 9, 1915, № 2, стр. 87—104.

То же. Отд. оттиск. Пг. 1915. 87—104 стр.

Доложено 7 января 1915 г.

Реф.: Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 48 (1921—1922), Brl. u. Lpz., 1928, S. 1404.

114. Применение способа математических ожиданий к связанным рядам величин. — Изв. Акад. Наук, Пг., VI серия, т. 9, 1915, № 14, стр. 1453—1484.

То же. Отд. оттиск. Пг. 1915. 1453—1484 стр.

Доложено 16 сентября 1915 г.

Реф.: Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 48 (1921—1922), H. 8, Brl. u. Lpz., 1928, S. 1405.

115. Николай Яковлевич Сонин. Некролог. — Изв. Акад. Наук, Пг., VI серия, т. 9, 1915, № 5, стр. 369—372, 1 л. портр.

Читано 7 марта 1915 г.; прил. список сочинений акад. Н. Я. Сонины (стр. 371—372).

1916

116. О коэффициенте дисперсии. — Изв. Акад. Наук, Пг., VI серия, т. 10, 1916, № 9, стр. 709—718.

То же. Отд. оттиск. Пг. 1916. 709—718 стр.

Доложено 27 апреля 1916 г.

Реф.: Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 48 (1921—1922), Н. 8, Brl. u. Lpz., 1928, S. 1406.

См. также 1920 г., № 124.

117. О коэффициенте дисперсии для малых чисел. — Страх. обозр., Пг., 1916, № 2 (февраль), стр. 55—59.

То же. Отд. оттиск. Пг. 1916. 5 стр.

118. Об одном применении статистического метода. — Изв. Акад. Наук, Пг., VI серия, т. 10, 1916, № 4, стр. 239—242.

То же. Отд. оттиск. Пг. 1916. 239—242 стр.

Доложено 17 февраля 1916 г.

Реф.: Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 48 (1921—1922), Н. 8, Brl. u. Lpz., 1928, S. 1407.

119. Доклад Комиссии по обсуждению некоторых вопросов, касающихся преподавания математики в средней школе. — Изв. Акад. Наук, Пг., VI серия, т. 10, 1916, № 2, стр. 66—80.

Состав комиссии: А. А. Марков, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, Н. Я. Цингер, Д. К. Бобылев, А. Н. Крылов.

1917

120. О некоторых предельных формулах исчисления вероятностей. — Изв. Акад. Наук, Пг., VI серия, т. 11, 1917, № 3, стр. 177—186.

То же. Отд. оттиск. Пг. 1917. 177—186 стр.

Доложено 18 января 1917 г.

Реф.: Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 48 (1921—1922), Н. 8, Brl. u. Lpz., 1928, S. 1406.

121. Марков, Андрей Андреевич. [Автобиография]. — Материалы для биографического словаря действительных членов Академии Наук. Ч. 2-я. М—Я. Пг. 1917. (Акад. Наук. 1889—1914. III). Стр. 16—18.

Список трудов А. А. Маркова (стр. 16—18).

1918

122. Несколько задач исчисления вероятностей. — Изв. Акад. Наук, Пг., VI серия, т. 12, 1918, № 18, стр. 2101—2116.

То же. Отд. оттиск. Пг. 1919. [2], 2101—2116, [2] стр.

Доложено 30 октября 1918 г.

Реф.: Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 48 (1921—1922),
H. 8, Brl. u. Lpz., 1928, S. 1406.

123. Обобщение задачи о последовательном обмене шаров. — Изв. Акад. Наук, Пг., VI серия, т. 12, 1918, № 5, стр. 261—266.

Доложено 8 ноября 1917 г.

Реф.: Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 48 (1921—1922),
H. 8, Brl. u. Lpz., 1928, SS. 1405—1406.

1920

124. О коэффициенте дисперсии. (Вторая заметка). — Изв. Акад. Наук, Пг., VI серия, т. 14, 1920 (1922), № 1—18, стр. 191—198.

Доложено 19 мая 1920 г.

Реф.: Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 48 (1921—1922),
H. 8, Brl. u. Lpz., 1928, S. 1281.

См. также 1916 г., № 116.

1922

125. Трудность метода моментов; два примера неполного разрешения ее. — Изв. Акад. Наук, Л., VI серия, т. 16, 1922 (1924), № 1—18, стр. 281—286.

Доложено 8 февраля 1922 г.

Реф.: Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 32, 1-ère partie,
Groningen, 1926, pp. 160—161.

1924

126. Исчисление вероятностей. Переработанное автором 4-е, по-смертное, издание. С портретом автора и биографическим очерком проф. А. С. Безиковича. Научно-технической секцией Гос. Ученого совета рекомендовано в качестве руководства для высших учебных заведений. М. Госиздат. 1924. [2], XIV, 588, [1] стр., 1 л. портр. (Специальные пособия для высшей школы).

Содержание: А. С. Безикович. Биографический очерк (стр. III—XIV), [А. А. Марков]. Исчисление вероятностей (стр. 1—486), Приложение метода математических ожиданий — метода моментов — к выводу второй предельной теоремы исчисления вероятностей (стр. 487—588); литература к отдельным главам.

1-е изд. см. 1900 г., № 67.

2-е изд. см. 1908 г., № 86.

3-е изд. см. 1913 г., № 102.

127. Об эллипсоидах (эллипсах) рассеяния и корреляции. — Изв. Акад. Наук, Л., VI серия, т. 18, 1924, № 1—11, стр. 117—126.

Доложено 9 февраля 1921 г.

Реф.: 1) Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem., Bd. 50 (1924), Brl. u. Lpz., 1928/29, S. 350; 2) Rev. semestr. d. publ. mathém., t. 32, 1-ère partie (Octobre 1924—Avril 1925), Groningen, 1926, p. 162.

1936

Числення скінчених різниць. 1936. См. 1910 г., № 93.

1940

Functions generated by developing power series in continued fractions. 1940. См. 1894 г., № 43.

1944

Доказательство одной теоремы Чебышева. 1944. См. 1895 г., № 49.

128. Пафнутий Львович Чебышев. Краткий биографический очерк. — В кн.: Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева. Т. I. Теория чисел. М.—Л. 1944. Стр. 5—9.

То же. — В кн.: Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева. Т. I. Теория чисел. [Изд. 2-е, стереотипное]. М.—Л. 1946. Стр. 5—9.

Совместно с Н. Я. Сониным.

1946

Доказательство одной теоремы Чебышева. (Письмо к Эрмиту). 1946. См. 1895 г., № 49.

Пафнутий Львович Чебышев. Краткий биографический очерк. 1946. См. 1944 г., № 128.

1948

129. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. Биографический очерк и примечания Н. И. Ахиезера. М.—Л. ОГИЗ. Гос. изд. технико-теорет. литер. 1948. 410, [2] стр. с илл., 1 л. портр. (Классики естествознания. Математика. Механика. Физика. Астрономия).

Содержание: От издательства (стр. 5—6), Н. И. А х и е з е р. А. А. Марков. Биографический очерк (стр. 7—12), Избранные труды [А. А. Маркова]: Доказательство некоторых неравенств

П. Л. Чебышева (стр. 15—24, см. 1884 г., № 8), Выдержка из одного письма Эрмиту (стр. 25—33, см. 1886 г., № 16), О корнях некоторых уравнений. I (стр. 34—43, см. 1886 г., № 17), О корнях некоторых уравнений. II (стр. 44—50, см. 1886 г., № 18), Об одном вопросе Д. И. Менделеева (стр. 51—75, см. 1890 г., № 27), О функциях, получаемых при обращении рядов в непрерывные дроби (стр. 76—105, см. 1894 г., № 43), Два доказательства сходимости некоторых непрерывных дробей (стр. 106—119, см. 1895 г., № 50), Новые приложения непрерывных дробей (стр. 120—145, см. 1896 г., № 55), О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием (стр. 146—230, см. 1898 г., № 58), О корнях уравнения $e^x \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$ (стр. 231—243, см. 1898 г., № 59), Лекция о функциях, наименее уклоняющихся от нуля (стр. 244—291, см. № 147), Лекции о непрерывных дробях (стр. 292—374, см. № 146), Н. И. Ахиезер. Примечания (стр. 377—390); Приложение: К. А. Поссе. К вопросу о предельных значениях интегралов или сумм (стр. 391—410).

О бинарных квадратичных формах положительного определителя. 1948. См. 1880 г., № 3.

Литографированные курсы лекций

130. [Введение в анализ. Лекции 1881—82 г. СПб.]. Литогр. С. Ф. Яздовского. [1884]. Листы 1—25. 396 стр. с черт. [На каждом листе подпись: пр.-доц. А. Марков; без заглавия, тит. листа и обложки, — заглавие взято из сигнатуры и с корешка переплета].

131. Введение в анализ. Лекции, читанные в СПб. университете в 1881/82 ак. году приват-доцентом Марковым. Издание студента Ф. Подгурского. СПб. Литогр. Яздовского. Б. г. Листы 1—6. 96 стр. с черт. [Листы 1—3 подписаны: А. Марков; конец отсутствует; описано по экземпляру Библиотеки Академии Наук СССР].

132. Введение в анализ. [СПб.]. Литогр. Н. Евстифеева. [1891]. Листы 1—22. 352 стр. с черт. [На каждом листе подпись: проф. А. Марков; без тит. листа и обложки; вместо стр. 217—224: „Объяснительные замечания к теории определителей.“ Сост. И. Алексеевский (стр. 1—8, отдельная пагинация); в конце вплетено: [Сферическая тригонометрия]. Листы 1—4 (см. № 148)].

133. Введение в анализ. [СПб.]. Литогр. А. Ф. Маркова. [1898]. Листы 1—15. 240 стр. с черт. [На каждом листе подпись: профессор А. Марков; без тит. листа и обложки; на корешке переплета: листы 1—22].

134. Введение в анализ. [Издатель П. Лучин. СПб.]. Литогр. А. Ф. Маркова. Б. г. Листы 1—22. 352 стр. с черт. [На каждом листе подпись: профессор А. Марков; без тит. листа и обложки].

Рекомендуемая литература (стр. 120, 352).

135. Введение в анализ. [Издание студента В. Звонарева. СПб.]. Литогр. А. Маркова. Б. г. Листы 1—22. 352 стр. с черт. [На листах 1—21а подпись: за профессора Вл. Звонарев; листы 21 б, 22 подписаны: профессор А. Марков; без тит. листа и обложки; в конце вплетено: Сферическая тригонометрия. Листы 1—5 (см. № 152)].

Рекомендуемая литература (стр. 352 — 9 назв.).

136. Введение в анализ и сферическая тригонометрия. Лекции профессора А. Маркова 1886/7 г. СПб. Типо-литогр. А. Ф. Маркова. 1888. Листы 1—4, 1—22. [2], 62, 352 стр. с черт. [На каждом листе подпись: проф. А. Марков; тит. лист отпечатан типографским способом].

137. Введение в анализ и сферическая тригонометрия. Лекции профессора А. А. Маркова. Издание студента В. П. Звонарева. СПб. Типо-литогр. А. Ф. Маркова. 1894. Листы 1—22. 352 стр. (С.-Петербургский университет). [На листах 1—21а подпись: За профессора Вл. Звонарев; листы 21б, 22 подписаны: профессор А. Марков; без тит. листа; обложка отпечатана типографским способом].

Рекомендуемая литература (стр. 352 — 9 назв.).

138. [Дифференциальное исчисление. Лекции А. А. Маркова 1897/8. СПб.]. Литогр. Маркова. Б. г. Листы 1—21. 336 стр. [На каждом листе подпись: Проф. А. Марков; без тит. листа и обложки].

139. Дифференциальное исчисление. СПб. Типо-литогр. А. Ф. Маркова. 1898. Листы 1—21. 336 стр. с черт. (С.-Петербургский университет). [На каждом листе подпись: проф. А. Марков; без тит. листа; обложка отпечатана типографским способом].

140. Дифференциальное исчисление. Лекции проф. А. А. Маркова СПб. Типо-литогр. Маркова. 1901. Листы 1—21. 332 стр. с черт. (С.-Петербургский университет). [На каждом листе подпись: за профессора Н. Попов; без тит. листа; обложка отпечатана типографским способом].

141. Дифференциальное исчисление. Лекции профессора А. А. Маркова. Издание студента В. Мрочка. СПб. Типо-литогр. Петш. 1903. Листы 1—19. 304 стр. с черт. (С.-Петербургский университет). [На каждом листе подпись: издатель В. Мрочек; без тит. листа; обложка отпечатана типографским способом].

142. Дифференциальное исчисление. Лекции профессора А. А. Маркова. Издание студента В. Мрочка. СПб. Типо-литогр. Петш. 1904.

Листы 1—19. 304 стр. с черт. (С.-Петербургский университет). [На каждом листе подпись: издатель В. Мрочек; без тит. листа; обложка отпечатана типографским способом].

143. Исчисление конечных разностей. Курс приват-доцента А. Маркова. 1885/6 года. [СПб.]. Литогр. Вацлик. [1886]. Листы 1—15. 229 стр. с черт. [На каждом листе подпись: пр.-доц. А. Марков].

Лекции о непрерывных дробях. См. О непрерывных дробях.

144. Лекции по теории конечных разностей, читанные в С.-Петербургском университете прив.-доцент. А. А. Марковым. 1884/5 г. СПб. Литогр. Гробовой. Б. г. Листы 1—7. [2], 108 стр. [На каждом листе подпись: пр.-доц. А. Марков; в сигнатуре загл.: „Теория конечных разностей“].

145. Начала учения о пределах. [Издание студента В. Звонарева. СПб.]. Литогр. А. Ф. Маркова. [1894]. 241—352 стр. [В сигнатуре заглавие: „Введение в анализ“. Листы 16—22; на листах 16—21а подпись: за профессора Вл. Звонарев; листы 21 б и 22 подписаны: профессор А. Марков; без тит. листа и обложки].

Рекомендуемая литература (стр. 352 — 9 назв.).

146. О непрерывных дробях. Составил по лекциям академика А. А. Маркова Н. Михельсон. [СПб.]. Литогр. Богданова. 1906. Листы 1—6. 92 стр. [Без подписи А. А. Маркова]; литература (стр. 91—92, 22 назв.).

То же, незначительная переработка под загл.: Лекции о непрерывных дробях. — В кн. А. А. Марков. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М. — Л. 1948. Стр. 292—374; Примечания Н. И. Ахиезера (стр. 390).

147. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля. Составлено по лекциям академика А. А. Маркова. [СПб.]. Литогр. Богданова. 1906. Листы 1—4. 65 стр. с черт. [Без подписи А. А. Маркова]; литература (стр. 65).

То же, незначительная переработка под загл.: Лекции о функциях, наименее уклоняющихся от нуля. — В кн.: А. А. Марков. Избранные труды по теории непрерывных функций, наименее уклоняющихся от нуля. М. — Л. 1948. Стр. 244—291; Примечания Н. И. Ахиезера (стр. 389—390).

148. [Сферическая тригонометрия. СПб.]. Типо-литогр. Н. Евстифеева. [1891]. Листы 1—4. 62 стр. с черт. [На каждом листе подпись: проф. А. Марков; без заглавия, тит. листа и обложки; заглавие взято из сигнатуры; сплетено вместе с „Введением в анализ“ (см. № 132)].

149. Сферическая тригонометрия. Лекции профессора А. А. Маркова. Издание студента Вл. Звонарева. СПб. Типо-литогр. А. Ф. Маркова. 1893. Листы 1—5. 80 стр. с черт. (С.-Петербургский университет).

[На каждом листе подпись: профессор А. Марков; обложка отпечатана типографским способом].

Рекомендуемые пособия (стр. 80 — 2 назв.).

150. Сферическая тригонометрия. Лекции проф. А. А. Маркова. СПб. Литогр. А. Ф. Маркова. 1894. Листы 1—5. 80 стр. с черт. [На каждом листе подпись: за профессора Вл. Звонарев].

Рекомендуемые пособия (стр. 80 — 2 назв.).

151. Сферическая тригонометрия. [СПб.]. Литогр. А. Ф. Маркова. [1898]. Листы 1—5. 80 стр. с черт. [На каждом листе подпись: профессор А. Марков; без тит. листа и обложки].

152. Сферическая тригонометрия. [СПб.]. Литогр. А. Ф. Маркова. Б. г. Листы 1—5. 80 стр. с черт. [На каждом листе подпись: за профессора Вл. Звонарев; без тит. листа и обложки; сплетено вместе с „Введением в анализ“ (см. № 135)].

Рекомендуемые пособия по сферической тригонометрии (стр. 80 — 2 назв.).

153. Теория вероятностей. Лекции, читанные в С.-П. университете приват-доцентом А. Марковым в 1882/3 акад. году. Издание студентов 4-го курса. [СПб.]. Литогр. Шепердсон; со 2-го листа: типо-литогр. С. Ф. Яздовского. Б. г. Листы 1—14. 219 стр. с черт. [На листах 1—2 подпись: пр.-доц. А. Марков].

Прил.: „Программа по теории вероятностей“ (стр. 1—4, 2-я пагинация).

154. Теория вероятностей. Лекции, читанные в С. П. Бургском университете приват-доцентом А. А. Марковым. 1884/5 акад. год. Издание Петрова. [СПб.]. Литогр. Яздовского. [1885]. Листы 1—10. [2], 158 стр. с черт. [На каждом листе подпись: пр.-доц. А. Марков].

155. Теория вероятностей. [СПб.]. Литогр. Яздовского. [1888]. Листы 1—14. 221 стр. с черт. [На каждом листе подпись: проф. А. Марков; без тит. листа и обложки].

156. Теория вероятностей. Лекции профессора С.-Петербургского университета А. Маркова. [Издад Ф. Ясевич]. СПб. Литогр. Ю. Семечкиной. 1891. Листы I — XIII. 199 стр. с черт. [На каждом листе подпись: профессор А. Марков; без тит. листа; обложка отпечатана типографским способом].

157. [Теория исчисления конечных разностей. СПб.]. Типо-литогр. С. Ф. Яздовского. Б. г. Листы 1—5. 67 стр. [На каждом листе подпись: пр.-доц. А. Марков; без тит. листа и обложки].

158. Теория конечных разностей [1887—88 г. СПб.]. Литогр. Яздовского Б. г. Листы 1—9. 144 стр. [На каждом листе подпись: А. Марков; без тит. листа и обложки].

II. Литература о А. А. Маркове

С о н и н, Н., Б а к л у н д, О., Б р е д и х и н, Ф. Записка об ученых заслугах экстраординарного академика А. А. Маркова. — Протоколы Акад. Наук, Физ.-матем. отд., 1896, № II, заседание 24 января. Приложение.

То же. — Протоколы Акад. Наук, Общее собрание, 1896, № II, заседание 10 февраля, IV-е приложение.

Прил.: „Список трудов А. А. Маркова“ (30 назв.).

Марков (Андрей Андреевич). — Энциклопедический словарь. Изд. Ф. А. Брокгауз, И. А. Ефрон. Т. XVIII А, [Кн.] 36. СПб. 1896. Стр. 658—659.

Марков, Андрей Андреевич. — Биографический словарь профессоров и преподавателей С.-Петербургского университета за истекшую третью четверть века его существования. 1869—1894. Т. 2-й. М — Я. СПб. 1898. Стр. 3—5.

Прил.: „Список опубликованных трудов А. А. Маркова“ (стр. 4—5).

Markow, Andréi Andréjewitsch. — В кн.: J. C. Poggendorff. Biographisch-literarisches Handwörterbuch. Bd. III. Lpz. 1898. S. 873; Bd. IV. Lpz. 1904. S. 961; Bd. V. Lpz. — Brl. 1926. S. 808; Bd. VI. Theil 3. L — R. Brl. 1938. S. 1652 — 1653.

Марков, Андрей Андреевич. — Большая энциклопедия под ред. С. Н. Южакова. Т. 12. СПб. Т-во „Просвещение“. 1903. Стр. 653.

С т е к л о в, В. Отзыв академика В. Стеклова о необходимости избрать академика А. А. Маркова почетным членом С.-Петербургского университета. — Проток. засед. Совета С.-Петерб. унив. за 1913 г., Пг., 1918, № 69, отд. Прил. к проток. засед. 2 декабря, стр. 193—196.

А. Н. Марков, Андрей Андреевич. — Энциклопедический словарь Т-ва „Бр. А. и И. Гранат и Ко“. 7-е изд. Т. 28. М. [1915]. Стлб. 218.

Марков, Андрей Андреевич. — Новый энциклопедический словарь. Изд. Акц. общ. „Издат. дело б. Брокгауз — Ефрон“. Т. 25. Пг. [1915]. Стлб. 754.

Марков, Андрей Андреевич. [Автобиография]. — Материалы для биографического словаря действительных членов Академии Наук. Ч. 2-я. М — Я. Пг. 1917. (Академия Наук. 1889—1914. III). Стр. 16—18.

Список трудов А. А. Маркова (стр. 16—18).

Марков, Андрей Андреевич. — В кн.: С. А. Венгеров. Источники словаря русских писателей. Т. IV. Лоначевский — Некрасов. Пг. 1917. Стр. 182.

О л ь д е н б у р г, С. Ф. Речь непряменного секретаря академика С. Ф. Ольденбурга. Читана в торжественном заседании [Росс. Академии Наук] 29 декабря 1922 г. [СПб. 1922]. 26 стр.

О А. А. Маркове (стр. 2—3).

Стекло в, В. А. Андрей Андреевич Марков. (Некрологический очерк). — Изв. Росс. Акад. Наук, 1922 (1924), т. XVI, № 1—18, стр. 169—184.

Безикович, А. Работы А. А. Маркова по теории вероятностей. — Изв. Росс. Акад. Наук, 1923, т. XVII, № 1—18, стр. 45—52.

Гюнтер, Н. М. О педагогической деятельности А. А. Маркова. — Изв. Росс. Акад. Наук, 1923, т. XVII, № 1—18, стр. 35—44.

Безикович, А. С. Биографический очерк — В кн.: А. А. Марков. Исчисление вероятностей. 4-е изд. М. 1924. Стр. III—XIV.

Марков, Андрей Андреевич (1856—1922). — Малая советская энциклопедия. Т. 4. М. 1930. Стлб. 882.

Архив Академии Наук СССР. Обзорение архивных материалов. Под общ. ред. Г. А. Князева [Т. I]. Л. 1933. 259 стр. 18 л. табл. (Академия Наук СССР. Труды Архива. Вып. 1).

Обзорение архивного фонда А. А. Маркова (стр. 71); прил. факсимиле прошения А. А. Маркова в Святейший правительствующий синод об отлучении его от церкви (на 2-х вкл. листах).

Колмогоров, А. Н. Марков, Андрей Андреевич (1856—1922). — Большая советская энциклопедия. Т. 38. 1938. Стлб. 152—153.

Бернштейн, С. Н. Петербургская школа теории вероятностей. — Уч. зап. Лен. гос. унив., 1940, № 55, серия матем. наук, вып. 10, стр. 3—11.

То же. — Природа, Л., 1939, № 8, стр. 17—22 с портр.

О П. Л. Чебышеве, А. М. Ляпунове и А. А. Маркове.

Гнеденко, Б. В. Очерки по истории математики в России. М. — Л. 1946. 247 стр. с черт. и портр., 1 л. табл.

Биографические сведения [о А. А. Маркове] (стр. 125—128), А. А. Марков как гражданин (стр. 128), Круг научных интересов (стр. 128—129), Первый период работ по теории вероятностей (стр. 129—131), Второй период исследований по теории вероятностей (стр. 132—133), Последействие идей Маркова (стр. 133).

Ахизер, Н. И. Русский математик А. А. Марков. К 25-летию со дня смерти. — Природа, Л., 1947, № 8, стр. 76—81.

Делоне, Б. Н. Петербургская школа теории чисел. М. — Л. Изд. АН. 1947. 419, [4] стр. с черт., 6 л. портр. (Академия Наук СССР. Научно-популярная серия).

Андрей Андреевич Марков (1856—1922) (стр. 141—145, 1 л. портр.); О бинарных квадратичных формах положительного определителя. [Изложение магистерской диссертации А. А. Маркова, с комментариями] (стр. 146—193); список работ А. А. Маркова по теории чисел (стр. 413).

Ахизер, Н. И. Андрей Андреевич Марков. Биографический очерк. — В кн.: А. А. Марков. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М. — Л. 1948. Стр. 7—12.

Гнеденко, Б. В. Андрей Андреевич Марков. — Люди русской науки. Очерки о выдающихся деятелях естествознания и техники. М. — Л. 1948. Стр. 179—185 с портр.

Прил.: „Главнейшие труды А. А. Маркова“ (стр. 185) „[Литература] о А. А. Маркове“ (стр. 185).

Гнеденко, Б. В. Развитие теорий вероятностей в России. — Тр. Инст. истории естествознания, т. II, 1948, стр. 390—425.

О А. А. Маркове (стр. 402—404).

Марков, Андрей Андреевич. — Краткая советская энциклопедия. М. 1948. Стлб. 995.

Список сокращенных обозначений периодических изданий

Вестн. опытн. физ. и элемент. матем. — Вестник опытной физики и элементарной математики. Одесса.

Журн. Мин. народн. просв. — Журнал Министерства народного просвещения. СПб.

Зап. Акад. Наук — Записки Академии Наук. СПб.

Изв. Акад. Наук, V серия. — Известия Академии Наук, V серия. СПб.

Изв. Акад. Наук, VI серия. — Известия Академии Наук, VI серия. СПб., Пг., Л.

Изв. Физ.-матем. общ. при Казанск. унив. — Известия Физико-математического общества при Казанском университете. Казань.

Матем. сб. — Математический сборник, издаваемый Московским математическим обществом. М.

Сообщ. и проток. засед. Матем. общ. при Харьк. унив. — Сообщения и протоколы заседаний Математического общества при Харьковском университете. Харьков.

Сообщ. Харьков. матем. общ. — Сообщения Харьковского математического общества. Харьков.

Страх. обзор. — Страховое обозрение. Пг.

Успехи матем. наук. — Успехи математических наук. М. — Л.

Acta mathem. — Acta mathematica. Stockholm.

Ann. sci. de l'Ecole normale supér. — Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure. Paris.

Arch. d. Mathem. u. Phys. — Archiv der Mathematik und Physik. Lpz. — Brl.

Boll. di bibliogr. e storia d. sci. matem. — Bolletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche. Palermo — Torino.

Bull. d. sci. mathém. — Bulletin des sciences mathématiques. Paris.

Bull. of the Amer. mathem. soc. — Bulletin of the American mathematical society. Lancaster — New York.

Comptes rendus hebd. des séances de l'Acad. des sci. — Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris.

Duke mathem. journ. — Duke mathematical journal, Durham, N. C.

L'Enseignement mathém. — L'Enseignement mathématique. Paris — Genève.

Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathem. — Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Brl. — Lpz.

Jahresber. d. Deutsch. Mathem. Vereinigung. — Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Lpz.

Mathem. Annalen. — Mathematische Annalen. Lpz.

Mathem. gazette. — The mathematical gazette. London.

Monatshefte f. Mathem. u. Physik. — Monatshefte für Mathematik und Physik. Wien.

Nyt tidsskr. f. mathem. — Nyt tidsskrift for matematik. København.

Rev. gén. d. sci. pures et appl. — Revue générale des sciences pures et appliquées. Paris.

Rev. semestr. d. publ. mathém. — Revue semestrielle des publications mathématiques, redigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam. Amsterdam — Groningen.

Zeitschr. f. Mathem. u. Physik. — Zeitschrift für Mathematik und Physik. Lpz.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адамар Ж. 690
Андреев К. А. 686, 688
Ахиезер Н. И. 681—683, 685, 688, 690—692, 706, 707, 709, 712, 713
Баклуид О. А. 696, 697, 711
Бальтцер 220
Безикович А. С. 705, 712
Белопольский А. А. 697
Бернулли Иван 13, 16
Бернулли Яков 321, 420, 475, 509, 544, 578, 680, 701—703
Бернштейн С. Н. 626, 633, 636, 637, 659, 662, 664, 665, 667, 673, 675, 712
Бессель 247
Бобылев Д. К. 685, 704
Больманн Г. 684, 698
Борткевич Л. 525, 575
Бредихин Ф. А. 696, 711
Брунс Г. 401, 404, 405, 413, 632, 633, 662
Буланже А. 698
Буняковский В. Я. 601, 609, 687
Бьенэме 273, 703
Валленберг 686
Валлис 297
Вальватьева Е. А. 600, 603
Вальватьева М. И. 603
Вантцель 225, 227
Васильев А. В. 231, 269, 625, 637, 654, 680—693, 696
Введенский Н. Е. 695
Вельтцин 685
Венков Б. А. 619, 650, 652, 653
Волковысский Л. И. 682, 683, 690—692
Вороной Г. Ф. 182, 183, 646, 647, 699
Выгодский 612
Гамбургер 683, 684, 691
Гаус К. 18, 19, 28, 47, 246, 247, 250, 682
Гнеденко Б. В. 712, 713
Голицын Б. Б. 696
Горшков Д. С. 645
Горький А. М. 604—606, 610
Граве Д. А. 688, 691, 692
Грузинцев Г. 697
Гурвиц 687
Гюнтер Н. М. 712
Давенпорт 645
Дедекин 87, 647
Делоне Б. Н. 645, 680, 712
Джексон 698
Диссон 645

- Добролюбов 601
Друэн П. 692, 700
Золотарев Е. И. 11, 87, 601, 602, 615, 641, 646, 647, 687, 701
Иванов И. И. 649
Имшенецкий В. Г. 687—689
Кадэ 600
Капустин 602
Клейн Ф. 687, 691
Клюйвер 687, 691, 696
Князев Г. А. 712
Колмогоров А. Н. 637, 664, 712
Коркин А. Н. 11, 145, 162, 344, 601, 602, 615, 641, 642, 646, 701
Кортвег Д. 697
Крылов А. Н. 610, 701, 704
Кузьмин Р. О. 670
Куммер 87
Кэли А. 173
Лагранж 15, 17, 18, 34, 288
Лампе 697, 700
Ландау 696
Лаплас 321, 365, 505, 511, 512, 546, 549, 551—554, 556, 560, 563, 565, 567—569, 571, 575, 585, 615, 668, 703
Лежандр 31
Лежен-Дирихле 24
Либманн Г. 698
Линдберг 626, 659
Линдемани 199, 201, 223, 225, 226, 619, 654, 680
Линник Ю. В. 667
Лиувилль 286
Лоначевский 711
Лэнн (Лунн) 698
Лямэ 690
Ляпунов А. М. 319, 322, 323, 331, 334, 336, 625, 626, 656, 659, 690, 696, 697, 701, 704, 712
Маиевский Н. 249
Маклорен 685
Маннури 694
Марков А. Г. 599, 600—602
Марков В. А. 599
Марков Г. М. 599
Маркова А. И. 599
Маркова Н. П. 599
Матлис Л. М. 700
Мейер А. 182, 575
Мейер Ф. 680, 686
Менделеев Д. И. 685, 707
Мертенс 139
Минковский Герман 392, 645
Млодзеевский Б. 686
Моавр 321, 511—513, 515, 517—519, 521, 575, 585, 668
Моленбрук П. 687, 690
Морделл 645
Мюллер Ф. 680, 690, 691
Мэррей Д. А. 684
Некрасов П. А. 610, 686, 693, 700, 701, 703, 711
Нетто 680, 683
Ньютон 234, 237, 327, 407, 468, 479, 636
Ольденбург С. Ф. 607, 610, 711
Отони 684
Петрушевский Ф. Ф. 695
Пирсон 512, 534, 575, 670
Писарев 601
Поггендорф 711
Полиа 702
Понселе 697
Поссе К. А. 318, 603, 700, 707
Прюмм 684
Пуанкаре 240, 248, 269, 626
Пуассон 246, 575, 584

Пшеборский А. 693, 696

Ремак 645

Ролль 658

Романовский 630

Салтыков Н. Н. 692

Сапогов Н. А. 668

Симон П. 690

Синцов 688, 689, 692—701

Соминский И. С. 653

Сомов П. 699—703

Сонин Н. Я. 293, 297, 306, 698,
694, 697, 703, 706, 711

Сохоцкий Ю. В. 603

Стеклов В. А. 613, 700, 704, 711,
712

Стиатъес 318, 658

Стирлинг 579, 581, 582

Тёплитц 682, 683

Тимердинг 698

Тихомандрицкий М. А. 688, 691,
694

Тихомиров Е. 533, 534, 670

Толстой Л. Н. 608, 610

Феллер 626, 659

Фриз де 690, 692, 700

Фризендорф Т. 684

Фролов 610, 611, 703

Хилль Г. В. 697

Хоппе (Гоппе) 681, 682

Цингер Н. Е. 704

Чебышев П. Л. 137, 233, 243, 249,
250, 263, 267, 269, 271, 273, 286,
287, 291, 301, 303, 305, 321, 341,
342, 344, 345, 365, 467, 513—517,
521, 551, 556, 563, 568, 602, 603,
606, 614, 620—622, 645, 649, 654,
656, 659, 661, 662, 668, 669, 673,
681, 683, 687, 689, 690, 694—696,
706, 707, 712

Чернышевский 601

Чубер 247

Чупров А. А. 525, 529, 701

Штекель 692

Шуберт Ф. Ф. 697

Эйзенштейн 167

Эйлер 15

Эльфринкхоф фан Л. 690

Эрмит Ш. 137, 182, 199, 201, 217,
225, 226, 551, 556, 563, 568, 619,
649, 654, 673, 680, 682, 685—
687, 689, 690, 706, 707

Южаков С. Н. 711

Якоби 18

СОДЕРЖАНИЕ

Т е о р и я ч и с е л

	Стр.
О бинарных квадратичных формах положительного определителя	9
О целых числах, зависящих от корня кубического из целого рационального числа	85
О простых делителях чисел вида $1 + 4x^2$	135
О неопределенных тройничных квадратичных формах	143
Таблица неопределенных тройничных квадратичных форм, не представляющих нуль, для всех положительных определителей $D \leq 50$	165
Доказательство трансцендентности чисел e и π . (Невозможность квадратуры круга)	199

Т е о р и я в е р о я т н о с т е й

Закон больших чисел и способ наименьших квадратов	231
О корнях уравнения $e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$	253
Неравенства Чебышева и основная теорема	271
Теорема о пределе вероятности для случаев академика А.М. Ляпунова	319
Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга	339
Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь	363
О связанных величинах, не образующих настоящей цепи	399
Об одном случае испытаний, связанных в сложную цепь	417
Об испытаниях, связанных в цепь ненаблюдаемыми событиями	437
Исследование общего случая испытаний, связанных в цепь	465

	Стр.
О задаче Якова Бернулли	509
О коэффициенте дисперсии	523
О коэффициенте дисперсии. (Вторая заметка)	537
Об одной задаче Лапласа	549
О некоторых предельных формулах исчисления вероятностей . .	573
Обобщение задачи о последовательном обмене шаров	587

Приложения

Биография А. А. Маркова. Проф. А. А. Марков	599
Очерк работ А. А. Маркова по теории чисел и теории вероятностей. Проф. Ю. В. Линник, доц. Н. А. Сапогов, В. Н. Тимофеев	614
Комментарии и примечания	643
Библиография. Составила В. Алексеева	679
Именной указатель	715

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР*

*

Редактор издательства *П. И. Малявко*
Технический редактор *А. В. Смирнова*
Корректор *Н. П. Ракова*

*

РИСО АН СССР № 4640. М. 43363.
Подписано к печати 16/X 1951 г.
Бумага $70 \times 92^{1/16}$. Бум. л. $22^{1/2}$.
Печ. л. $52.65 + 3$ вкл. Уч.-изд. л. 34.8.
Тираж 3000. Зак. № 46. Цена в переплете 32 руб.

1-я тип. Издательства АН СССР,
Ленинград, В. О., 9 л., д. 12.

А.А.МАРКОВ

ИЗБРАННЫЕ
ТРУДЫ



32 p. 6